

ОПТИМИЗАЦИЯ ТЕХНИКО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

О. Г. АЛЕКСЕЕВ, А. Ф. ИВАНОВ

(Ленинград)

В статье показана возможность использования метода динамического программирования [1, 2] для решения определенного класса оптимальных задач сетевого планирования и управления, связанных с оптимизацией технико-экономических характеристик сложных систем. Задача формулируется следующим образом.

Допустим, элемент системы, которому соответствует дуга i, j , имеет конечное множество $E_{i, j}$ вариантов его технической реализации. Каждый вариант $x_{i, j, r} \in E_{i, j}$, $r = 1, 2, \dots, R_{i, j}$, оценивается величиной $p_{i, j, r}(x_{i, j, r})$ и имеет определенные технико-экономические характеристики $c_{i, j, r}^m(x_{i, j, r})$, $m = 1, 2, \dots, M$, для которых выполняются условия

$$p_{i, j, 1} < p_{i, j, 2} < \dots < p_{i, j, r} < \dots < p_{i, j, R_{i, j}}, \quad (1)$$

$$c_{i, j, r}^m \leq C_m, \quad r = 1, 2, \dots, R_{i, j}, \quad m = 1, 2, \dots, M. \quad (2)$$

Требуется определить оптимальный вариант реализации всей системы, которому соответствует путь, ведущий из начальной нулевой вершины графа в конечную N -ю вершину, при условиях

$$P(C_{0, N}^1, C_{0, N}^2, \dots, C_{0, N}^M) = \max_{\alpha_{k, N}} \sum_{\substack{(i, j) \in \alpha_{k, N} \\ x_{i, j, r} \in E_{i, j}}} p_{i, j, r}(x_{i, j, r}), \quad k = 1, 2, \dots, K_{0, N}; \quad (3)$$

$$C_{0, N}^m = \sum_{\substack{(i, j) \in \alpha_{k, N} \\ x_{i, j, r} \in E_{i, j}}} c_{i, j, r}(x_{i, j, r}) \leq C_m, \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad (4)$$

где $\alpha_{k, N}$ — множество дуг, входящих в k -й путь; $K_{0, N}$ — число путей, идущих из начальной вершины графа в конечную.

Введя следующие обозначения:

$$\begin{aligned} f_{0, n}(C_{0, n}^1, C_{0, n}^2, \dots, C_{0, n}^M) &= \max P_{0, n}(C_{0, n}^1, C_{0, n}^2, \dots, C_{0, n}^M) = \\ &= \max_{\alpha_{k, n}} \sum_{\substack{(i, j) \in \alpha_{k, n} \\ x_{i, j, r} \in E_{i, j}}} p_{i, j, r}(x_{i, j, r}), \quad k = 1, 2, \dots, K_{0, n}; \quad n = 1, 2, \dots, N; \end{aligned}$$

$$0 \leq C_{0, n}^m = \sum_{\substack{(i, j) \in \alpha_{k, n} \\ x_{i, j, r} \in E_{i, j}}} c_{i, j, r}(x_{i, j, r}) \leq C_m, \quad m = 1, 2, \dots, M;$$

$$\begin{aligned} F_{n, N}(C_{n, N}^1, C_{n, N}^2, \dots, C_{n, N}^M) &= \max P_{n, N}(C_{n, N}^1, C_{n, N}^2, \dots, C_{n, N}^M) = \\ &= \max_{\beta_{k, n}} \sum_{\substack{(i, j) \in \beta_{k, n} \\ x_{i, j, r} \in E_{i, j}}} p_{i, j, r}(x_{i, j, r}), \quad k = 1, 2, \dots, K_{n, N}; \quad n = N, N-1, \dots, 2, 1; \end{aligned}$$

$$0 \leq C_{n,N}^m = \sum_{\substack{(i,j) \in \beta_{k,n} \\ x_{i,j,r} \in E_{i,j}}} c_{i,j,r}(x_{i,j,r}), \quad m = 1, 2, \dots, M,$$

на основании принципа оптимальности получим два функциональных уравнения

$$\begin{aligned} f_{0,n}(C_{0,n}^1, C_{0,n}^2, \dots, C_{0,n}^M) &= \max \{f_{0,i}[C_{0,n}^1 - c_{i,n,r}^1(x_{i,n,r}), \dots, \\ C_{0,n}^2 - c_{i,n,r}^2(x_{i,n,r}), \dots, C_{0,n}^M - c_{i,n,r}^M(x_{i,n,r})] + p_{i,n,r}(x_{i,n,r})\}, \\ n &= 1, 2, \dots, N; m = 1, 2, \dots, M; \\ (i,n) &\in U_n^+; \\ x_{i,n,r} &\in E_{i,n}; \\ 0 &\leq C_{0,n}^m \leq C_m; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} F_{n,N}(C_{n,N}^1, C_{n,N}^2, \dots, C_{n,N}^M) &= \max \{F_{i,N}[C_{n,N}^1 - c_{n,i,r}^1(x_{n,i,r}), \dots, \\ C_{n,N}^2 - c_{n,i,r}^2(x_{n,i,r}), \dots, C_{n,N}^M - c_{n,i,r}^M(x_{n,i,r})] + p_{n,i,r}(x_{n,i,r})\}, \\ n &= N-1, N-2, \dots, 1; 0; m = 1, 2, \dots, M; \\ (n,i) &\in U_n^-; \\ x_{n,i,r} &\in E_{n,i}; \\ 0 &\leq C_{n,N}^m \leq C_m, \end{aligned} \quad (6)$$

где $K_{0,n}$ — число путей, ведущих из начальной вершины графа в n -ю вершину; $K_{n,N}$ — число путей, ведущих из n -вершины графа в конечную вершину; $\alpha_{k,n}$ — множество дуг k -го пути, ведущего из начальной вершины в n -ю вершину; $\beta_{k,n}$ — множество дуг K -го пути, ведущего из n -й вершины в конечную вершину; U_n^+ — множество дуг, входящих в n -ю вершину; U_n^- — множество дуг, выходящих из n -й вершины.

Сопряженные функциональные уравнения (5), (6) отличаются лишь направлением порядка решения. Условимся порядок, принятый при решении уравнения (5), считать прямым, а уравнения (6) — обратным.

Решение начинаем с уравнения (5). Так как точное решение этого уравнения получить практически невозможно из-за чрезвычайно большого числа членов оптимальных последовательностей, то задавшись ошибкой аппроксимации $\Delta_{i,n}$ зависимостей $f_{0,n}(C_{0,n}^1, C_{0,n}^2, \dots, C_{0,n}^M)$, параллельно с определением членов зависимостей производим прореживание последовательностей. Пронумеруем члены последовательности $f_{0,n}(C_{0,n}^1, C_{0,n}^2, \dots, C_{0,n}^M)$ таким образом, чтобы выполнялось неравенство $f_{0,n,l} \leq f_{0,n,l+1}$, где $l = 1, 2, \dots, L_{0,n}$ — порядковый номер числа последовательности. Первым членом прореженной последовательности принимаем $f_{0,n1}$. Исключим из последовательности члены, для которых выполняются условия

$$f_{0,n,l} - f_{0,n,1} \leq \Delta_{i,n}, \quad (7)$$

$$c_{0,n,l}^m \geq c_{0,n,1}^m, \quad m = 1, 2, \dots, M. \quad (8)$$

Член, не удовлетворяющий условиям (7), (8) и имеющий наименьший порядковый номер, принимаем в качестве второго члена прореженной последовательности.

Аналогичным образом находим все члены прореженной последовательности, используя условие

$$f_{0,n,l} - f_{0,n,s} \leq \Delta_{i,n}, \quad (9)$$

$$c_{0,n,l}^m \geq c_{0,n,s}^m, \quad l > s, \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad (10)$$

где $s = 1, 2, \dots$ — порядковый номер членов прореженной последовательности.

Так как каждая из оптимальных последовательностей аппроксимируется только частью членов, то общая ошибка определяется выражением

$$\Delta_{0,n} \leq \max_{(i,j) \in a_{k,n}} \sum \Delta_{i,j}, \quad k = 1, 2, \dots, K_{0,n}; \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (11)$$

Полученные в результате решения уравнения (5) прореженные последовательности $f_{0,n}(C_{0,n}^1, C_{0,n}^2, \dots, C_{0,n}^M)$, $n = 1, 2, \dots, N$, условимся называть опорными. Максимальное значение $f_{0,n} = P_1$ соответствует первому приближенному решению, ошибка которого оценивается выражением (11).

Определив опорные последовательности и соответствующие им ошибки аппроксимации, переходим ко второму этапу, на котором решается уравнение (6).

Допустим, что уравнения (5) и (6) решены и определены все члены последовательностей

$$f_{0,n}^*(C_{0,n}^1, C_{0,n}^2, \dots, C_{0,n}^M), \quad n = 1, 2, \dots, N, \\ F_{n,N}^*(C_{n,N}^1, C_{n,N}^2, \dots, C_{n,N}^M), \quad n = N-1; N-2, \dots, 1, 0.$$

Тогда можно записать

$$F_{0,N}^*(C_{0,N}^1, C_{0,N}^2, \dots, C_{0,N}^M) = f_{0,N}^*(C_{0,N}^1, C_{0,N}^2, \dots, C_{0,N}^M) = \\ = \max [F_{n,N}^*(C_{n,N}^1, C_{n,N}^2, \dots, C_{n,N}^M) + \\ + f_{0,n}^*(C_1 - C_{n,N}^1, C_2 - C_{n,N}^2, \dots, C_M - C_{n,N}^M)]. \quad (12)$$

При решении (6) нас интересуют только те варианты, для которых выполняется условие

$$F_{0,N}^*(C_{0,N}^1, C_{0,N}^2, \dots, C_{0,N}^M) > P_1. \quad (13)$$

Из (12) следует, что неравенство (13) можно представить в виде

$$\max [F_{n,N}^*(C_{n,N}^1, C_{n,N}^2, \dots, C_{n,N}^M) + f_{0,n}^*(C_1 - C_{n,N}^1, C_2 - C_{n,N}^2, \dots, C_M - C_{n,N}^M)] > P_1$$

или

$$\max [F_{n,N}^*(C_{n,N}^1, C_{n,N}^2, \dots, C_{n,N}^M) + f_{0,n}^*(C_1 - C_{n,N}^1, C_2 - C_{n,N}^2, \dots, C_M - C_{n,N}^M) + \\ + \Delta_{0,n}] > P_1, \quad (14)$$

так как

$$f_{0,n}^*(C_1 - C_{n,N}^1, C_2 - C_{n,N}^2, \dots, C_M - C_{n,N}^M) \leq \\ \leq f_{0,n}^*(C_1 - C_{n,N}^1, C_2 - C_{n,N}^2, \dots, C_M - C_{n,N}^M) + \Delta_{0,n}.$$

Члены опорных последовательностей $f_{0,n}(C_1 - C_{n,N}^1, C_2 - C_{n,N}^2, \dots, C_M - C_{n,N}^M)$ вычислены при решении уравнения (5), а ошибка определяется выражением (11).

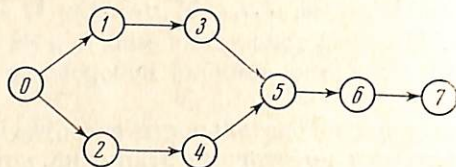
Варианты, удовлетворяющие неравенству (14), удовлетворяют и неравенству

$$F_{n,N}^*(C_{n,N}^1, C_{n,N}^2, \dots, C_{n,N}^M) + f_{0,n}^*(C_1 - C_{n,N}^1, \\ C_2 - C_{n,N}^2, \dots, C_M - C_{n,N}^M) + \Delta_{0,n} > P_1, \quad (15)$$

которое используется для ограничения области поиска при решении уравнения (6). Если в результате точного решения уравнения (6) окажется, что нет ни одного варианта, удовлетворяющего условию (15), то полученное ранее решение является оптимальным.

В том случае, если число членов последовательности $F_{n,N}^*(C_{n,N}^1, C_{n,N}^2, \dots, C_{n,N}^M)$ велико, приходится производить ее прореживание, используя условия, аналогичные условиям (9), (10).

В результате решения уравнения (6) определяем максимальное значение $F_{0,N} = P_2 > P_1$ и новые опорные последовательности $F_{n,N}(C_{n,N}^1, C_{n,N}^2, \dots, C_{n,N}^M)$, число членов которых регулируется величиной ошибки аппроксимации



На следующем этапе решается уравнение (5) при дополнительном условии

$$f_{0,n}^*(C_{0,n}^1, C_{0,n}^2, \dots, C_{0,n}^M) + F_{n,N}(C_1 - C_{0,n}^1, C_2 - C_{0,n}^2, \dots, C_M - C_{0,n}^M) + \Delta_{n,N} > P_2. \quad (16)$$

Вторично решая сопряженные функциональные уравнения (5) и (6) при дополнительных условиях, аналогичных условиям (16) и (15) соответственно, последовательно сужаем область поиска и уменьшаем ошибку аппроксимации до нуля. В результате находим максимальную величину $f_{0,N}^*$ или $F_{0,N}^*$ и соответствующие ему значения $x_{i,j,r} \in E_{i,j}$, определяющие оптимальный вариант системы.

Численный пример. Рассмотрим примечание предлагаемого алгоритма для решения следующего примера. Пусть необходимо определить оптимальную структуру системы, сетевой граф возможной реализации которой представлен на рисунке. Возможные варианты реализации каждого элемента приведены в табл. 1, а допустимые значения $C_1 = 14$, $C_2 = 11$, $C_3 = 12$. Процесс решения начинаем с уравнения

$$f_{0,3}(C_{0,3}^1; C_{0,3}^2; C_{0,3}^3) = \max \{f_{0,1}[C_1 - c_{1,3}^1(x_{1,3}); C_2 - c_{1,3}^2(x_{1,3}); C_3 - c_{1,3}^3(x_{1,3})] + p_{1,3}(x_{1,3})\}, \quad (17)$$

$$\left. \begin{aligned} x_{1,3} &\in E_{1,3}; \\ C_{0,3}^1 &\leq 14, \\ C_{0,3}^2 &\leq 11, \\ C_{0,3}^3 &\leq 12. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

При решении уравнения (17) принимаем ошибку аппроксимации $\Delta_{1,3} = 1$.

Заносим значения $p_{0,1}(x_{0,1})$, $c_{0,1}^1(x_{0,1})$, $c_{0,1}^2(x_{0,1})$, $c_{0,1}^3(x_{0,1})$ в верхний ряд табл. 2, а значения зависимостей $p_{1,3}(x_{1,3})$, $c_{1,3}^1(x_{1,3})$, $c_{1,3}^2(x_{1,3})$, $c_{1,3}^3(x_{1,3})$ в левый столбец той же таблицы. Все члены оптимальной последовательности, полученные в результате решения уравнения (17), приведены в клетках табл. 2, члены прореженной опорной последовательности пронумерованы.

Аналогичным образом вычисляются члены прореженных последовательностей $f_{0,4}(C_{0,4}^1; C_{0,4}^2; C_{0,4}^3)$, $f_{0,5}(C_{0,5}^1; C_{0,5}^2; C_{0,5}^3)$,

$$f_{0,6}(C_{0,6}^1; C_{0,6}^2; C_{0,6}^3), f_{0,7}(C_{0,7}^1; C_{0,7}^2; C_{0,7}^3).$$

Таблица 1

$i-j$	$x_{i,j}$	$p_{i,j}$	$c_{i,j}^1$	$c_{i,j}^2$	$c_{i,j}^3$	$i-j$	$x_{i,j}$	$p_{i,j}$	$c_{i,j}^1$	$c_{i,j}^2$	$c_{i,j}^3$	$i-j$	$x_{i,j}$	$p_{i,j}$	$c_{i,j}^1$	$c_{i,j}^2$	$c_{i,j}^3$
0-1	1	1	1	0	1	1-3	1	4	3	4	3	4-5	1	1	2	1	2
	2	2	2	1	1		2	5	4	4	4		2	4	3	2	2
	3	6	2	2	2		3	9	5	4	4		3	5	3	3	3
	4	7	3	3	3		4	10	5	5	5		4	6	4	3	4
	5	8	3	2	3												
	6	12	4	3	4												
0-2						2-4	1	2	1	3	1	5-6	1	6	2	1	2
							2	3	1	2	2		2	7	3	2	3
							3	6	2	3	2		3	12	3	3	3
	1	4	2	1	0												
	2	5	2	2	1		1	2	0	1	3		1	2	1	1	1
	3	8	2	3	2		2	3	1	2	2		2	3	2	1	3
3-5	4	9	3	2	2	3-5	3	5	2	2	3	6-7	3	4	2	3	3
	5	10	4	4	3		4	10	4	6	4		4	8	3	4	3
							5	11	5	5	4		5	12	4	3	4

Значения опорных последовательностей $f_{0,n}(C_{0,n}^1; C_{0,n}^2; C_{0,n}^3)$, $n = 1, 2, \dots, 6$, приведены в табл. 3. В результате решения получаем, что

$$P_1 = \max f_{0,7} = 37 \text{ при } C_{0,7}^1 = 14; C_{0,7}^2 = 11; C_{0,7}^3 = 12 \\ (x_{6,7} = 5; x_{5,6} = 1; x_{4,5} = 2; x_{2,4} = 3; x_{0,2} = 4).$$

Полученное решение позволяет ввести дополнительное условие $F_{n,7}(C_{n,7}^1; C_{n,7}^2; C_{n,7}^3) + f_{0,n}(14 - C_{n,7}^1; 11 - C_{n,7}^2; 12 - C_{n,7}^3) + \Delta_{0,n} > 37$, $n = 6; 5; 4; 3, 2$, (19)

которое используется при решении сопряженного функционального уравнения

$$F_{5,7}^*(C_{5,7}^1; C_{5,7}^2; C_{5,7}^3) = \max \{F_{6,7}[C_{5,7}^1 - c_{5,6}^1(x_{5,6}); \\ C_{5,7}^2 - c_{5,6}^2(x_{5,6}); C_{5,7}^3 - c_{5,6}^3(x_{5,6})] + p_{5,6}(x_{5,6})\} \dots \quad (20) \\ \left. \begin{aligned} x_{5,6} &\in E_{5,6} \\ C_{5,7}^1 &\leq 14, \\ C_{5,7}^2 &\leq 11, \\ C_{5,7}^3 &\leq 12. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Предварительно определяем члены последовательности $F_{6,7}^*(C_{6,7}^1; C_{6,7}^2; C_{6,7}^3)$ которые удовлетворяют условию (19).

При этом используются опорные последовательности, приведенные в табл. 3. Из пяти членов зависимости $F_{6,7}^*(C_{6,7}^1; C_{6,7}^2; C_{6,7}^3)$ условию (19) удовлетворяет только один ($x_{6,7} = +5$; $F_{6,7}^* = P_{6,7} = 12$; $C_{6,7}^1 = 4$; $C_{6,7}^2 = 3$; $C_{6,7}^3 = 4$). В результате решения уравнения (20) находим, что условию (19) удовлетворяют лишь два члена последовательности $F_{5,7}^*(C_{5,7}^1; C_{5,7}^2; C_{5,7}^3)$, которым соответствуют $F_{5,7}^* = 18$; $C_{5,7}^1 = 6$; $C_{5,7}^2 = 4$; $C_{5,7}^3 = 6$; и $F_{5,7}^* = 24$; $C_{5,7}^1 = 7$; $C_{5,7}^2 = 6$; $C_{5,7}^3 = 7$.

При определении членов последовательностей $F_{3,7}^*(C_{3,7}^1; C_{3,7}^2; C_{3,7}^3)$ и $F_{4,7}^*(C_{4,7}^1; C_{4,7}^2; C_{4,7}^3)$ оказывается, что нет ни одного члена этих последова-

Таблица 2

$p_{1,3}; c_{0,1}^1;$ $c_{0,1}^2; c_{0,1}^3; p_{0,1}$ $c_{1,3}^1; c_{1,3}^2;$ $c_{1,3}^3$	$p_{0,1}$ $c_{0,1}^1; c_{0,1}^2; c_{0,1}^3$					
	1 1; 0; 1;	2 2; 1; 1;	6 2; 2; 2;	7 3; 2; 3;	8 3; 3; 3;	12 4; 3; 4;
4 3; 4; 3;	11 5 3; 4; 4;	6 5; 5; 4;				
5 4; 4; 4;	6 4; 4; 5;					
9 5; 4; 4;	21 10 6; 4; 5;	11 7; 5; 5;	31 15 7; 6; 6;	16 8; 6; 7;	41 17 8; 7; 7;	51 21 9; 7; 8;
10 5; 5; 5;	11 6; 5; 6;		16 7; 7; 7;		18 8; 8; 8;	22 9; 8; 9;

Таблица 3

n	$f_{0, n}$	$C_{0, n}^1$	$C_{0, n}^2$	$C_{0, n}^3$	$\Delta_{0, n}$	n	$f_{0, n}$	$C_{0, n}^1$	$C_{0, n}^2$	$C_{0, n}^3$	$\Delta_{0, n}$						
<table><tr><td>n</td><td>$f_{0, n}$</td><td>$C_{0, n}^1$</td><td>$C_{0, n}^2$</td><td>$C_{0, n}^3$</td><td>$\Delta_{0, n}$</td></tr></table>												n	$f_{0, n}$	$C_{0, n}^1$	$C_{0, n}^2$	$C_{0, n}^3$	$\Delta_{0, n}$
n	$f_{0, n}$	$C_{0, n}^1$	$C_{0, n}^2$	$C_{0, n}^3$	$\Delta_{0, n}$												

тельностью, удовлетворяющих условию (19). Следовательно, полученное ранее решение является оптимальным.

Для ускорения процесса решения и ограничения требований к объему памяти оперативного запоминающего устройства ЭВМ в прореженные последовательности можно включать только L членов (L — заданное исходя из объема памяти ЭВМ число), обеспечивающих максимальное значение левой части неравенства (14). Проверка эффективности этого вычислительного приема показала, что решение, полученное после 2—3 итераций при $M = 5$ и общем числе возможных вариантов 10^6 , отличается от оптимального не более чем на 1—2%. При увеличении числа итераций вероятность получения оптимального решения быстро возрастает. Машинная же реализация приближенного решения по сравнению с точным значительно упрощается.

Таким образом, предложенный алгоритм может быть использован как для точного, так и для приближенного решения задач оптимизации в зависимости от объема вычислений и возможности ЭВМ.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Робертс. Динамическое программирование в процессах химической технологии и методы управления. М., «Мир», 1965.
2. О. Г. Алексеев. Об одной задаче оптимального резервирования. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1967, № 1.

Поступила в редакцию
7 IX 1967