

РЕШЕНИЕ РАСПРЕДЕЛИТЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ МЕТОДОМ БАЗИСНОГО ГРАФА

Л. И. СМОЛЯР

(Москва)

При решении распределительной задачи $[A(m, n)$ -задачи]

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_{ij} + x_{i0} = a_{i0}, \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} - \bar{x}_{0j} = a_{0j}, \quad (2)$$

$$\sum_{i,j} c_{ij}x_{ij} + \sum_i c_{i0}x_{i0} + \sum_j c_{0j}\bar{x}_{0j} \rightarrow \min \quad (3)$$

методом последовательного улучшения плана для вектора, вводимого в базис, вычисляются коэффициенты его разложения по элементам базиса, из которых предварительно строятся цепи. Эта процедура значительно облегчается, если представить базис распределительной задачи, используя специальный ориентированный граф, с помощью которого можно также пересчитывать двойственные оценки, соответствующие промежуточным базисам, не прибегая к решению системы уравнений.

Обозначим вектор-столбцы матрицы ограничений парами (i, j) , где i -я компонента равна a_{ij} , $(m+j)$ -я — единице, остальные — нулю. В уравнении (2) введем искусственные базисные неизвестные x_{0j} . Вектор-столбцы коэффициентов при x_{i0} , x_{0j} , $\bar{x}_{0j}$ обозначим соответственно $(i, 0)$, $(0, j)$, $(0, -j)$: 1-м месте, $(m+j)$ -м, —1 на $(m+j)$ -м. Назовем их 0-циклами. Символы i и j в паре (i, j) будем называть соответственно 1- и 2-индексами.

Назовем ω -циклом последовательность вида

$$(i_1, j_1) (i_1, j_2) (i_2, j_2) \dots (i_k, j_1) \text{ 1-цикл} \quad (4)$$

или

$$(i_1, j_1) (i_2, j_1) (i_2, j_2) \dots (i_1, j_k) \text{ 2-цикл}, \quad (5)$$

содержащую четное число элементов $2k$, причем каждый 1- и 2-индекс встречается в ω -цикле ровно два раза.

Характеристикой ω -цикла назовем число

$$\lambda = 1 - h \quad (6)$$

$$\text{где } h = \frac{a_1 a_3 \dots a_{2k-1}}{a_2 a_4 \dots a_{2k}} \text{ для 1-цикла} \quad (7)$$

$$\text{или } h = \frac{a_2 a_4 \dots a_{2k}}{a_1 a_3 \dots a_{2k-1}} \text{ для 2-цикла}, \quad (8)$$

a_r — значение a_{ij} для r -го элемента цикла. Всякий 1-цикл можно представить как 2-цикл, и наоборот. Характеристика ω -цикла при этом не меняется, если не меняется направление его обхода. Поэтому, говоря об ω -цикле, будем считать фиксированным направление его обхода.

Если $\lambda \neq 0$, ω -цикл называется невырожденным, в противном случае — вырожденным. 0-циклы невырождены по определению.

Цепью называется последовательность вида

$$(i_1.j_1) (i_1.j_2) (i_2.j_2) \dots \quad 1 \text{ цепь} \quad (9)$$

$$\text{или } (i_1.j_1) (i_2.j_1) (i_2.j_2) \dots \quad 2\text{-цепь.} \quad (10)$$

Теорема 1 (о структуре базиса) [1, 2]. Базис $A(m, n)$ -задачи состоит из $(m+n)$ элементов. Каждый 1-индекс i и 2-индекс j ($i, j \neq 0$) входит хотя бы в один элемент базиса. В базисе всегда содержится хотя бы один невырожденный цикл (0-цикл или ω -цикл). Любой элемент базиса, не входящий в цикл, может быть единственным образом соединен цепью, состоящей из элементов базиса, с одним и только одним базисным циклом.

Определение. Цепь, состоящая из базисных элементов, соединяющая данный базисный элемент $(i.j)$ с базисным циклом и содержащая последний, называется ведущей цепью элемента $(i.j)$. В случае, когда цепь завершается ω -циклом, последний включается в ведущую цепь в фиксированном направлении обхода. Для элементов вида $(i.0)$, $(0.\pm j)$ ведущая цепь состоит только из них самих. Для элементов ω -цикла ведущей цепью является сам ω -цикл. Если ведущая цепь элемента $(i.j)$ является 1-цепью (2-цепью), то $(i.j)$ называется ведущим элементом 2-индекса j (1-индекса i), обозначается $(i.\bar{j})$ [$(\bar{i}.j)$]; его ведущая цепь называется ведущей цепью 2-индекса j (1-индекса i); сам индекс называется ведущим индексом элемента $(i.j)$. У элементов $(i.0)$, $(0.\pm j)$ ведущим является соответственно 1-индекс i , 2-индекс j . Фиксированность обхода базисного ω -цикла определяет единственным образом ведущие индексы его элементов. Из теоремы 1 и введенных определений следует

Теорема 2. В любом базисе распределительной задачи каждый базисный элемент обладает одной и только одной ведущей цепью; каждый индекс обладает одним и только одним ведущим элементом и одной и только одной ведущей цепью; каждый базисный элемент обладает одним и только одним ведущим индексом. Если каждому индексу поставить в соответствие его ведущий элемент, то получим взаимно однозначное соответствие.

Построение графа. Пронумеруем все элементы базиса номерами $1, 2, \dots, m+n$. Обозначим $N(i.j)$ номер элемента $(i.j)$. Для каждого 1-индекса i и 2-индекса j ($i, j \neq 0$) и элемента $(i.j)$ в процессе построения графа определим сопровождающие номера, или связки $U_i, V_j, S(i.j) = S[N(i.j)]$. Одновременно будем вычислять двойственные оценки (потенциалы) u_i, v_j .

Шаг 1. В граф включаются все 0-циклы базиса: если $(i.0)$ входит в базис, полагаем $U_i = N(i.0)$; $S(i.0) = 0$, $u_i = c_{i0}$; если $(0.j)$ или $(0.-j)$ входит в базис, полагаем $V_j = N(0.\pm j)$, $S(0.\pm j) = 0$, $v_j = M$ или $v_j = -c_{0j}$.

Шаг 2. В граф включаются все ω -циклы базиса.

Пусть (4) ω -цикл базиса и $N_1, N_2, \dots, N_{2k}$ — номера его элементов. Полагаем $S(N_r) = N_{r+1}$ для $r = 1, 2, \dots, 2k-1$, $S(N_{2k}) = N_1$; $U_i = N(\bar{i}.j)$, если $S(i.j) = N(i'.j')$ и $i \neq i'$; $V_j = N(i.\bar{j})$, если $S(i.j) = N(i'.j')$ и $j \neq j'$.

Величины u_i, v_j , где i, j индексы, входящие в ω -цикл, определяются из системы уравнений

$$a_{ij}u_i + v_j = c_{ij} \quad (11)$$

записанной для элементов ω -цикла. Каждый цикл включается в граф как отдельная компонента: 0-цикл как одна вершина; ω -цикл в виде замкнутого контура с $2k$ вершинами; дуги контура направлены от вершины N_r к $S(N_r)$.

В циклах устанавливаются ведущие элементы индексов в соответствии с определением. Для остальных элементов ведущие индексы определяются в процессе построения графа.

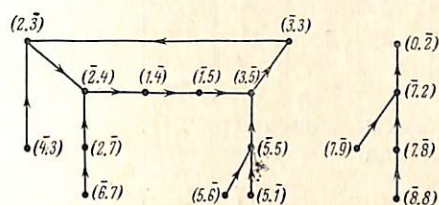


Рис. 1

Шаг 3. (i, j) — базисный элемент, включенный в граф.

1) Пусть имеет место $(\bar{i}, j)$; отыскиваем *все* не включенные в граф элементы базиса вида (i, q) ; полагаем $S(i, q) = N(i, j)$, $V_q = N(i, q)$, $(i, \bar{q})$,

$$v_q = c_{iq} - a_{iq}u_i. \quad (12)$$

Включаем *все* $(i, \bar{q})$ в граф, соединяя их дугами, направленными к вершине $(\bar{i}, j)$.

2) Пусть имеет место $(i, \bar{j})$; отыскиваем *все* не включенные в граф элементы базиса вида (p, j) .

Полагаем $S(p, j) = N(i, j)$, $U_p = N(p, j)$, $(\bar{p}, j)$,

$$u_p = \frac{c_{pj} - v_j}{a_{pj}}. \quad (13)$$

Включаем $(\bar{p}, j)$ в граф, соединяя вершины $(\bar{p}, j)$ дугами, направленными к вершине $(i, \bar{j})$. Процесс заканчивается, когда все элементы базиса будут включены в граф.

Теорема 3. Все элементы базиса включаются в граф. Каждый цикл базиса порождает одну компоненту графа, несвязную с другими. Каждый элемент базиса входит в одну и только одну компоненту графа. Связки $S(\bar{i}, j)$ и $V_j[S(i, j) \cup U_i]$ равны номеру ведущего элемента с ведущим 2-индексом j (1-индексом i).

Теорема 3 следует из теоремы 2 и метода построения графа.

Пример. Пусть в задаче $A(8, 9)$ задан базис.

N	(i, j)	S	a	c	N	(i, j)	S	a	c
1	(5.5)	8	2	12	10	(2.3)	6	2	15
2	(2.7)	6	4	23	11	(8.8)	17	3	9
3	(4.3)	10	5	25	12	(0.2)	0	—	100
4	(1.5)	8	4	14	13	(1.4)	4	7	17
5	(3.3)	10	6	47	14	(6.7)	2	5	28
6	(2.4)	13	5	28	15	(7.9)	7	4	12
7	(7.2)	12	5	10	16	(5.6)	1	6	22
8	(3.5)	5	5	41	17	(7.8)	7	3	15
9	(5.1)	1	4	16					

Связки индексов

i	1	2	3	4	5	6	7	8
U_i	4	6	5	3	1	14	7	11

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9
V_j	9	12	10	13	8	16	2	17	15

Граф состоит из двух компонент (рис. 1).

Для базисного ω -цикла

$$h = \frac{a_{23}a_{14}a_{35}}{a_{24}a_{15}a_{33}} = \frac{2 \cdot 7 \cdot 5}{5 \cdot 4 \cdot 6} = \frac{7}{12}; \quad \lambda = \frac{5}{12}.$$

РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРА $(p \cdot q)$, НЕ ВХОДЯЩЕГО В БАЗИС

Если $p = 0$, то строим только ведущую цепь для 2-индекса q . Обозначим ее через G_q . Если $q = 0$, то строим лишь ведущую цепь для 1-индекса p . Обозначим ее через H_p . Если $p, q \neq 0$, то $(p \cdot q) = a_{pq}(p \cdot 0) + (0 \cdot q)$ и строим обе цепи H_p и G_q .

ПОСТРОЕНИЕ ЦЕПИ H_p И ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ
РАЗЛОЖЕНИЯ ДЛЯ $(p \cdot 0)$ ИЛИ ДЛЯ $a_{pq}(p \cdot 0)$

Шаг 1. Пусть $(p \cdot j)$ такой элемент базиса, что $N(p \cdot j) = U_p$. Включаем $(p \cdot j)$ в H_p . $\gamma_p(i \cdot j)$ — коэффициент разложения при векторе $(i \cdot j)$ в H_p . Если

$$q = 0, j \neq 0, \quad \gamma_p(p \cdot j) = \frac{1}{a_{pj}}; \quad (14)$$

$$q \neq 0, j = 0, \quad \gamma_p(p \cdot j) = a_{pq}; \quad (15)$$

$$q \neq 0, j \neq 0, \quad \gamma_p(p \cdot j) = \frac{a_{pq}}{a_{pj}}. \quad (16)$$

Шаг 2. Если включенный в H_p элемент $(i \cdot j)$ является первым в цепи элементом ω -цикла, то значение $\gamma_p(i \cdot j)$ делится на характеристику цикла λ .

Шаг 3. Если включенный в H_p элемент $(i \cdot j)$ таков, что $S(i \cdot j) = 0$, или с включением в цепь $(i \cdot j)$ все элементы ω -цикла оказываются в цепи, то цепь H_p построена. Иначе переходим к шагу 4.

Шаг 4. Пусть $(i' \cdot j')$ такой элемент базиса, что $N(i' \cdot j') = S(i \cdot j)$, где $(i \cdot j)$ последний из включенных в цепь элементов. Включаем $(i' \cdot j')$ в цепь. Если $i' = 0, j' > 0$

$$\text{или } i \neq 0, j' \neq 0, j' = j, \text{ то } \gamma_p(i' \cdot j') = -\gamma_p(i \cdot j); \quad (17)$$

$$i' = 0, j' < 0, \quad \gamma_p(i' \cdot j') = \gamma_p(i \cdot j); \quad (18)$$

$$i' \neq 0, j' = 0, \quad \gamma_p(i' \cdot j') = -\gamma_p(i \cdot j)a_{ij}; \quad (19)$$

$$i' \neq 0, j' \neq 0, i' = i, \quad \gamma_p(i' \cdot j') = -\gamma_p(i \cdot j) \frac{a_{ij}}{a_{i'j'}}. \quad (20)$$

Переходим к шагу 2.

ПОСТРОЕНИЕ ЦЕПИ G_q И ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ
РАЗЛОЖЕНИЯ ДЛЯ $(0 \cdot q)$

Шаг 1. Пусть $(i \cdot q)$ или $(0 \cdot -q)$ такой элемент базиса, что $N(i \cdot q)$ или $N(0 \cdot -q) = V_q$. Включаем $(i \cdot q)$ или $(0 \cdot -q)$ в G_q .

$$\gamma_q(i \cdot q) = 1, \text{ или } \gamma_q(0 \cdot -q) = -1. \quad (21)$$

Далее повторяются те же шаги, что и в построении цепи H_p . Для получения коэффициентов разложения вектора $(p \cdot q)$ надо сложить коэффициенты разложения для $a_{pq}(p \cdot 0)$ и $(0 \cdot q)$

$$\gamma(i \cdot j) = \gamma_p(i \cdot j) + \gamma_q(i \cdot j). \quad (22)$$

Доказательство формул (14) — (22) приводится в [1, 2].

Пример. Пусть требуется построить цепь для элемента $(5 \cdot 9)$; так как $U_5 = 1$, то цепь H_5 начинается с элемента (5.5) , поскольку $N(5.5) = U_5 = 1$. Пользуясь сопровождающими номерами, последовательно строим цепь H_5

N	$U_5 = 1$	8 *	5	10	6	13	4
H_5	(5.5)	(3.5)	(3.3)	(2.3)	(2.4)	(1.4)	(2.4)
S	8	5	10	6	13	4	8

Звездочкой здесь и далее отмечается первый элемент ω -цикла в цепи. Аналогично строится цепь G_9

N	$V_9 = 15$	7	12
G_9	(7.9)	(7.2)	(0.2)
S	7	12	0

Обычно для построения цепей используется метод вычеркивания, который надо повторять заново для каждого вводимого в базис элемента. Преимущество описанного способа состоит в том, что каждый элемент цепи своим сопровождающим номером единственным образом определяет последующий элемент без необходимости просмотра всей совокупности базисных элементов. Сопровождающие номера играют роль указателей дуг при реализации данного алгоритма на вычислительной машине. Вручную строить цепь удобнее, пользуясь геометрическим изображением графа.

Из метода построения цепей и свойств графа следует

Лемма 1. Каждый элемент цепи, не входящий в ω -цикл, определяет единственным образом всю следующую за ним часть цепи, независимо от того, для какого элемента она строится.

Лемма 2. Каждый индекс, попав впервые в цепь через элемент, не входящий в ω -цикл, определяет единственным образом всю последующую часть цепи.

Лемма 3. Если $(i \cdot j)$ -элемент ω -цикла первым попадает в цепь, то в цепь включается весь ω -цикл в последовательности, соответствующей направлению его обхода.

ИЗМЕНЕНИЕ БАЗИСА, ПЕРЕСТРОЙКА ГРАФА И ПЕРЕСЧЕТ ДВОЙСТВЕННЫХ ОЦЕНОК (q -АЛГОРИТМ)

Исключаем из базиса (r, s)

Шаг 1g. $N(p, q) = N(r, s)$.

Шаг 2g. Если (r, s) принадлежит только цепи H_p и $q \neq 0$, то полагаем $S(p, q) = V_q$; v_q не меняет своего значения,

$$u'_p = \frac{c_{pq} - v_q}{a_{pq}}, \quad (23)$$

если $q = 0$, то $S(p, 0) = 0$, $u'_p = c_{p0}$.

Переходим к шагу 4g.

Если (r, s) принадлежит только цепи G_q и $p = 0$, то полагаем $S(p, q) = U_p$; u_p не меняет своего значения,

$$v'_q = c_{pq} - a_{pq}u_p, \quad (24)$$

если $p = 0$, то $S(0, -q) = 0$, $v'_q = -c_{0q}$.

Переходим к шагу 4g.

Шаг 3g. Если (r, s) принадлежит обоим цепям H_p и G_q , то в базисе возникает новый ω -цикл $(p, q) (p, j) \dots (i, q)$.

Полагаем $S(i, q) = N(p, q)$; $U_i = N(i, q)$;

$$\text{где} \quad u'_i = u_i + \frac{\Delta(p, q)}{\lambda a_{iq}}, \quad (25)$$

$$\Delta(p, q) = a_{pq}u_p + v_q - c_{pq}. \quad (26)$$

Индексная разность $\Delta(p, q)$ исчислена по оценкам прежнего базиса.

Переходим к шагу 5g.

(Обоснование шага 3g см. ниже.)

Шаг 4g. Включаем элемент (p, q) в граф и переходим к шагу 3 построения графа.

Шаг 5g. Включаем элемент (i, q) в граф и переходим к шагу 3 построения графа с дополнительным условием: присоединяя к элементу (p, q) все элементы вида (t, q) , пропускаем (i, q) , который уже присоединен к (p, q) в шаге 3g.

Обоснование шага 3g. Пусть (r, s) принадлежит обоим цепям H_p и G_q ; (i_k, j_k) — первый элемент H_p , встречающийся в G_q ; (i_l, j_l) — первый элемент G_q , встречающийся в H_p .

Лемма 4. Пусть $(i_k, j_k) = (i_l, j_l)$ и пусть цепи H_p и G_q имеют вид $(p, j) \dots (i_1, j_1) (i_2, j_2) (i_k, j_k) \dots$; $(i, q) \dots (i_3, j_3) (i_4, j_4) (i_l, j_l) \dots$, тогда цепь

$$(p, q) (p, j) \dots (i_1, j_1) (i_2, j_2) (i_4, j_4) (i_3, j_3) \dots (i, q) \quad (27)$$

является ω -циклом, вновь появляющимся в базисе.

(i_2, j_2) и (i_4, j_4) не являются элементами ω -цикла в цепях H_p и G_q . Если бы, например, (i_2, j_2) был элементом ω -цикла, то (i_k, j_k) был бы элементом того же цикла, но тогда (i_k, j_k) не может быть первым элементом цепи H_p , встречающимся в G_q .

Рассмотрим сначала случай, когда (i_k, j_k) не является последним элементом цепей H_p и G_q . Следующий за (i_k, j_k) элемент в цепях H_p и G_q один и тот же. Обозначим его (i, j) . Тогда возможны два случая: а) $j_k = j$, тогда $i_2 = i_k$; $j_1 = j_2$; $i_4 = i_k$; $j_3 = j_4$; откуда $j_1 = j_2$; $i_2 = i_k$; $j_4 = j_3$; б) $i_k = i$, тогда $j_2 = j_k$; $i_1 = i_2$; $j_4 = j_k$; $i_3 = i_4$; откуда $i_1 = i_2$; $j_2 = j_k$; $i_3 = i_4$. Следовательно, (27) — цепь, отсутствие символов, встречающихся в (27) более двух раз, обеспечивается леммой 2.

Пусть теперь (i_k, j_k) — последний элемент цепи H_p . Если бы $i_k \neq 0$ и $j_k \neq 0$, то элемент (i_2, j_2) входил бы в ω -цикл. Следовательно, либо $i_k = 0$, либо $j_k = 0$ и (i_l, j_l) также последний элемент в цепи G_q . Случай $j_k = 0$ аналогичен случаю а), случай $i_k = 0$ — случаю б).

Лемма 5. Пусть $(i_k, j_k) \neq (i_l, j_l)$, тогда элементы (i_k, j_k) и (i_l, j_l) входят в один и тот же ω -цикл и являются первыми элементами ω -цикла, попавшими соответственно в H_p и G_q .

По определению (i_l, j_l) попадает в цепь H_p позже элемента (i_k, j_k) , а в цепь G_q , наоборот: (i_k, j_k) попадает позже элемента (i_l, j_l) . Если бы хоть один из них не принадлежал ω -циклу, то это противоречило бы лемме 1. Принадлежность одному и тому же циклу следует из того, что если в цепь попадает элемент ω -цикла, то в цепь включается весь ω -цикл.

Лемма 6. Пусть выполняется условие леммы 5 и цепи имеют вид

$$\begin{aligned} & (p, j) \dots (i_k, j_k) \dots (r, s) \dots \\ & \qquad \qquad \qquad A_p \qquad \qquad B_p \\ & (i, q) \dots (i_l, j_l) \dots (r, s) \dots \\ & \qquad \qquad \qquad A_q \qquad \qquad B_q \end{aligned} \quad (28)$$

Тогда а) либо на A_p — участке цепи H_p между элементами (i_k, j_k) и (r, s) встречается (i_l, j_l) , б) либо (взаимоисключающее) на A_q — участке цепи G_q между элементами (i_l, j_l) и (r, s) встречается (i_k, j_k) .

Если (i_l, j_l) не появляется на участке A_p , то он появляется на B_q , но тогда в силу единственности обхода ω -цикла (i_k, j_k) появляется на участке A_q .

Лемма 7. Пусть имеет место случай а) леммы 6, и цепи имеют вид $(p, j) \dots (i_k, j_k) \dots (i_l, j_l) (i_2, j_2) (i_l, j_l) \dots (r, s) \dots$;

$$[(i, q) \dots (i_3, j_3) (i_4, j_4) (i_l, j_l) \dots (r, s) \dots].$$

Тогда цепь $(p, q) (p, j) \dots (i_k, j_k) \dots (i_2, j_2) (i_4, j_4) \dots (i, q)$ является ω -циклом, вновь появляющимся в базисе.

Лемма 8. Пусть имеет место случай б) леммы 6, и цепи имеют вид $(p, j) \dots (i_l, j_l) (i_2, j_2) (i_k, j_k) \dots (r, s)$; $(i, q) \dots (i_l, j_l) \dots (i_3, j_3) (i_4, j_4) (i_k, j_k) \dots (r, s)$. Тогда цепь $(p, q) (p, j) \dots (i_2, j_2) (i_4, j_4) \dots (i_l, j_l) \dots (i, q)$ является ω -циклом, вновь появившимся в базисе.

Доказательство лемм 7 и 8 аналогично доказательству леммы 4.

Элемент (i_l, j_l) в случае леммы 7, элемент (i_k, j_k) в случае леммы 8 и $(i_k, j_k) = (i_l, j_l)$ в случае леммы 4 будем называть циклогенным.

Лемма 9 Для нового ω -цикла, порожденного исключением из базиса элемента (r, s) , принадлежавшего обоим цепям H_p и G_q .

$$h = -\frac{\gamma_p(r, s)}{\gamma_q(r, s)}; \quad \lambda = \frac{\gamma_p(r, s) + \gamma_q(r, s)}{\gamma_q(r, s)} = \frac{\gamma(r, s)}{\gamma_q(r, s)} \neq 0, \quad (29)$$

г. е. новый ω -цикл невырожден.

Формулы (29) следуют из формул (14) — (22) и (6) — (8).

Расчет двойственных оценок, соответствующих индексам, входящим в новый ω -цикл, требует решения системы вида (11). Оказывается, однако, возможным избежать решения системы благодаря следующему приему.

Пусть

$$(p, q) (p, j) (k, j) \dots (t, l) (i, l) (i, q) \quad (30)$$

новый ω -цикл в базисе и λ его характеристика. Пусть u_i старое значение двойственной оценки 1-индекса i . По формуле (25) вычислим u_i' . Затем, двигаясь последовательно вдоль цепи справа налево, вычисляем значения

двойственных оценок u' и v' по формулам (12) и (13). Заканчивается процесс вычислением

$$v_q' = c_{pq} - u_p' a_{pq}. \quad (31)$$

Лемма 10. *Исходное u_i' и полученное v_q' удовлетворяют уравнению*

$$a_{iq} u_i' + v_q' = c_{iq}. \quad (32)$$

Очевидно, что если u_i и v_j удовлетворяют уравнению

$$a_{ij} u_i + v_j = c_{ij}, \quad (33)$$

то $u_i' = u_i + \alpha$ и $v_j' = v_j - a_{ij} \alpha$ или $v_j' = v_j - \beta$ и

$$u_i' = u_i + \frac{\beta}{a_{ij}} \text{ так-}$$

же удовлетворяют уравнению (33).

Все элементы цепи (30), кроме (p, q) , входили в прежний базис. Начав с элемента (i, l) и значения u_i' (25) и закончив вычислением u_p' из уравнения (33) соответствующего элементу (p, j) , получим

$$u_p' = u_p + \frac{\Delta(p, q)}{\lambda a_{iq}} \frac{a_{kj} \dots a_{il}}{a_{pi} \dots a_{il}}, \quad (34)$$

где u_p — двойственная оценка в прежнем базисе.

$$\begin{aligned} \text{Далее вычисляем } v_q' &= c_{pq} - u_p' a_{pq} = c_{pq} - u_p a_{pq} - \\ &- \frac{\Delta(p, q)}{\lambda} \cdot \frac{a_{pq} a_{kj} \dots a_{il}}{a_{pj} \dots a_{il} a_{iq}} = c_{pq} - u_p a_{pq} - \frac{\Delta(p, q) h}{\lambda} = \\ &= v_q - \Delta(p, q) - \frac{\Delta(p, q) h}{\lambda} = v_q - \frac{\Delta(p, q)}{\lambda}; \end{aligned}$$

где v_q — также двойственная оценка в прежнем базисе.

Значения u_i' и v_q' удовлетворяют уравнению (32), поскольку оценки u_i и v_q в прежнем базисе удовлетворяли уравнению (32).

Пример. Пусть (4.1) вводится в базис; $a_{41} = 5$; $c_{41} = 20$.

N	$U_4 = 3$	10*	6	13	4	8	5
H_4	(4.3)	(2.3)	(2.4)	(1.4)	(1.5)	(3.5)	(3.3)
S	10	6	13	4	8	5	10
$\gamma_4(i, j)$	1	-2,4	0,96	-0,96	1,68	-1,68	1,4

N	$U_1 = 9$	1	8*	5	10	6	13	4
G_1	(5.4)	(5.5)	(3.5)	(3.3)	(2.3)	(2.4)	(1.4)	(1.5)
S	1	8	5	10	6	13	4	8
$\gamma_1(i, j)$	1	-2	4,8	-4	4	-1,6	1,6	-2,8

Исключаем из базиса $(r, s) = (1.4)$. Первый элемент H_p , встречающийся в G_q , $(i_k, j_k) = (2.3)$. Аналогично $(i_l, j_l) = (3.5)$, причем между (3.5) и (1.4) встречается (2.3), т. е. между (i_l, j_l) и (r, s) встречается (i_k, j_k) , следовательно, имеет место случай леммы 8, и элемент $(i_k, j_k) = (2.3)$ является циклогенным.

Образуется новый ω -цикл: (4.1) (4.3) (3.3) (3.5) (5.5) (5.1).

Согласно (29), для него $\lambda = \frac{\gamma_4(1.4) + \gamma_1(1.4)}{\gamma_1(1.4)} = \frac{-0,96 + 1,6}{1,6} = \frac{0,64}{1,6} = 0,4$.

Это можно проверить, вычисляя λ непосредственно по формуле (6)

$$h = \frac{a_{41}a_{33}a_{55}}{a_{43}a_{35}a_{51}} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 2}{5 \cdot 5 \cdot 4} = 0,6; \lambda = 0,4.$$

Двойственные оценки в прежнем базисе имели следующие значения:

i	1	2	3	4	5	6	7	8
u_i	2	5	7	4	3	5	-18	-20

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9
v_j	4	100	5	3	6	4	3	69	84

$$\Delta(4.1) = a_{41}u_i + v_1 - c_{41} = 4 \cdot 5 + 4 - 20 = 4 > 0.$$

Тогда

$$u_5' = u_5 + \frac{\Delta(4.1)}{\lambda a_{51}} = 3 + \frac{4}{0,4 \cdot 4} = 5,5;$$

$$v_5' = c_{55} - a_{55} u_5' = 12 - 5,5 \cdot 2 = 1;$$

$$u_3' = \frac{41 - 1}{5} = 8; v_3' = 47 - 8 \cdot 6 = -1; u_4' = \frac{25 + 1}{5} = 5,2;$$

$$v_1' = 20 - 5,2 \cdot 5 = -6.$$

Проверим уравнение $a_{51}u_5' + v_1' = c_{51}$; $5,5 \cdot 4 - 6 = 16$. Оценки для остальных индексов вычисляются последовательно, в соответствии с шагом 3 построения графа.

Графически видоизменение графа изображено на рис. 2. Прежний граф изображен сплошными стрелками. Элемент, исключенный из базиса (обведен кружком), и его входящие и исходящие дуги удаляются из графа. В новом графе пунктирные стрелки, исходящие из тех же элементов, т. е. некоторые элементы изменили свои связи. Кроме того, часть из них изменила свои ведущие индексы — они показаны в квадратных скобках. Часть элементов сохранила свои связи и ведущие индексы. Можно указать систематическое правило видоизменения графа в связи с изменением базиса.

На основании изложенного алгоритм решения распределительной задачи можно сформулировать следующим образом:

1. Исходное решение: $x_{i0} = a_{i0}$; $x_{0j} = a_{0j}$. Исходная система двойственных оценок $u_i = c_{i0}$; $v_j = M$. Исходный граф состоит из m вершин вида $(i.0)$ и n вершин вида $(0.j)$.

Исходная система номеров $N(i.0) = i$; $N(0.j) = m + j$. Исходная система сопровождающих номеров $S(i.0) = S(0.j) = 0$; $U_i = i$, $V_j = m + j$.

2. Отыскание элемента, вводимого в базис, производится по обычному способу вычисления $\Delta = \max \Delta(i.j) = \Delta(p.q)$, где $\Delta(i.j) = a_{ij}u_i + v_j - c_{ij}$;

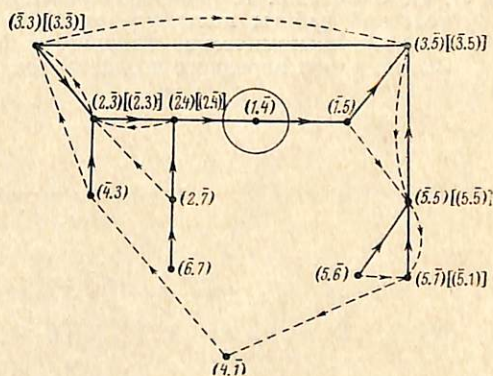


Рис. 2

$\Delta(i,0) = u_i - c_{i0}$; $\Delta(0,-j) = -v_j - c_{0j}$. Если $\Delta \leq 0$, задача решена; если $\Delta > 0$, то (p,q) вводится в базис.

3. Разложение элемента (p,q) по элементам базиса методом построения цепей H_p и G_q и исчисление коэффициентов по формулам (14) — (22).

4. Отыскание элемента, исключаемого из базиса, методом вычисления

$$\theta = \min_{r \geq 0} \frac{a(i,j)}{\gamma(i,j)} = \frac{a(r,s)}{\gamma(r,s)},$$

где $a(i,j)$ — значение базисного неизвестного x_{ij} .

5. Расчет новых значений базисных неизвестных по формулам

$$a'(p,q) = \theta; \quad a'(i,j) = a(i,j) - \theta \gamma(i,j).$$

6. Перестройка графа и пересчет двойственных оценок по g -алгоритму; возврат к шагу 2.

Шаг 3, использующий построение цепей с помощью графа, и шаг 6, использующий g -алгоритм перестройки графа и пересчета двойственных оценок, существенно убыстряют решение распределительной задачи. При этом g -алгоритм использует только шаг 3 построения графа, т. е. избегает необходимости совместно решать систему уравнений (11). Точнее, у нас всегда имеется значение одной неизвестной, определяемое формулой (25), а этого достаточно для последовательного расчета значений остальных неизвестных.

Аналогичное построение можно сделать и для транспортной задачи [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Б. Юдин, Е. Г. Гольштейн. Задачи и методы линейного программирования. М., «Сов. радио», 1964.
2. М. К. Гавурин, Г. Ш. Рубинштейн, С. С. Сурин. Об оптимальном использовании производственных средств при выполнении нескольких видов работ (обобщенная транспортная задача). Сиб. матем. ж., 1962, т. 3, № 4.
3. Л. И. Смоляр. К решению транспортной задачи. К итогам научно-исследовательской работы института за 1968 г. (К конференции 13 февраля — 7 марта 1969 г.). Экономические факультеты. М., 1969 (Моск. ордена Трудового Красного Знамени ин-т народного хозяйства им. Г. В. Плеханова).

Поступила в редакцию
5 VI 1968