

ЗАМЕТКИ И ПИСЬМА

О МИНИМИЗАЦИИ КАПИТАЛОВЛОЖЕНИЙ ПРИ ЗАДАННОМ СРОКЕ РАЗРАБОТКИ НЕФТЯНОГО МЕСТОРОЖДЕНИЯ

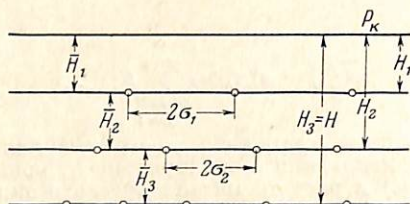
А. В. РОСЛЯКОВ

(Казань)

В работе рассматривается решение задачи минимизации удельных капиталовложений при разработке нефтяных месторождений методом динамического программирования. Близкие по содержанию задачи рассматривались в [1, 2].

Постановка задачи. Имеется полосообразная залежь, причем положения эксплуатационных батарей не фиксировано заранее, а задана лишь общая ширина залежи — H , число эксплуатационных рядов равно трем (см. рисунок).

В каждый данный период работает одна батарея скважин. Режим пласта водонапорный, параметры постоянные, давление на контуре питания P_k .



Обозначим: p_i — затраты на одну скважину i -й батареи; n_i — число скважин в i -й батарее; q_i — искомые дебиты скважин i -й батареи; T_i — продолжительность каждого периода разработки; Q_i — отбор нефти с площади за i -й этап разработки; T — предельный срок разработки залежи; H_i — ширина между i -м ($i-1$)-м рядами.

Задачу минимизации удельных величин капиталовложений можно сформулировать: минимизировать

$$\sum_{i=1}^N \frac{p_i}{Q_i} n_i \quad (1)$$

при

$$q_i \left(\frac{2\pi}{L} H_i n_i + \ln \frac{L}{2\pi r_c n_i} \right) = \frac{2\pi k h}{\mu} \Delta P_i = A_i, \quad (2)$$

$$n_i q_i T_i = Q_i, \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^N Q_i = Q, \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^N T_i \leq T, \quad (5)$$

$$n_i \geq n_0, \quad q_i \geq q_0. \quad (6)$$

$$H_i \geq \frac{L}{2n_i}, \quad \frac{L}{n_i} = 2\sigma_i \geq 2\sigma_{i \min}, \quad (7)$$

где (2) выражает условия, накладываемые на забойные давления, когда ряды работают по одному. Общая величина суммарной добычи нефти Q задана, а

$$H_i = \sum_{k=1}^i \bar{H}_k, \quad \bar{H}_0 = 0, \quad \bar{H}_1 = H_1, \quad H_N = H \quad (\text{см. рисунок}).$$

Кроме того, для каждого ряда считаем заданными величинами $q_0, n_0, 2\sigma_{i \min}$. Преобразования.

$$Q_i = m\beta\gamma h L \bar{H}_i = \alpha \bar{H}_i, \quad (8)$$

где $\alpha = m\beta\gamma h L$, m — пористость; β, γ — соответственно коэффициенты нефтенасыщенности и нефтеотдачи; h — мощность пласта; L — длина залежи.

Рассматриваем вариант, когда p_i являются постоянными для соответствующего ряда.

Введем ряд условий

$$\frac{p_i}{\alpha} \cdot \frac{n_i}{\bar{H}_i} = C_i \frac{n_i}{\bar{H}_i} = g_i(n_i, \bar{H}_i), \quad (9)$$

$$T_i = \psi_i(n_i, \bar{H}_i, H) = \frac{\alpha}{A_i} \bar{H}_i \left(\frac{2\pi}{L} \sum_{k=1}^i \bar{H}_k + \frac{1}{n_i} \ln \frac{L}{2\pi r_c n_i} \right), \quad (10)$$

$$\varphi_i(n_i, H) = \frac{2\pi}{L} n_i \sum_{k=1}^i \bar{H}_k + \ln \frac{L}{2\pi r_c n_i} \leq \frac{A_i}{q_0} = \bar{A}_i. \quad (11)$$

Путем несложных преобразований задача (4) в области (2) — (7) приводится к виду: минимизировать

$$G = g_1(n_1, \bar{H}_1) + \dots + g_N(n_N, \bar{H}_N) \quad (12)$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^N \bar{H}_i = H, \quad (13)$$

$$\sum_{i=1}^N \psi_i(n_i, \bar{H}_i, H) \leq T, \quad (14)$$

$$\varphi_i(n_i, H) \leq \bar{A}_i, \quad n_i \geq n_0, \quad n_i \geq \frac{L}{2\bar{H}_i}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (15)$$

Из условий $n_i \geq L/2\bar{H}_i$, $2\sigma_{i \min} \leq 2\sigma_i = L/n_i$ определяем для каждого ряда $n_{i \max} = L/2\sigma_{i \min}$ и $\min \bar{H}_i = L/2n_{i \max}$. Функции $\varphi_i(n_i, H)$, $\psi_i(n_i, \bar{H}_i, H)$ при фиксированных значениях $\bar{H}_i$ и H являются строго выпуклыми функциями относительно n_i . Поэтому уравнение $\varphi_i(n_i, H) - \bar{A}_i = 0$ имеет два корня $n_i = v_i'(H)$ и $n_i = v_i''(H)$, которые ограничивают предел изменения допустимых значений n_i

$$v_i'(H) \leq n_i \leq v_i''(H).$$

Аналогично получаем ограничения на n_i из решений уравнения

$$\psi_i - \bar{T} = 0, \quad \text{где} \quad \bar{T} = T - \min \sum_{k=1}^{i-1} \psi_k.$$

Соответствующие корни обозначим $\mu_i'(\bar{H}_i, H, T)$ и $\mu_i''(\bar{H}_i, H, T)$.

Метод решения. Минимум функции $G = G(n_1, \dots, n_N; \bar{H}_1, \dots, \bar{H}_N)$ в области, определяемой соотношениями (13) — (15), зависит при фиксированном N от H и T . Следуя [3], вводим последовательность функций $\{\Phi_k(H, T)\}$, которые определяются для $k = 1, 2, \dots, N$

$$\Phi_k(H, T) = \min G(n_1, \dots, n_k; \bar{H}_1, \dots, \bar{H}_k). \quad (16)$$

Рекуррентное соотношение, связывающее $\Phi_k(H, T)$ и $\Phi_{k-1}(H, T)$ при произвольных H, T и k для двумерной задачи динамического программирования, запишется

$$\Phi_k(H, T) = \min_{\{n_k, \bar{H}_k\}} \{g_k(n_k, \bar{H}_k) + \Phi_{k-1}(H - \bar{H}_k, T - \psi_k)\}. \quad (17)$$

Для численного решения задачи необходимо иметь ограничения на $n_k, \bar{H}_k, H$ и T в явном виде.

Используя свойства функций φ_i, ψ_i , а также соотношения (13) — (15), получим

$$H \geq (\min \bar{H}_1 + \min \bar{H}_2 + \dots + \min \bar{H}_k), \quad (18)$$

$$\min \bar{H}_k \leq \bar{H}_k \leq H - \sum_{i=1}^{k-1} \min \bar{H}_i, \quad (19)$$

$$T - \psi_k \geq (\min \psi_1 + \min \psi_2 + \dots + \min \psi_{k-1}), \quad (20)$$

$$n_k' \leq n_k \leq n_k'' \quad (21)$$

$$n_k'(H_k, H, T) = \max \left\{ n_0, \frac{L}{2\bar{H}_k}, v_k'(H), \mu_k'(H_k, H, T) \right\} \quad (22)$$

$$n_k''(H_k, H, T) = \min \left\{ \frac{L}{2\sigma_{k\min}}, v_k''(H), \mu_k''(H_k, H, T) \right\}.$$

Когда наряду с ограничениями вида (13) — (15) имеем еще и $(n_k q_k)^- \leq n_k q_k \leq (n_k q_k)^+$, где $(n_k q_k)^-$ и $(n_k q_k)^+$ задаются для каждого $k = 1, \dots, N$, необходимо добавить ограничения на n_k' и n_k'' при фиксированном H , вытекающие из решения уравнений

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{L} H + \frac{1}{n_k} \ln \frac{L}{2\pi r_c n_k} - \frac{A_k}{(n_k q_k)^-} &= 0 \\ \frac{2\pi}{L} H + \frac{1}{n_k} \ln \frac{1}{2\pi r_c n_k} - \frac{A_k}{(n_k q_k)^+} &= 0. \end{aligned} \quad (23)$$

По той же схеме решаются и задачи с функционалами вида

$$1) G = \sum_{i=1}^N n_i; \quad 2) G = \sum_{i=1}^N \frac{p_i n_i}{Q} \quad \text{и} \quad 3) G = \sum_{i=1}^N p_i n_i.$$

Процесс счета состоит в том, что для каждого $k = 1, 2, \dots, N$, множество возможных состояний $H, T, n_k, \bar{H}_k$ разбивается на дискретные множества с шагами $\Delta H = \delta_1, \Delta T = \delta_2, \Delta n_k = \delta_3^{(k)}, \Delta \bar{H}_k = \delta_4^{(k)}$.

Для любого $k = 1, \dots, N$, выбираем сначала H , используя условие (18). Из (19) получаем ограничения на $\bar{H}_k$.

Фиксируя затем T , переходим к определению границ $n_k'(\bar{H}_k, H, T), n_k''(\bar{H}_k, H, T)$ с помощью соотношений (21), (22).

Выбор шагов и построение соответствующих сетей диктуется в основном получением результатов с определенной точностью, наличием достаточной памяти ЭВМ и ее быстродействием.

В процессе счета на основе рекуррентного соотношения (17) и ограничений (18) — (22) могут понадобиться значения $\Phi_k(H, T)$ для H и T , отличных от точек построенных сетей с выбранными шагами дискретности. В этом случае можно использовать интерполяционные формулы, выбор которых зависит от требуемой точности и времени счета.

В результате расчетов получаются таблицы значений функций $\{\Phi_k(H, T)\}$ и оптимальных величин $\{n_k(H, T)\}, \{\bar{H}_k(H, T)\}$, вычисленных в узлах сетки с шагами δ_1 и δ_2 .

Нестационарная задача. Рассмотрим случай, когда величина капиталовложений, приходящаяся на одну скважину i -го ряда, зависит от времени. Берем для 1-го ряда $p_1 = \text{const}$, что соответствует началу разработки. Для последующих рядов предполагаем, что $p_2 = p_2(T_1), p_3 = p_3(T_1 + T_2)$, где T_i — соответственно продол-

жительность разработки i -го ряда. Ограничения (13) — (15) остаются без изменения, а функции q_i принимают вид

$$q_i = \frac{p_i}{\alpha} \cdot \frac{n_i}{\bar{H}_i} = C_i \frac{n_i}{\bar{H}_i} = C_i \left(\sum_{k=1}^{i-1} T_k \right) \frac{n_i}{\bar{H}_i}. \quad (24)$$

Задача решается с помощью соотношения (18) — (22) и метода последовательных приближений применительно к численным приемам динамического программирования, используемым при решении данной задачи.

Сначала задается множество начальных приближений для T_i в виде $T_i^0 = \{T_i^0\}$.

На основании заданной функциональной зависимости $C_i \left(\sum_{k=1}^{i-1} T_k \right)$ определяем C_i для

выбранного множества $\{T_i^0\}$.

Тем самым задача сводится к варианту постоянных величин p_i для каждого периода разработки. Для дальнейшего решения задачи используем рекуррентное соотношение (17) и ограничения (18) — (22). Получаем множество значений $n_i' = \{n_i'\}$ и $\bar{H}_i' = \{\bar{H}_i'\}$. Используя эти значения n_i и $\bar{H}_i$, находим новые значения $T_i' = \{T_i'\}$. При повторении этого процесса имеем множество значений n_i , $\bar{H}_i$: $n_i = \{n_i^n\}$, $\bar{H}_i = \{\bar{H}_i^n\}$, предельные значения которых являются решением задачи.

Для примера решим конкретную задачу.

Полосообразную залежь необходимо разбурить двумя рядами скважин. Параметры залежи следующие: $H = 1850$ м, $P_k = 180$ атм, $P_{3i}^{(h)} = 125$ атм,

$$A_i = \left(P_k - P_{3i}^{(h)} \right) \frac{2\pi k h}{\mu} = 5971,5; \beta\gamma = 0,75, k = 0,4 \text{ дарси}; \mu = 2 \text{ сП}, h = 10 \text{ м}, m =$$

$$= 0,2, L = 30\,000 \text{ м}, T = 5800 \text{ сут.}, 2\sigma_{i \min} = 250 \text{ м}, i = 1, 2.$$

1. Задача решалась при $p_1 = \text{const}$ и следующих значениях отношений для стационарного варианта: $\bar{p}_2 = \frac{p_2}{p_1} = 0,3; 0,5; 0,7; 0,9$. Представим G в виде

$$G = \frac{p_1}{\alpha} \cdot \left(\frac{n_1}{\bar{H}_1} + \frac{p_2}{p_1} \cdot \frac{n_2}{\bar{H}_2} \right) = \frac{p_1}{\alpha} \cdot \bar{G}.$$

Решив при заданном отношении $\bar{p}_2$, можно легко определить значение G для любого конкретного значения p_1 — стоимости строительства скважин 1-го ряда и коэффициента $\alpha = \text{const}$.

$\bar{p}_2$	$\bar{H}_1^*, \text{ м}$	$\bar{H}_2^*, \text{ м}$	n_1^*	n_2^*	$T_1^*, \text{ сут.}$	$T_2^*, \text{ сут.}$	$\bar{G}$
0,3	945	905	44	74	2560	3240	0,07044
0,5	940	910	48	64	2430	3370	0,08542
0,7	935	915	51	58	2330	3470	0,09877
0,9	930	920	53	56	2210	3590	0,11113

В таблице приведены результаты расчетов для ряда значений $\bar{p}_2$; решение проводилось при $\Delta \bar{H}_i = 10$, $\Delta n_i = 2$.

2. Нестационарный вариант задачи решался для случая изменения затрат на строительство скважин с течением времени, приведенных в [3, 4] по Ромашкинскому месторождению. График функции $p_2 = p_2(T_1)$ представляет собой кусочно-линейную убывающую функцию. Для решения задачи применим метод последовательных приближений; процесс расчета заканчивался при удовлетворении неравенства $|n_i^{j+1} - n_i^j| \leq \varepsilon$, где j — номер приближения, ε — бралось равным 0,1.

Оптимальное решение получилось при $j = 6$ и $\bar{p}_2 = 0,39$; $n_1^+ = 45$; $n_2^+ = 70$; $T_1^+ = 6,9$ года, $T_2^+ = 9$ лет, $\bar{H}_1^+ = 945$ м, $\bar{H}_2^+ = 905$ м.

Выводы. Учет фактора стоимости строительства скважин соответствующего ряда и изменения стоимости с течением времени оказывает значительное влияние как на расположение эксплуатационных рядов, так и на общее количество скважин, а следовательно, и на величину капиталовложений на весь срок разработки залежи для получения определенного количества нефти Q . Необходимую оценку для каждого из вариантов можно получить из таблицы.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Д. Чугунов, Л. Ф. Шатруков. Задача о минимуме числа скважин при заданном сроке разработки залежи. В сб. Тезисы докладов юбилейной научной конференции, посвященной 20-летию института. 1—7 марта 1966 г. Секции механико-математических наук. Казань, 1966 (АН СССР, Казанский физ.-техн. ин-т).
2. А. В. Росляков. Применение метода динамического программирования к одной задаче проектирования разработки нефтяных месторождений. В сб. [1].
3. С. Ф. Коротков. О рациональной последовательности вскрытия нефтяного месторождения. В сб. Теоретические и экспериментальные исследования разработки нефтяных месторождений. Казань, Изд-во Казанского ун-та, 1964.
4. Г. Г. Вахитов, С. А. Султанов, В. М. Ошпитко. Новый этап в разработке Ромашкинского нефтяного месторождения. В сб. Вопросы геологии, разработки нефтяного месторождения, гидродинамики и физики пласта. Л., «Недра», 1965.

Поступила в редакцию
15 II 1968

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДОХОДОВ НАСЕЛЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ОДНОРОДНЫХ ЦЕПЕЙ МАРКОВА

Ю. В. ЗУБРИЛИН

(Москва)

Изменение величины доходов отдельных семей во времени можно рассматривать как определенный стохастический процесс, для которого характерно, что доход семьи в каком-то году зависит от дохода в предшествующем году и от некоторых других факторов. Такой подход использован в [1, 2], где авторы исходят из предположения о неизменности во времени совокупности семей, тогда как в действительности общая совокупность семей изменяется за счет образования новых семей и распада уже имеющихся. Нами был произведен анализ подобного типа моделей и определены возможности их использования в планово-экономических расчетах. Для этого привлекались данные бюджетных обследований одной из союзных республик за пять лет, которые показали изменение распределения семей рабочих и служащих по величине доходов за исследуемый период. В общем виде «перелив» семей из одних доходных групп в другие может быть представлен табл. 1.

Т а б л и ц а 1

Распределение исследуемой совокупности семей по доходным группам

Период t	Период $t+1$						Итого
	1	2	...	j	...	n	
1	K_{11}^{t+1}	K_{12}^{t+1}	...	K_{1j}^{t+1}	...	K_{1n}^{t+1}	K_{1t}
2	K_{21}^{t+1}	K_{22}^{t+1}	...	K_{2j}^{t+1}	...	K_{2n}^{t+1}	K_{2t}
...	...	...	...	...	...	...	...
i	K_{i1}^{t+1}	K_{i2}^{t+1}	...	K_{ij}^{t+1}	...	K_{in}^{t+1}	K_{it}
...	...	...	...	...	...	...	...
n	K_{n1}^{t+1}	K_{n2}^{t+1}	...	K_{nj}^{t+1}	...	K_{nn}^{t+1}	K_{nt}
Итого	K_{1t+1}	K_{2t+1}	...	K_{jt+1}	...	K_{nt+1}	K