ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ 1970 том VI, вып. 6

БАЛЛЬНОЕ ШКАЛИРОВАНИЕ ПРИЗНАКОВ

Ю. А. ПАТРУГИН

(Москва)

Всякое измерение, как количественное выражение некоторого качества, предполагает, что измеряемый признак, воплощающий в себе данное качество, является упорядоченным. Это означает, что на множестве проявлений или интенсивностей этого признака $X = \{x_i\}$ выявлены бинарные отношения порядка $x_i > x_j$, удовлетворяющие определенным условиям, в частности, условиям антисимметричности и транзитивности [1].

Под измерением в самом общем случае обычно понимается отображение интенсивностей упорядоченного признака на числовое упорядоченное множество. Шкалой признака, следуя [2], будем называть трехкомпонентную систему, включающую множество интенсивностей признака с заданными на нем отношениями порядка, числовое (упорядоченное) множество и функцию, осуществляющую отображение первого множества на второе. При этом в зависимости от характера признака (дискретный или непрерывный), вида использованного отображения (однозначное или неоднозначное) и свойств выбранного числового множества (конечное, счетное или бесконечное) возможны различные типы получаемых шкал.

Так, если признак представляет собой дискретное множество интенсивностей, а числовое множество состоит из целых положительных чисел, то взаимно однозначное отображение первого множества на второе дает в результате натуральную шкалу. Этот случай имеет место при измерении размеров групп однородных предметов, т. е. при счете.

Однако большинство упорядоченных признаков имеет непрерывный характер, а для адекватного отображения непрерывных множеств требуются непрерывные функции. Отображающая функция может быть конструктивно реализована в измерительном приборе в виде таблицы, ставящей в соответствие каждой интенсивности признака его числовое выражение. Эта таблица представляет собой своего рода память, которая, как всякая память, не может иметь бесконечный объем. Поэтому реализовать непрерывное отображение принципиально невозможно, и измерению любого непрерывного признака предшествует его квантование, т. е. выделение каких-то опорных, или реперных, интенсивностей, олицетворяющих все множество интенсивностей данного признака. Очевидно, для числового выражения такого квантованного признака достаточно множества целых или рациональных чисел.

Процесс измерения заключается в последовательном сравнении неизвестной интенсивности с набором прошкалированных опорных интенсивностей и нахождении такой опорной интенсивности, которая меньше всех отличается от измеряемой. Сравнение интенсивностей производится с помощью компаратора — необходимой составной частью любого измерителного прибора, осуществляющего различение и установление бинарных отношений порядка между интенсивностями.

Основная проблема измерения состоит в отыскании такого способа квантования признака, который давал бы в некотором смысле равномерную шкалу, действительно выражающую количественную меру интенсивностей признака.

Произвольное квантование признака приводит к так называемым порядковым шкалам, которые, очевидно, определены с точностью до монотонного преобразования. Наличие у признака одной лишь порядковой шкалы не позволяет выявить количественные связи этого признака с другими, а эти связи проявляют себя лишь на качественном уровне типа «чем больше (меньше) А, тем больше (меньше) Б». Поэтому порядковая шкала, строго говоря, не является количественной, так как она выражает не количество (в смысле ответа на вопрос «сколько?»), а лишь ранжированную последовательность качеств (интенсивностей признака), каждое из которых определено лишь своим местом в этой упорядоченной последовательности.

Специальный класс непрерывных признаков составляют аддитивные признаки, т. е. такие, для которых определена операция натурального сложения, позволяющая из двух любых его интенсивностей x_i и x_j получить некоторую третью $x_k > \max\{x_i, x_j\}$ и удовлетворяющая условию

$$\varphi(x_k) = \varphi(x_i) + \varphi(x_j), \tag{1}$$

где $\varphi(x_s)$ — числовой образ интенсивности x_s. Квантование и получение числовых образов предположительно аддитивного признака, т. е. построение его шкалы, состоит в следующем. Берется произвольная интенсивность x_1 и путем сравнения отыскивается равная ей — x_1'. Обеим этим интенсивностям ставится в соответствие число $\varphi(x_1) = \varphi(x_1') = 1$. В результате операции, гипотетически принятой в качестве операции натурального сложения, исходя из интенсивностей x_1 и x_1', находится интенсивность x_2, которой приписывается значение $\varphi(x_2) = 2$. Последовательное применение операции натурального сложения $x_3 = x_2 \oplus x_1$, $x_4 = x_3 \oplus x_1, \ldots, x_r = x_{r-1} \oplus x_1$ и т. д. дает возрастающую последовательность интенсивностей x_r, которой взаимно однозначно соответствует последовательность натуральных чисел $\varphi(x_r) = r$. Если теперь для любой тройки интенсивностей, связанных соотношением $x_i \oplus x_j = x_k$, выполняется условие (1), то операция $\oplus$ действительно является операцией натурального сложения, а признак $X = \{x_i\}$ — аддитивным. Интенсивность x_1 называется в этом случае единицей квантования или единицей измерения, а последовательность пар $\{x_i, i\}$ представляет искомую шкалу рассматриваемого признака. Поскольку интенсивность x_1 выбрана произвольно, то последовательность пар $\{y_i, i\}$ с другой единицей измерения y_1 также будет шкалой этого признака, равноценной первой. Если соотношение между единицами равно $k_1x_1 = k_2y_1$, где k_1 и k_2 — целые числа, то одна и та же интенсивность x_i будет выражаться в этих шкалах соответственно числами i и $(k_2/k_1)i$. Это означает, что данная шкала определена с точностью до произвольного множителя, и такая шкала называется шкалой отношений.

Шкала отношений так же, как и натуральная, является количественной, поскольку она указывает, сколько фиксированных единичных интенсивностей содержится в измеряемой интенсивности.

Хотя в качестве единичной может быть выбрана любая интенсивность, она не может быть сколь угодно малой из-за ограниченной чувствительности компаратора. Наименьшую интенсивность, которую компаратор с уверенностью отличает от нулевой, будем называть разрешающим интервалом компаратора. Конечная разрешающая способность компаратора приводит к тому, что отношения порядка между сравниваемыми интенсивностями могут быть установлены с уверенностью лишь тогда, когда различие между ними достаточно велико. Если же это различие недостаточно, то показания компаратора теряют определенность, а устанавливаемые им отношения порядка приобретают случайный характер и подчиняются вероятностным законам. Это означает, что при многократном сравнении двух совершенно неразличимых интенсивностей относительная частота каждого из отношений порядка будет стремиться к 0,5. При увеличении различия между сравниваемыми интенсивностями эта частота будет отклоняться от 0,5 и стремиться к 1 для превалирующей интенсивности. Поэтому для интенсивностей x_i и x_j, лежащих в пределах разрешающего интервала компаратора Δ, имеет смысл говорить не об отношениях порядка $x_i > x_j$, а о вероятности этих отношений $P(x_i > x_j)$. Величину разрешающего интервала компаратора можно определить как такое различие между двумя интенсивностями, которое компаратор «улавливает» с некоторой наперед заданной вероятностью, близкой к 1. Условимся относить величину разрешающего интервала к меньшей из двух сравниваемых интенсивностей. Случай, когда вероятности $P(x_i > x_j)$ равны 0 или 1, означает, что различие между интенсивностями превышает разрешающий интервал компаратора и последний в состоянии установить между ними строгие отношения порядка. Множество, между любыми двумя элементами которого существуют вероятностные отношения порядка $0 \leqslant P(x_i > x_j) \leqslant 1$, можно назвать упорядоченным по вероятности. Потребуем, чтобы для такого множества выполнялись условия

$$P(x_i > x_i) = 0{,}5, \tag{2}$$

$$P(x_i > x_j) = 1 - P(x_j > x_i), \tag{3}$$

$$P(x_i > x_j) \geqslant 0{,}5 \wedge P(x_j > x_k) \geqslant 0{,}5 \Rightarrow P(x_i > x_k) \geqslant \\ \geqslant \max\{P(x_i > x_j),\ P(x_j > x_k)\}. \tag{4}$$

Они могут быть названы соответственно условиями вероятностной рефлексивности, антисимметричности и транзитивности.

Рассмотрим случайное отображение множества интенсивностей признака $X = \{x_i\}$ на числовую ось R, которое осуществляется с помощью случайной функции $r = \psi(x)$. При таком отображении каждой интенсивности $x \in X$ ставится в соответствие некоторое подмножество $R(x) \subseteq R$ с заданным на нем распределением вероятностей $\Phi(r, x)$, $r \in R(x)$. Очевидно, обратное отображение $x = \psi^{-1}(r)$ также будет случайным, поскольку каждому значению r соответствует свое подмножество реализаций случайной функции $\psi(x)$, порожденных различными $x \in X$. Будем называть такое взаимно случайное отображение множеств друг на друга стохоморфизмом. Легко показать, что для случая нормальной функции распределения $\Phi(r, x)$ вероятности отношений порядка $P(x_i > x_j)$ связаны монотонной зависимостью с разностью математических ожиданий $\bar{r}_i - \bar{r}_j$ распределений $\Phi(r, x_i)$ и $\Phi(r, x_j)$ и эта связь выражается

$$P(x_i > x_j) = \frac{1}{2}\left[1 - \overline{\Phi}\left(\frac{|r_i - r_j|}{\sqrt{2}\sqrt{\sigma_i^2 + \sigma_j^2}}\right)\right], \tag{5}$$

где

$$\overline{\Phi}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-t^2}\,dt. \tag{6}$$

Это соотношение следует из того факта, что разность двух нормально распределенных величин $r_i = \psi(x_i)$ и $r_j = \psi(x_j)$ также распределена нормально с параметрами $\bar{r}_i - \bar{r}_j$ и $\sqrt{\sigma_i^2 + \sigma_j^2}$ и исходя из условия $P(x_i > x_j) = P(r_i - r_j > 0)$. Формула (5) показывает, что вероятность $P(x_i > x_j)$ характеризует «расстояние» между x_i и x_j, причем при изменении x_i от $-\infty$ до $x_i = x_j$ вероятность $P(x_i > x_j)$ будет возрастать от 0 до 0,5, а при изменении x_i от $x_i = x_j$ до $+\infty$ — от 0,5 до 1.

Соотношение (5) позволяет на основании вероятностей $P(x_i > x_j)$, получаемых эмпирическим путем, определить ожидаемые образы $\bar{r}_i$ интенсивностей x_i, если известны величины σ_i^2, или при известных $\bar{r}_i$ определить дисперсии σ_i^2. Второй случай имеет место для аддитивных признаков, для которых ожидаемые образы $\bar{r}_i$ находятся конструктивно с помощью операции натурального сложения и фиксированной единицы измерения, и дисперсия σ_i^2, таким образом, выражается в единицах этой единицы измерения.

Для неаддитивных признаков никакого независимого способа задания фиксированной единицы измерения не существует, и поэтому квантование таких признаков обычно производится через одинаково различимые интервалы интенсивностей, т. е. с помощью разрешающего интервала компаратора, принятого за единицу. Но, как следует из (5), это означает, что дисперсия σ_i^2 равна в этом случае константе для всех интенсивностей признака, и, следовательно, получаемая шкала обладает постоянной собственной погрешностью и является не чем иным, как довольно широко распространенной балльной шкалой. В балльных шкалах выражаются такие физические величины, как температура, твердость тел, сила волн и ветра и др., а также большинство признаков психологического и социального характера, среди которых наиболее известны шкалы высоты звука в музыке, успеваемости учащихся, тяжести преступлений (уголовный кодекс), успешности некоторых спортивных выступлений (игры, гимнастика и т. п.) и некоторых других признаков. Многие из этих шкал пока не формализованы, т. е для них отсутствуют четко сформулированные реперные интенсивности, отстоящие друг от друга на один балл, и поэтому измерение таких признаков часто производится с помощью группы экспертов, которые и выносят решение большинством голосов.

Однако квантование признака с помощью разрешающего интервала компаратора вовсе не означает, что этот интервал постоянен и не зависит от интенсивности. Для него просто не существует независимой системы отсчета и он сам формирует такую систему, выступая в качестве единицы измерения. Поэтому введем некоторую эталонную шкалу R, в которой можно выражать величину разрешающего интервала компаратора.

Эту шкалу можно представить как такую шкалу, в которой мог бы быть выражен данный признак, если бы вдруг обнаружилось, что на самом деле он является аддитивным или может быть выражен через другие аддитивные признаки. Пусть зависимость $\Delta = f(R)$ показывает изменение разрешающего интервала компаратора Δ вдоль шкалы R. Тогда можно записать

$$\begin{aligned}
&\text{Балл } 0\ R_0 = 0,\\
&\text{Балл } 1\ R_1 = \Delta_0 = f(0),\\
&\text{Балл } 2\ R_2 = R_1 + \Delta_1 = f(0) + f(R_1) = f(0) + f[f(0)],\\
&\text{Балл } 3\ R_3 = R_2 + \Delta_2 = f(0) + f[f(0)] + f\{f(0) + f[f(0)]\},\\
&\text{Балл } s\ R_s = R_{s-1} + \Delta_{s-1} = f(0) + f[f(0)] + \ldots f\{f(0) + f[f(0)] + \ldots\}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Если бы нам удалось каким-либо образом определить зависимость $\Delta = f(R)$, то с помощью (7) можно было бы осуществлять переход от балльной шкалы к эталонной и обратно. Из (5) следует, что разрешающий интервал компаратора в точке x_j, равный $\bar{r}_i - \bar{r}_j$ при некоторой фиксированной, близкой к 1 вероятности квантования $\bar{P}(x_i > x_j)$, связан с дисперсиями в начальной и конечной точке этого интервала соотношением вида

$$\Delta = \bar{r}_i - \bar{r}_j = k\sqrt{\sigma_i^2 + \sigma_j^2}, \tag{8}$$

где k зависит от вероятности квантования $\bar{P}(x_i > x_j)$. Попытаемся теперь найти зависимость $\sigma^2 = F(R)$. Потребуем, чтобы разности ожидаемых образов $\bar{r}_i - \bar{r}_j$ удовлетворяли правилу сложения отрезков

$$(\bar{r}_i - \bar{r}_j) + (\bar{r}_j - \bar{r}_k) = (\bar{r}_i - \bar{r}_k). \tag{9}$$

Предположим, что мы имеем достаточно представительную выборку интенсивностей рассматриваемого признака и нам известен полный набор вероятностей $P(x_i > x_j)$ для всех пар (x_i, x_j) из этой выборки.

Выберем четыре интенсивности x_i, x_j, x_k и x_l, для которых все $P(x_s > x_t) < 1$, и запишем для них четыре условия типа (9), из которых независимыми будут только три. Принимая во внимание соотношение

$$\bar{r}_i - \bar{r}_j = k_{ij}\sqrt{\sigma_i^2 + \sigma_j^2} = -k_{ji}\sqrt{\sigma_j^2 + \sigma_i^2}, \tag{10}$$

эти условия будут иметь вид

$$\begin{aligned}
&k_{ij}\sqrt{\sigma_i^2 + \sigma_j^2} + k_{jk}\sqrt{\sigma_j^2 + \sigma_k^2} + k_{ki}\sqrt{\sigma_k^2 + \sigma_i^2} = 0,\\
&k_{ij}\sqrt{\sigma_i^2 + \sigma_j^2} + k_{jl}\sqrt{\sigma_j^2 + \sigma_l^2} + k_{li}\sqrt{\sigma_l^2 + \sigma_i^2} = 0,\\
&k_{jk}\sqrt{\sigma_j^2 + \sigma_k^2} + k_{kl}\sqrt{\sigma_k^2 + \sigma_l^2} + k_{lj}\sqrt{\sigma_l^2 + \sigma_j^2} = 0.
\end{aligned} \tag{11}$$

Система (11) содержит четыре неизвестных σ_i^2, σ_j^2, σ_l^2 и σ_k^2. Зададимся единицей измерения, положив, например, $\sigma_i^2 = 1$. Тогда, в случае существования у нелинейной системы (11) решения, могут быть найдены остальные неизвестные, которые будут выражены в единицах σ_i^2. Составляя последовательно для аналогичных четырех интенсивностей системы уравнений типа (9), куда входила бы хоть одна определенная ранее величина σ_r^2, можно найти σ_j^2 для всех x_j. После этого из (10) определяются последовательно все ожидаемые образы $\bar{r}_j$, если зафиксировать начало отсчета, приняв, например, $\bar{r}_i = 0$. Сдвинув затем всю шкалу так, чтобы все $\bar{r}_j$ были положительны, положив для этого $\min\limits_j \{\bar{r}_j\} = 0$, можно, используя полученные пары $(\sigma_j^2, \bar{r}_j)$, найти аналитическую аппроксимацию $\sigma^2 = F(R)$. С помощью (8) нетрудно получить соотношение $\Delta = f(R)$ и, используя рекуррентную процедуру (4), найти зависимость между балльной и эталонной шкалами $R = L(s)$.

Описанный способ нахождения зависимости между балльной и эталонной шкалами основан на предположении о нормальности отображения $\psi(x)$ и справедливости (5). Отсутствие такого предположения принципиально не позволяет однозначно осуществлять переход от балльной шкалы к эталонной без введения дополнительных ограничений. Возникает вопрос: зачем вообще переходить от одной шкалы к другой и нельзя ли ограничиться для неаддитивных признаков одной балльной шкалой или какой-либо ее разновидностью? Ответ будет отрицательным, если мы не ограничим задачу измерения простой сравнительной оценкой признаков, а будем стремиться найти количественные зависимости между различными признаками, моделировать сложные процессы и формулировать строгие законы. Дело в том, что все балльные шкалы имеют свои собственные законы арифметики, а следовательно, и всей математики, отличные от привычных законов, справедливых лишь для шкал, пропорциональных эталонной шкале R. А различных балльных шкал, даже единообразно построенных, столько, сколько независимых признаков вследствие различной чувствительности компаратора к каждому признаку. Отсюда очевидна необходимость перехода к единой эталонной шкале с раз и навсегда установленными законами математики.

Для иллюстрации сказанного рассмотрим простейший случай балльной шкалы, когда величина разрешающего интервала компаратора изменяется линейно вдоль шкалы

$$\Delta = f(R) = \alpha + \beta R. \tag{12}$$

Рекуррентные соотношения (7) примут в этом случае вид

$$\begin{gathered} R_0 = 0, \\ R_1 = \alpha, \\ R_2 = \alpha + \alpha + \beta R_1 = \alpha[1 + (1 + \beta)], \\ R_3 = \alpha[1 + (1 + \beta)] + \alpha + \beta\alpha[1 + (1 + \beta)] = \\ = \alpha[1 + (1 + \beta) + (1 + \beta)^2], \end{gathered} \tag{13}$$

$$R_s = \alpha\,[1 + (1 + \beta) + (1 + \beta)^2 + \cdots (1 + \beta)^{s-1}] = \alpha\left[\frac{(1 + \beta)^s - 1}{\beta}\right],$$

а обратная зависимость

$$s = \frac{\lg\left(1 + \frac{\beta R}{\alpha}\right)}{\lg(1 + \beta)}. \tag{14}$$

Если же рассматривать только целочисленные баллы, то

$$s = E\left[\frac{\lg\left(1 + \frac{\beta R}{\alpha}\right)}{\lg(1 + \beta)}\right], \tag{15}$$

где $E[z]$ — целая часть числа z.

Как легко можно заметить, для балльных шкал действительно нарушаются основные законы арифметики, так как

$$s_1 + s_2 \neq E\left[\frac{\lg\left\{1 + \frac{\beta(R_1 + R_2)}{\alpha}\right\}}{\lg(1 + \beta)}\right], \tag{16}$$

$$s_1 \cdot s_2 \neq E\left[\frac{\lg\left\{1 + \frac{\beta(R_1 \cdot R_2)}{\alpha}\right\}}{\lg(1 + \beta)}\right]. \tag{17}$$

Отсюда следует, что например, такие операции, как усреднение балльных оценок, определение различных корреляционных зависимостей и даже простое их суммирование ($2 + 2 \neq 3 + 1$ (!)), не являются правомерными. Конечно, ошибка не всегда может быть существенной (и при замедлении роста функции $\Delta = f(R)$ она стремится к ошибке, присущей самой эталонной шкале), но чтобы судить о ней, необходимо перейти от балльной шкалы к эталонной, произвести все необходимые математические операции в эталонной шкале и окончательный результат обратно перевести в балльную.

То, что при построении балльных шкал для квантования признака действительно используется разрешающий интервал компаратора, наглядно иллюстрирует 12-балльная шкала силы ветра, разработанная в 1805 г. Бофортом. Там в качестве опорных интенсивностей были использованы наблюдаемые проявления ветра (шелест листьев, гул проводов и т. д.).

После того как в 1964 г. международным соглашением был принят перевод этой шкалы в скорость ветра, измеряемую в *м/сек*, оказалось возможным не только найти зависимость ширины балла от абсолютной интенсивности $\Delta = F(R)$, но и показать, что квантование этой шкалы было интуитивно произведено Бофортом в соответствии с принципом постоянства вероятностных отношений порядка между соседними квантуемыми интенсивностями, т. е. посредством неявного использования идеи разрешающего интервала компаратора. Это следует из того факта, что все величины k_{ij}, определяемые из формулы (10) посредством подстановки $\Delta_i = R_{i+1} - R_i = a\sigma_i$, приблизительно равны между собой

$$\frac{R_{i+1} - R_i}{\sqrt{(R_{i+2} - R_{i+1})^2 + (R_{i+1} - R_i)^2}} = k_{i+1,\, i}, \qquad (18)$$

где R_i — скорость ветра в *м/сек* для i-го балла и $k_{i+1,\,i}$ — величина, входящая в (10) и связанная с вероятностью $P(x_{i+1} > x_i)$. Поскольку зависимость между интервалом квантования $\Delta_i = R_{i+1} - R_i$ и дисперсией распределения σ_i^2 нам неизвестна и мы предполагаем лишь, что она имеет вид

$$\Delta = \alpha\sigma, \qquad (19)$$

то и величины $k_{i+1,\,i}$ могут быть определены из (18) также лишь с точностью до множителя a. Поэтому определить саму вероятность квантования из имеющихся данных невозможно. Мы можем утверждать лишь то, что она действительно может быть использована и используется при практическом построении балльных шкал.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Фор, А. Кофман, М. Дени-Папен. Современная математика. М., «Мир», 1966.
2. Психологические измерения. Сборник. М., «Мир», 1967.

Поступила в редакцию
7 V 1970