

5. С. А. Страж. Межотраслевые связи торговли. Канд. дисс., Таллин, 1966.
6. Survey of Current Business, 1965, September.
7. Rev. Econ. and Statist., 1952, May.
8. R. Co x. a. o. Distribution in a High-Level Economy. Englewood Cliffs, Prentice Hall, 1965.
9. 1963 Census of Business, v. IV. Washington, 1966.
10. C. B. Til a n u s. Input — Output Experiments. Rotterdam, 1966.
11. The Structural Interdependence of the Economy. N. Y., 1956.
12. В. Крепеле. Сводные экономические расчеты, включающие межотраслевой баланс производства и распределения продукции для Федеративной Республики Германии. М., Госстатиздат, 1964.

Поступила в редакцию
24 XI 1969

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ СИНХРОНИЗАЦИИ СБОРОЧНЫХ ПОТОЧНЫХ ЛИНИЙ

Т. Н. ЧЕРНОВА

(Москва)

Как известно, отличительной особенностью поточной линии (в том числе и сборочной) является непрерывность и синхронность производственного процесса. Это значит, что изделие находится на каждом рабочем месте в течение одного и того же времени, называемого ритмом, и все операции, приписанные данному рабочему месту, должны быть выполнены за это время. Синхронизация сборочной линии заключается в таком распределении работ по рабочим местам, чтобы сумма продолжительностей выполнения работ на любом рабочем месте была возможно ближе к ритму, но не превосходила бы его. В дальнейшем мы будем иметь в виду исключительно сборочные поточные линии.

Допустим, что нам известно:

1. Множество

$$T = \{e_1, e_2, \dots, e_n\} \quad (1)$$

технологически неделимых элементов сборочных операций (ТНЭ), которые необходимо выполнить, чтобы собрать изделие.

2. Время выполнения t_i , $i = 1, 2, 3, \dots, n$, каждого ТНЭ, называемое в дальнейшем элементарным временем. Сумма элементарных времен

$$\tau = \sum_{i=1}^{i=n} t_i \quad (2)$$

есть общий объем работ по сборке данного изделия.

3. Отношения предшествования, ограничивающие порядок выполнения работ и определяющие тем самым все возможные технологические маршруты сборки. Они могут быть описаны некоторым графом [1] $G = (T, \Gamma)$ без контуров, вершины которого соответствуют ТНЭ $e_i \in T$, причем существует путь от вершины e_i к вершине e_j , если и только если работа e_i предшествует работе e_j (что обозначается $e_i \prec e_j$). В дальнейшем этот граф будет называться диаграммой очередности. Совершенно очевидно, что отношения предшествования являются антирефлексивными, антисимметричными и транзитивными [2].

4. Другие ограничения, исключаяющие, например, группировку некоторых работ на одном и том же рабочем месте или требующие выполнения какой-либо работы на определенном рабочем месте.

Предположим, что множество T технологически неделимых элементов распределено на некоторое число N рабочих мест*. Пусть на j -м рабочем месте выполняется подмножество T_j работ. Обозначим через

$$\tau_j = \sum_{i \in T_j} t_i, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (3)$$

* Предполагается, что упомянутые выше ограничения при этом не были нарушены.

объем работ на j -м рабочем месте. Тогда ритм R сборочной поточной линии

$$R = \max_j \tau_j. \quad (4)$$

Величина

$$d_j = R - \tau_j, j = 1, 2, \dots, N, \quad (5)$$

представляет время простоя на j -м рабочем месте. Соответственно величина

$$d = RN - \tau, \quad (6)$$

равная сумме простоев всех рабочих мест, называется суммарным простоем или потерями времени на поточной линии.

Задача заключается в том, чтобы найти в некотором смысле оптимальное распределение множества ТНЭ по рабочим местам.

В [3—5] в качестве критерия оптимальности распределения работ принимался минимум числа N рабочих мест при условии $R \leq R_0$, где R_0 — заданный ритм.

Нетрудно убедиться, что этот критерий не гарантирует минимальных потерь на поточной линии для полученного числа $N_{\min}$ рабочих мест. Для минимизации простоя приходится многократно решать эту задачу, задавая рядом значений ритма R_0^* , удовлетворяющих неравенствам

$$\left[\frac{\tau}{N_{\min}} \right] \leq R_0^* \leq R_0,$$

где $[x]$ обозначает целое, большее x .

Прямая минимизация ритма R при заданном числе N рабочих мест, как видно из (6), одновременно обращает в минимум и потери времени. Хотя этот второй критерий, несомненно, является более предпочтительным, строгий алгоритм решения соответствующей модели до сих пор неизвестен [6].

Ниже предлагается метод минимизации ритма R при заданном N , использующий аппарат динамического программирования.

Обозначим через $f_k(S)$ ритм при оптимальном распределении множества $S (S \subseteq T)$ ТНЭ на $k (k > 1)$ рабочих мест.

Тогда, согласно принципу оптимальности Беллмана [7], для любых $k > 1$ и S с числом элементов $\geq k$ имеет место функциональное уравнение

$$f_k(S) = \min_{P \subset S} \left\{ \max_{i \in P} \left[\sum_{i \in P} t_i, f_{k-1}(S \setminus P) \right] \right\}. \quad (7)$$

В самом деле, если на первое рабочее место распределено множество $P \subset S$ ТНЭ, а на оставшиеся $(k-1)$ рабочих мест распределено оптимальным образом множество $S \setminus P$ остальных работ, то ритм сборочной поточной линии при таком распределении множества S ТНЭ будет, очевидно, равен

$$\max_{i \in P} \left[\sum_{i \in P} t_i, f_{k-1}(S \setminus P) \right]. \quad (8)$$

Мы выбираем P так, чтобы минимизировать этот ритм, откуда и получается (7).

Так как для $k = 1$ $f_k(S)$ определяется непосредственно

$$f_1(S) = \sum_{i \in S} t_i, \quad (9)$$

то уравнение (7) позволяет для всех $S \subseteq T$ последовательно определить $f_2(S)$, $f_3(S)$, ..., $f_{N-1}(S)$ и, наконец, искомое значение минимального ритма $f_N(T)$.

Подчеркнем, что на каждом шаге вычислений рассмотрению подлежат лишь допустимые множества S , P , $S \setminus P$, т. е. множества ТНЭ, которые могут быть выполнены в некотором порядке на своих рабочих местах без нарушения введенных ограничений. Для простоты будем предполагать, что имеют место только ограничения очередности.

Уточним теперь понятие допустимого множества.

Определение. Множество $Q = (S \setminus P) \subset S$ называется допустимым по отношению к (допустимому) множеству S , если из $e_i \in Q$ и $e_j \succ e_i$ следует, что $e_j \in Q$. Отсюда вытекает следующий способ построения всех допустимых по отношению к S множеств Q .

Рассмотрим граф $G_S = (S, \Gamma_S)$, получающийся из диаграммы очередности вычеркиванием всех вершин, не входящих в S . Одноэлементным допустимым подмножеством является всякое подмножество, состоящее из одного ТНЭ, которому соответствует выход * или изолированная вершина графа G_S , и только такое подмножество. Пусть уже построены все k -элементные допустимые множества

$$i > j_m^{(k)} = \min \{j | e_j \in Q_m^{(k)}\}.$$

Тогда $(k+1)$ -элементным допустимым подмножеством является всякое подмножество вида $Q_m^{(k)} \cup \{e_i\}$, где e_i — изолированная вершина или выход подграфа, получающегося в результате вычеркивания в G_S всех вершин $e_j \in Q_m^{(k)}$ и только такое подмножество.

Во избежание дублирования при построении $(k+1)$ -элементных множеств к множествам $Q_m^{(k)}$ следует добавлять лишь те элементы e_i , для которых

$$i < j_m^{(k)} = \min \{j | e_j \in Q_m^{(k)}\}.$$

Множества $Q_m^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots$, удобно перечислять в обратном лексикографическом порядке. Это означает, что если в множествах

$$Q_l^{(k)} = \{e_{i_1(l)}, e_{i_2(l)}, \dots, e_{i_k(l)}\},$$

$$Q_m^{(k)} = \{e_{i_1(m)}, e_{i_2(m)}, \dots, e_{i_k(m)}\},$$

где элементы выписаны в порядке убывания их номеров, $1 \leq k \leq k$ есть первый (считая слева) индекс, такой, что $i_{k(l)} \neq i_{k(m)}$, то $l < m$ в том и только в том случае, когда $i_{k(l)} > i_{k(m)}$.

Допустим, что мы построили множество S всех множеств S , допустимых по отношению к множеству T (которое, конечно, само является допустимым). Тогда все подмножества Q , допустимые по отношению к некоторому множеству $S^* \in S$, найдутся уже среди перечисленных множеств S , имеющих мощность **, меньшую, чем S^* .

Будем считать, что уже найдено $f_N(S)$. Пусть

$$M_k(S, P) = \max \left[\sum_{i \in P} t_i, f_{k-1}(S \setminus P) \right],$$

$$1 < k \leq N; \quad P \subset S \subseteq T.$$

Тогда каждое оптимальное распределение ТНЭ по рабочим местам может быть получено следующим образом.

Первому рабочему месту припишем множество элементов T_1 , равное одному из множеств P , для которых $M_N(T, P) = f_N(T)$. Второму рабочему месту припишем множество элементов T_2 , равное одному из множеств P , для которых $M_{N-1}(T \setminus T_1, P) \leq f_N(T)$. Третьему — одно из множеств P , для которых $M_{N-2}(T \setminus (T_1 \cup T_2), P) \leq f_N(T)$.

Подобным образом придем в конце концов к множеству элементов, которые должны быть приписаны $(N-1)$ рабочему месту. Это будет одно из множеств P , для которых $M_2(T \setminus (T_1 \cup T_2 \cup \dots \cup T_{N-2}), P) \leq f_N(T)$.

Теперь N -му рабочему месту приписывается множество элементов $T_N = T \setminus (T_1 \cup T_2 \cup \dots \cup T_{N-1})$.

Одно из преимуществ описанного метода синхронизации сборочной поточной линии состоит в том, что одновременно определяются все оптимальные по принятому критерию решения. Это позволяет при случае выбрать среди них наиболее предпочтительный вариант, руководствуясь какими-нибудь дополнительными соображениями (например, считая лучшим такое распределение работ, когда большая часть потерь приходится на первые рабочие места, или распределение, при котором издержки производства в связи с простоями будут наименьшими, и т. п.).

Более того, попутно с решением задачи для N рабочих мест без сколько-нибудь значительного увеличения объема вычислений могут быть найдены также и оптимальные распределения ТНЭ для $N-1, N-2, \dots, N-k$ ($k < N$) рабочих мест.

* Выходом графа [4] называется каждая его вершина (не являющаяся изолированной), из которой не исходит ни одна дуга.

** Напомним, что мощностью множества S называется число элементов в S .

В связи с практическими аспектами применения рассмотренного алгоритма синхронизации заметим следующее.

1. При необходимости в рассмотренную модель можно ввести и другие ограничения [8], что отразится только на способе образования допустимых множеств ТНЭ (конечно, определение допустимого множества будет тогда другим).

2. Предложенный метод синхронизации сборочной линии пригоден и в том случае, когда элементарное время t_i , $i = 1, 2, \dots, n$, рассматривается как случайное, подчиненное, например, нормальному закону распределения со средним $\bar{t}_i$ и средним квадратическим отклонением σ_i .

3. Возможности эффективного решения задачи на ЭВМ ограничиваются в основном емкостью (оперативной) памяти, необходимой для хранения допустимых множеств. По-видимому, для современных ЭВМ верхним пределом для реальных задач (при типичных для сборочных процессов относительно «слабых» ограничениях очередности) является 30—40 элементов*. При больших значениях n уравнение (7) может быть использовано для приближенной минимизации ритма методом последовательных улучшений некоторого исходного технологического маршрута (ср. [5], где описан также способ подсчета количества допустимых множеств).

Вручную расчет удобно вести по следующей схеме.

Перенумеруем все допустимые по отношению к T множества S_l , $l = 1, 2, \dots, L - 1$, в обратном лексикографическом порядке и положим $S_L = T$.

Результаты вычислений будем фиксировать в (квадратной) таблице, имеющей L строк и столько же столбцов.

Обозначим содержимое (непустой) клетки, находящейся на пересечении l -й строки и m -го столбца таблицы, через a_{lm} .

Таблица заполняется в такой последовательности:

а) первая строка

$$a_{1m} = \sum_{i \in S_m} t_i, \quad m = 1, 2, \dots, L;$$

б) часть таблицы ниже главной диагонали

$$a_{lm} = \begin{cases} a_{1l} - a_{1m}, & \text{если множество } S_m \text{ допустимо по отношению} \\ & \text{к множеству } S_l; \\ \infty, & \text{если множество } S_m \text{ недопустимо по отношению} \\ & \text{к множеству } S_l, \end{cases}$$

$$l = 2, 3, \dots, L; m = 1, 2, \dots, l - 1;$$

в) остальная часть таблицы

$$a_{km} = \min_{l(k-1) \leq p < m} [\max(a_{mp}, a_{k-l, p})],$$

$$k = 2, 3, \dots, n; m = l(k), l(k+1), \dots, L,$$

Т а б л и ц а 1

l	Допустимые множества $S_l \subseteq T$	m														15
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	
1	{10}	4	9	10	7	15	12	13	18	20	23	30	35	32	37	43
2	{10, 9}	5	5	6	4	9	7	7	9	10	12	15	18	17	19	23
3	{10, 8}	6	∞	∞	∞	6	5	6	7	7	9	10	12	12	14	15
4	{10, 7}	3	∞	∞	∞	∞	∞	∞	6	6	7	9	10	9	10	12
5	{10, 9, 8}	11	6	5	∞	∞	∞	∞	∞	6	6	7	9	9	9	10
6	{10, 9, 7}	8	3	∞	5	∞	∞	∞	∞	∞	6	7	7	7	7	7
7	{10, 8, 7}	9	∞	3	6	∞	∞	∞	∞	∞	∞	7	7	7	7	7
8	{10, 9, 8, 7}	14	9	8	11	3	6	5	∞	∞	∞	∞	7	7	7	7
9	{10, 9, 8, 7, 6}	16	11	10	13	5	8	7	2	∞	∞	∞	∞	∞	∞	7
10	{10, 9, 8, 7, 6, 5}	19	14	13	16	8	11	10	5	3	∞	∞	∞	∞	∞	7
11	{10, 9, 8, 7, 6, 5, 4}	26	21	20	23	15	18	17	12	10	7	∞	∞	∞	∞	7
12	{10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3}	31	26	25	28	20	23	22	17	15	12	5	∞	∞	∞	7
13	{10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 2}	28	23	22	25	17	20	19	14	12	9	2	∞	∞	∞	7
14	{10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2}	33	28	27	30	22	25	24	19	17	14	7	2	5	∞	7
15	{10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1}	39	34	33	36	28	31	30	25	23	20	13	8	11	6	7

* Для жесткого технологического маршрута задачи такого «размера» могут быть решены предложенным методом вручную.

где $l(r)$ — номер первого по порядку множества S_l , содержащего r элементов.

Сначала заполняется вторая строка таблицы, затем третья и т. д. Некоторые клетки таблицы могут при этом остаться пустыми.

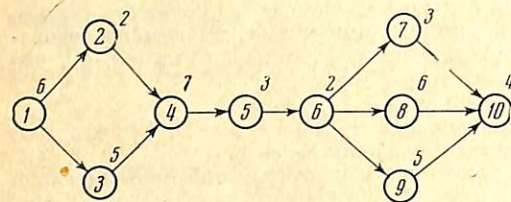
Нетрудно понять, что $a_{kL} = f_k(T)$, $k = 1, 2, \dots, N \leq n$.

Все оптимальные распределения работ по N рабочим местам строятся следующим образом.

Найдя какое-нибудь a_{Lm_1} , для которого $\max(a_{Lm_1}, a_{N-1, m_1}) = a_{NL}$, приписываем первому рабочему месту множество работ $T_1 = T \setminus S_{m_1}$.

Найдя далее какое-нибудь $a_{m_1 m_2}$, для которого $\max(a_{m_1 m_2}, a_{N-2, m_2}) \leq a_{NL}$, приписываем второму рабочему месту множество работ $T_2 = S_{m_1} \setminus S_{m_2}$ и т. д.

Рассмотрим следующий пример. Допустим, что технологический анализ процесса сборки изделия выявил 10 технологически неделимых элементов и 12 «прямых» отношений предшествования*. Соответствующая диаграмма очередности показана на рисунке. Цифры в кружочках обозначают номера i неделимых элементов e_i , а цифры справа сверху — t_i , $i = 1, 2, \dots, 10$.



Вычисления сведены в табл. 1.

В столбце 15 таблицы имеем искоемые значения минимального ритма $f_N(T)$ при распределении множества T элементарных работ на N рабочих мест, $n \geq N = 1, 2, \dots, 10$.

Например, для $N = 4$ находим в этом столбце ритм $R = 12$. Соответствующие этому ритму оптимальные распределения приведены в табл. 2.

Т а б л и ц а 2

Варианты оптимального распределения	Рабочие места											
	I			II			III			IV		
	T_1	τ_1	d_1	T_2	τ_2	d_2	T_3	τ_3	d_3	T_4	τ_4	d_4
I	{1, 2}	8	4	{3, 4}	12	0	{5, 6, 8}	11	1	{7, 9, 10}	12	0
II	{1, 3}	11	1	{2, 4}	9	3	{5, 6, 8}	11	1	{7, 9, 10}	12	0
III	{1, 3}	11	1	{2, 4, 5}	12	0	{6, 7, 9}	10	2	{8, 10}	10	2
IV	{1, 3}	11	1	{2, 4, 5}	12	0	{6, 7, 8}	11	1	{9, 10}	9	3
V	{1, 3}	11	1	{2, 4, 5}	12	0	{6, 8}	8	4	{7, 9, 10}	12	0

Наличие нескольких вариантов оптимального распределения работ по рабочим местам дает возможность выбрать наиболее предпочтительный с точки зрения какого-либо другого критерия, например, суммарных издержек производства в связи с потерями времени на поточной линии.

ЛИТЕРАТУРА

1. К. Берж. Теория графов и ее применения. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
2. Ю. А. Шиханович. Введение в современную математику. М., «Наука», 1965.
3. J. R. Jackson. A Computing Procedure for a Line Balancing Problem. *Manag. Sci.*, 1956, v. 2, № 3.
4. W. P. Helgeson, D. P. Birnie. Assembly Line Balancing Using the Ranked Positional Weight Technique. *J. Industr. Engng*, 1961, v. XII, № 6.
5. M. Held, R. M. Karp, R. Shreshian. Assembly Line Balancing — Dynamic Programming with Precedence Constraints. *Operat. Res.*, 1963, v. 11, № 3.
6. E. J. Ignall. A Review of Assembly Line Balancing. *J. Industr. Engng*, 1965, v. XVI, № 4.
7. Р. Беллман. Динамическое программирование. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
8. L. Wester, M. D. Kilbridge. Heuristic Line Balancing. A Case. *J. Industr. Engng*, 1962, v. XIII, № 3.

Поступила в редакцию
20 VII 1967

* Напомним, что для простоты другие ограничения мы условились не рассматривать.