ЛИТЕРАТУРА

1. В. Д. Чугунов, Л. Ф. Шатруков. Задача о минимуме числа скважин при заданном сроке разработки залежи. В сб. Тезисы докладов юбилейной научной конференции, посвященной 20-летию института. 1—7 марта 1966 г. Секции механико-математических наук. Казань, 1966 (АН СССР, Казанский физ.-техн. ин-т).
2. А. В. Росляков. Применение метода динамического программирования к одной задаче проектирования разработки нефтяных месторождений. В сб. [1].
3. С. Ф. Коротков. О рациональной последовательности вскрытия нефтяного месторождения. В сб. Теоретические и экспериментальные исследования разработки нефтяных месторождений. Казань, Изд-во Казанского ун-та, 1964.
4. Г. Г. Вахитов, С. А. Султанов, В. М. Ошитко. Новый этап в разработке Ромашкинского нефтяного месторождения. В сб. Вопросы геологии, разработки нефтяного месторождения, гидродинамики и физики пласта. Л., «Недра», 1965.

Поступила в редакцию
15 II 1968

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДОХОДОВ НАСЕЛЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ОДНОРОДНЫХ ЦЕПЕЙ МАРКОВА

Ю. В. ЗУБРИЛИН

(Москва)

Изменение величины доходов отдельных семей во времени можно рассматривать как определенный стохастический процесс, для которого характерно, что доход семьи в каком-то году зависит от дохода в предшествующем году и от некоторых других факторов. Такой подход использован в [1, 2], где авторы исходят из предпосылки о неизменности во времени совокупности семей, тогда как в действительности общая совокупность семей изменяется за счет образования новых семей и распадения уже имеющихся. Нами был произведен анализ подобного типа моделей и определены возможности их использования в планово-экономических расчетах. Для этого привлекались данные бюджетных обследований одной из союзных республик за пять лет, которые показали изменение распределения семей рабочих и служащих по величине доходов за исследуемый период. В общем виде «перелив» семей из одних доходных групп в другие может быть представлен табл. 1.

Таблица 1

Распределение исследуемой совокупности семей по доходным группам

Период t	Период $t+1$						
	1	2	...	j	...	n	Итого
1	K_{11}^{t+1}	K_{12}^{t+1}	...	K_{1j}^{t+1}	...	K_{1n}^{t+1}	K_{1t}
2	K_{21}^{t+1}	K_{22}^{t+1}	...	K_{2j}^{t+1}	...	K_{2n}^{t+1}	K_{2t}
...	...	...	...	...	...	...	...
i	K_{i1}^{t+1}	K_{i2}^{t+1}	...	K_{ij}^{t+1}	...	K_{in}^{t+1}	K_{it}
...	...	...	...	...	...	...	...
n	K_{n1}^{t+1}	K_{n2}^{t+1}	...	K_{nj}^{t+1}	...	K_{nn}^{t+1}	K_{nt}
Итого	K_{1t+1}	K_{2t+1}	...	K_{jt+1}	...	K_{nt+1}	K

Здесь K_{ij}^{t+1} — число семей, которые в период t находились в i-й доходной группе, а в период $t+1$ перешли в j-ю группу доходов; K_{it} — число семей, которые в период t находились в i-й доходной группе; K_{jt+1} — число семей, которые в период $t+1$ оказались в j-й доходной группе.

Последовательно найденные значения K_{jt+1} и будут представлять распределение изучаемой совокупности семей в следующем периоде. Они находятся из уравнения

$$K_{jt+1} = \sum_{i=1}^{n} P_{ij}^{t+1} K_{it}, \tag{1}$$

где P_{ij}^{t+1} — вероятности перехода семей из i-й группы дохода в период t в j-ю группу в период $t+1$, содержащиеся в матрице перехода.

В матрице перехода составными элементами являются переходные вероятности P_{ij}. Для лет t и $t+1$ она имеет вид

$$Mt/t+1 = \begin{Vmatrix} P_{11}^{t+1} & P_{12}^{t+1} & \ldots & P_{1n}^{t+1} \\ P_{21}^{t+1} & P_{22}^{t+1} & \ldots & P_{2n}^{t+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ P_{n1}^{t+1} & P_{n2}^{t+1} & \ldots & P_{nn}^{t+1} \end{Vmatrix}$$

Если предположить, что P_{ij} постоянны во времени, то с помощью модели однородных цепей Маркова, решая уравнение (1), можно видеть, как распределение в период t преобразуется в новое распределение в период $t+1$ для одной и той же совокупности семей.

При исследовании этой модели использовались лишь данные «сквозных» бюджетов, т. е. относящихся к совокупности семей, которые присутствовали весь период обследования. Адекватность модели исследуемому экономическому процессу может быть оценена с помощью так называемых ретроспективных расчетов и сравнения расчетных данных с фактическими. В нашем примере это касается расчетов для 1965 г.

Для проведения такого рода расчетов были сначала получены матрицы вероятностей перехода для периодов последовательно смежных лет: $M_{1961-1962}$, $M_{1962-1963}$, $M_{1963-1964}$, $M_{1964-1965}$. Принимая в качестве исходной предпосылки постоянство вероятностей перехода во времени, определяем усредненную матрицу перехода M' по формуле

$$\bar{P}_{ij}' = \frac{P_{ij}(t_1)\,m_1 + P_{ij}(t_2)\,m_2 + P_{ij}(t_3)\,m_3}{m_1 + m_2 + m_3}, \tag{2}$$

где $\bar{P}_{ij}'$ — вероятность перехода в усредненной матрице M' для одного периода (года); $P_{ij}(t_1)$, $P_{ij}(t_2)$, $P_{ij}(t_3)$ — вероятности перехода в соответствующих матрицах $M_{1961-1962}$, $M_{1962-1963}$, $M_{1963-1964}$; m_1, m_2, m_3 — число сопоставляемых семей за последовательно рассматриваемые периоды.

Рассчитанные элементы вероятностей $\bar{P}_{ij}'$ по приведенной формуле (2) составляют содержание матрицы M'.

Чтобы определить матрицу $M_{1961-1965}$, которая характеризовала бы вероятности перехода семей из i-й группы дохода в j-ю группу за четыре года, необходимо воспользоваться равенством, имеющим силу для однородных цепей Маркова *

$$M_r = (M')^r, \tag{3}$$

где M' — матрица переходных вероятностей P_{ij} для одного этапа (периода); M_r — матрица переходных вероятностей $P_{ij}(r)$ для r этапов (периодов).

Тогда для четырех лет получим

$$M_4 = (M')^4.$$

Имея исходное распределение семей рабочих и служащих по уровню душевого дохода и матрицу переходных вероятностей, находим искомое распределение

$$K_{j1965} = \sum_{i=1}^{n} P_{ij}^4 K_{i1961}. \tag{4}$$

Сравнивая расчетные данные с фактическими, получаем таблицу отклонений.

* Обоснование использования приводимого равенства в [3, стр. 272].

Таблица 2

Отклонения частостей расчетного распределения от частостей фактического распределения за 1965 г.

Группы душевого дохода	1	2	3	4	5	6	7	8
Отклонения, %	+1,8	+4,0	+7,1	−6,8	+1,3	−10,2	+1,5	+1,3

Для оценки данной модели по результатам отклонений фактических данных от расчетных целесообразно использовать известный в математической статистике критерий Колмогорова — Смирнова [4], с помощью которого можно получить представление о допустимых ошибках.

Расчетное значение данного критерия находится по формуле

$$\lambda_{\text{расч}} = D_{s_1 s_2} \sqrt{\frac{s_1 s_2}{s_1 + s_2}}, \tag{5}$$

где $\lambda_{\text{расч}}$ — расчетное значение критерия; Ds_1s_2 — максимальный разрыв между соответствующими накопленными частотами (в долях единицы) расчетного и фактического распределений; s_1 — сумма расчетных частот; s_2 — сумма фактических частот.

Сравнивая найденное значение $\lambda_{\text{расч}}$, равное 0,996, с табличным λ_q при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$, которое составляет 1,358 [4, стр. 290], видим, что наше расчетное значение меньше табличного. Следовательно, расхождения в частостях находятся в пределах случайных колебаний выборок и являются допустимыми, т. е. отклонения эти не настолько значительны, чтобы их можно было объяснить несостоятельностью принятых условий о постоянстве переходных вероятностей и неизменности изучаемой совокупности во времени. Они не превышают границ случайных колебаний двух выборок. Это позволяет в известной мере говорить о теоретической правомерности и практической целесообразности моделирования распределения доходов семей в динамике с помощью однородных цепей Маркова.

Описанная модель может быть усовершенствована путем замены усредненной матрицы M' так называемой «расширенной» матрицей, учитывающей миграцию в данной совокупности семей (т. е. движение вновь образующихся и распадающихся семей). Эта матрица будет иметь вид

$$\left\| \begin{matrix} P_{00}^k & P_{01}^k & P_{02}^k & \cdots & P_{08}^k \\ P_{10}^k & P_{11}^k & P_{12}^k & \cdots & P_{18}^k \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ P_{80}^k & P_{81}^k & P_{82}^k & \cdots & P_{88}^k \end{matrix} \right\|$$

где P_{0j} — доля вновь появившихся в конечном году периода семей, относящаяся к j-й группе душевого дохода; P_{i0} — доля выпавших из обследования семей, относящаяся к i-й группе душевого дохода; k — период обследования между двумя смежными годами. Введение в матрицу вероятностей перехода дополнительных строки и столбца связано с отказом от одного из условий применимости модели однородных цепей Маркова, а именно от условия стабильности изучаемой совокупности семей на протяжении исследуемого периода времени.

Для выяснения состоятельности этой «усовершенствованной» модели проводим аналогичный расчет на 1965 г., определяя усредненную «расширенную» матрицу M''.

Элементы дополнительной строки усредненной «расширенной» матрицы M'' находим по формуле

$$\overline{P}_{0j} = \frac{1}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} (P_{0j}^{(1)} m_1 + P_{0j}^{(2)} m_2 + P_{0j}^{(3)} m_3 + P_{0j}^{(4)} m_4), \tag{6}$$

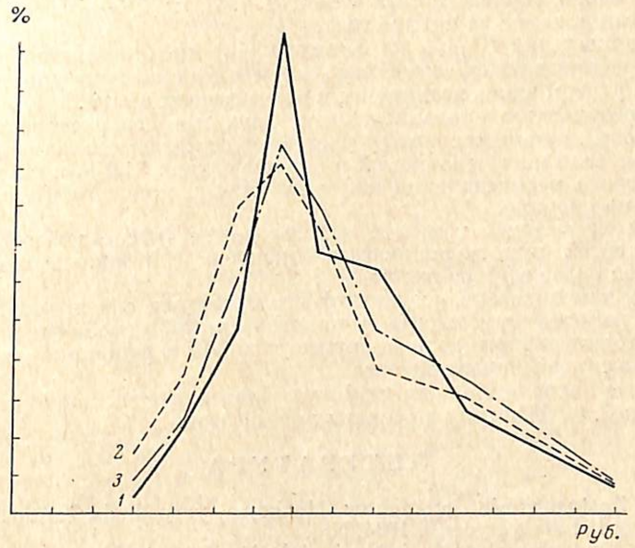
где $\overline{P}_{0j}$, $j = 1, 2, \ldots, 8$, — усредненная доля вновь появившихся семей, относящаяся к j-й группе душевого дохода; m_1, m_2, m_3, m_4 — численность семей, вновь появившихся в конечном году для 1961—1962, 1962—1963, 1963—1964, 1964—1965 гг.;

$P_{0j}^{(1)}$, $P_{0j}^{(2)}$, $P_{0j}^{(3)}$, $P_{0j}^{(4)}$ — доля вновь появившихся семей в конечном году соответствующих периодов, относящаяся к j-й группе душевого дохода.

Элементы дополнительного столбца матрицы M'' отыскиваем по формуле

$$\bar{P}_{i0} = \frac{1}{n_1 + n_2 + n_3 + n_4} (P_{i0}^{(1)} n_1 + P_{i0}^{(2)} n_2 + P_{i0}^{(3)} n_3 + P_{i0}^{(4)} n_4), \quad (7)$$

где $\bar{P}_{i0}$, $i = 1, 2, \ldots, 8$, — усредненная доля исчезнувших из обследования семей из общего числа семей, относящаяся к i-й группе душевого дохода; n_1, n_2, n_3, n_4 — численность обследуемых семей в начальном году следующих периодов: 1961—1962, 1962—1963, 1963—1964, 1964—1965 гг. $P_{i0}^{(1)}$, $P_{i0}^{(2)}$, $P_{i0}^{(3)}$, $P_{i0}^{(4)}$ — доля исчезнувших из обследования семей из общего числа семей в начальном году соответствующего периода,



Распределение семей рабочих и служащих по уровню душевого дохода за 1965 г.: *1* — фактическое; *2* — расчетное по модели однородных цепей Маркова; *3* — то же с учетом преобразования «расширения» матрицы

относящаяся к i-й группе душевого дохода. По формальному определению P_{0j} и P_{i0}, при $i = j = 0$, P_{00} — это доля семей, выпавших из обследования в конце данного года из числа появившихся в этом же году. Очевидно, требования «выпадения» и «присоединения» в пределах одного года являются взаимно исключающими, а потому $P_{00} \equiv 0$ по определению.

Что касается остальных элементов усредненной «расширенной» матрицы M'', то они определяются по формуле

$$\bar{P}_{ij} = \frac{1}{n_1 + n_2 + n_3 + n_4} (P_{ij}^{(1)} n_1 + P_{ij}^{(2)} n_2 + P_{ij}^{(3)} n_3 + P_{ij}^{(4)} n_4), \quad (8)$$

где $\bar{P}_{ij}$ — усредненная вероятность перехода из i-й группы душевого дохода в t-м году в j-ю группу в $t + 1$ году, $P_{ij}^{(1)}$, $P_{ij}^{(2)}$, $P_{ij}^{(3)}$, $P_{ij}^{(4)}$ вероятность перехода из i-й группы душевого дохода в начальном году соответствующего периода в j-ю группу в конечном году этого же периода.

Расчет состоит из двух этапов: определение числа семей, относящихся к j-й группе душевого дохода в 1965 г. с учетом вновь образующихся семей $K_{j\,1965}$; определение числа семей, относящихся к j-й группе душевого дохода в 1965 г. с учетом вновь образовавшихся и исчезнувших из обследования семей $K^*_{j\,1965}$.

На первом этапе расчет ведется по формуле

$$K_{j\,1965} = P_{0j} m^{(4)} + P_{1j} K_{1(1961)} + P_{2j} K_{2(1961)} + \ldots + P_{8j} K_{8(1961)}, \quad (9)$$

где $m^{(4)}$ — общее число семей, присоединившихся за четыре года; $K_{i\,1961}$ — число семей, относящихся к i-й группе душевого дохода в 1961 г., $i = 1, 2, \ldots, 8$.

На втором этапе интересующее нас распределение численности семей находится по формуле

$$\overset{*}{K}_{j1965} = K_{j1965}\alpha^{(4)}, \tag{10}$$

где $\alpha^{(4)}$ — коэффициент, характеризующий отношение численности семей с учетом возникших и исчезнувших семей к численности семей с учетом только возникших.

Этот коэффициент определяется

$$\alpha^{(4)} = \frac{n_1 + m^{(4)} - l^{(4)}}{n_1 + m^{(4)}}, \tag{11}$$

где n_1 — общее число обследованных семей в 1961 г.; $l^{(4)}$ — общее число исчезнувших из обследования семей за четыре года.

Полученные значения $K^*_{j\,1965}$ по формуле (10) представляют собой не что иное, как расчетное распределение семей рабочих и служащих по уровню душевого дохода за 1965 г. с учетом вновь возникших и исчезнувших семей.

Сравнение результатов описанных выше двух методов расчета показали, что во втором случае отклонения расчетных частостей от фактических значительно меньше. (Абсолютная величина отклонений в первом случае 34,0%, а во втором — 23,6%.) Близость расчетного распределения к фактическому, полученного вторым способом, наглядно видна на рисунке.

Напрашивается вывод о том, что использование «расширенной» матрицы переходных вероятностей при моделировании доходов с помощью однородных цепей Маркова является более эффективным.

В целом же, как показали результаты исследования, оба предлагаемые варианта моделирования доходов приемлемы и практически целесообразны прежде всего с аналитической точки зрения, хотя и другие стороны в решении данной задачи также представляют определенный интерес.

В заключение автор выражает глубокую благодарность кандидату физико-математических наук С. А. Айвазяну за советы и замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Kordos. Zastosowanie lancuchow Markowa przy badaniu rozkladu dochodow ludnosci. Przeglad statystyczny, 1964, N 4.
2. S. Ferge. A jövedelemeloszlás időbeli alakulása. Statisztikai szemle, 1964, N 8—9.
3. З. Павловский. Введение в математическую статистику. М., «Статистика», 1967.
4. И. В. Дунин-Барковский, Н. В. Смирнов. Теория вероятностей и математическая статистика в технике. (Общая часть)., М., Гостехиздат, 1955.

Поступила в редакцию
3 I 1969

РЕШЕНИЕ РАСШИРЕННОЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ НЕПОЛНОГО ОБРАЩЕНИЯ МАТРИЦ

А. И. СОТСКОВ

(Москва)

Пользуясь понятием «расширенная система», рассмотрим следующую задачу.

Найти решения X^s, $S = 1, 2, \ldots, t$, t систем линейных уравнений, X^s — Sn-мерных векторов; $Ax^s = b^s$, а также векторы y^s, $S = 1, 2, \ldots, t$, где $y^s = -Cx^s + D$; A — невырожденная матрица n-го порядка; b^s — векторы-столбцы известной матрицы B; C и D — известные матрицы размеров соответственно $(K \times n)$ и $(K \times S)$.

Практически такая система может найти широкое применение. Решение межотраслевых задач или задач балансовых моделей производства начинается с обращения матрицы $(E - a)$, где a — матрица коэффициентов прямых затрат.

Рассмотрим подобную задачу применительно к расширенному варианту.

Пусть имеется матрица $(E - a)$, обозначим ее буквой A, а также матрица C, определяющая затраты ресурсов на единицу изделий, не связанные с употреблением этих изделий «на себя».

Дан план производства товарной продукции завода на ряд плановых периодов, например на несколько месяцев; обозначим матрицу, которой определяется план, через B.