ЭКОНОМИКА 1970
И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ том VI, вып. 6

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КАЛЕНДАРНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ СЕРИЙНОГО ПРОИЗВОДСТВА

Н. И. ВЕДУТА, В. А. САФРОНЕНКО

(Минск)

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ, ТЕРМИНОЛОГИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Рассматривается серийный производственный участок, на оборудовании которого производится обработка деталей нескольких наименований, поступающих по окончании обработки с заданным темпом в поток, например, на сборочный конвейер.

Участок состоит из нескольких однооперационных групп станков, расположенных последовательно одна за другой в соответствии с заданным технологическим маршрутом обработки деталей. Характерно для каждой группы то, что, во-первых, она состоит из одного или нескольких идентичных станков, а, во-вторых, допускается обработка любой из закрепленных за данной группой деталей на любом из составляющих ее станков.

В каждый данный момент времени на одном станке группы может выполняться лишь одна из закрепленных за ней операций. Переналадка станка с одной операции на другую происходит не моментально, а требует определенных затрат времени и средств.

После прохождения очередной операции деталь поступает на дальнейшую обработку или в межоперационный задел незавершенного производства, если все станки, на которых может выполняться следующая операция, окажутся в данный момент занятыми. При этом происходит «замораживание» средств, что порождает издержки производства, величина которых тем выше, чем больше деталей находится в заделе, чем они дороже и чем дольше время пролеживания.

Задача сводится к тому, чтобы построить такой календарный график обработки деталей, который позволил бы свести к минимуму издержки производства, в которые включаются издержки, обусловленные пролеживанием межоперационного оборотного задела, и затраты, связанные с проведением переналадок станков, при условии обеспечения заданного темпа поступления деталей на сборочный конвейер.

В данной задаче не рассматриваются затраты на выполнение деталеопераций, на транспортировку предметов труда, потери от непроизводительных простоев оборудования и от связывания оборотных средств в технологическом заделе. Предполагается, что решение всей задачи в целом разбивается на отдельные этапы, и первый из них, на котором определяется закрепление деталей за оборудованием и учитываются указанные выше затраты, уже выполнен [1].

Обозначим через $\overline{N} = \{1, 2, \ldots, N\}$ множество индексов групп станков, составляющих серийный участок. Индексы присвоены группам в порядке, обратном технологической последовательности операций. Поэтому индекс «1» присвоен группе, на станках которой осуществляется последняя операция обработки деталей. При этом некоторые из закрепленных за участком деталей могут поступать на конвейер (индекс «0»), минуя обработку на станках некоторых групп.

Введем следующие обозначения.

m_p — количество станков в p-й группе, $p \in \overline{N}$; $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ — множество индексов деталей, обрабатываемых на участке; I_p — подмножество множества I, состоящее из индексов тех деталей, которые закреплены за p-й группой станков, $p \in \overline{N}$; V_{i0} — заданный темп поступления i-й детали на конвейер, $i \in I$; V_{ip} — производительность станка p-й группы по i-й детали, $i \in I_p$, $p \in \overline{N}$; $\tau_{ij}{}^p$ — время, затрачиваемое на переналадку станка p-й группы при переходе с обработки i-й детали на обработку j-й детали, $i, j \in I_p$, $p \in \overline{N}$.

В общем случае для станков p-й группы имеем квадратную матрицу переналадок $\tau^p = (\tau_{ij}{}^p)$ с положительными элементами, для которой условно принято $\tau_{ii}{}^p = \infty$ (исключается переналадка с i-й на ту же i-ю деталь). Размер матрицы τ^p определяется количеством наименований деталей, закрепленных за p-й группой станков.

α_p — затраты, приходящиеся на единицу времени переналадочных работ для p-й группы станков, $p \in \overline{N}$; $Z_{ip}(t)$ — мгновенное значение величины задела в момент времени t — количество штук i-й детали, находящееся в заделе после обработки на станках p-й группы, $i \in I_p$, $p \in \overline{N}$; β_{ip} — коэффициент потерь от пролеживания задела; $\overline{Z}_{ip}$ — приведенная оценка потерь для одной штуки i-й детали, прошедшей обработку на станках p-й группы, $i \in I_p$, $p \in \overline{N}$; $I_p{}^н$ — подмножество множества I_p, состоящее из индексов тех деталей, на которые распространяется ограничение на максимально допустимый размер партии запуска деталей в обработку, что может быть обусловлено рядом производственных соображений, например, стойкостью инструмента, ограниченностью площадей для складирования, $p \in \overline{N}$; $H_i{}^p$ — максимально допустимый размер партии для i-й детали при обработке ее на станках p-й группы, $i \in I_p{}^н$, $p \in \overline{N}$; $T_p(T)$ — период, или время, спустя которое процесс производства для p-й группы станков (всего серийного участка в целом) повторяется, $p \in \overline{N}$.

Функция суммарных затрат, которая зависит от принятого календарного графика и является критерием оптимальности для рассматриваемой задачи, имеет вид

$$C = \frac{1}{T}(P + Z), \tag{1}$$

где P — суммарные затраты на переналадки, Z — потери от пролеживания межоперационных заделов по всем деталям и для всех групп станков за время T.

При принятых обозначениях эти слагаемые запишутся

$$P = \sum_{p=1}^{N} \alpha_p \sum_{k=1}^{m_p} \bar{\tau}_k{}^p, \tag{2}$$

где $\bar{\tau}_k{}^p$ — время, затраченное на переналадку k-го станка p-й группы за период T;

$$Z = \sum_{p=1}^{N} \sum_{i=1}^{n} \beta_{ip} \int_0^T Z_{ip}(t)\, dt. \tag{3}$$

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМАЛИЗАЦИЯ. УПРОЩЕННАЯ МОДЕЛЬ СЕРИЙНОГО УЧАСТКА

Упростим модель серийного участка. Допустим, что участок состоит из одной группы станков, т. е. $\overline{N} = \{1\}$, в связи с чем индекс p в дальнейшем опускается. Такое предположение, с одной стороны, существенно упрощает задачу построения оптимального календарного графика, так как отпадает необходимость календарной взаимосвязи работы отдельных групп станков, а с другой — дает возможность раскрыть некоторые важные закономерности, присущие общей модели. Кроме того, подобная модель довольно часто встречается на практике.

Обозначим через x_i количество запусков, а через t_i^s, $s = 1, 2, \ldots, x_i$ — время обработки i-й детали при s-м запуске, $i \in I$ на каждом станке группы в течение периода T (считаем, что все станки группы работают по одному графику).

Для предотвращения выхолащивания оборотного задела, питающего конвейер, необходимо, чтобы для каждого отрезка времени выполнялось условие

$$mV_it_i \geqslant V_{i0}T, \ i \in I, \tag{4}$$

где

$$t_i = \sum_{s=1}^{x_i} t_i^s, \ \ i \in I. \tag{5}$$

Если к концу периода T не требуется дополнительного количества каких-либо деталей сверх необходимого для поддержания нормального хода производства, то в (4) будет знак равенства. Тогда получим

$$T = \sum_{i=1}^{n} t_i + \sum_{i,j} \tau_{ij} = \frac{\sum\limits_{i,j} \tau_{ij}}{1 - \frac{1}{m} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{V_{i0}}{V_i}} \tag{6}$$

и после вычисления интеграла (3)

$$C = \alpha \left(m - \sum_{i=1}^{n} \frac{V_{i0}}{V_i}\right) + \left(\sum_{i,j} \tau_{ij}\right) \sum_{i=1}^{n} b_i \sum_{s=1}^{x_i} (\zeta_i^s)^2, \tag{7}$$

где $\sum\limits_{i,j} \tau_{ij}$ — суммарные затраты времени на переналадки для одного станка группы за период T,

$$b_i = \frac{\beta_i V_{i0} \left(m - \frac{V_{i0}}{V_i}\right)}{2\left(m - \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{V_{i0}}{V_i}\right)}, \ i \in J, \tag{8}$$

$$\zeta_i^s = \frac{t_i^s}{t_i}, \quad s = 1, 2, \ldots, x_i; \quad i \in J. \tag{9}$$

Одновременно получаем необходимое и достаточное условие, при выполнении которого группа из m станков в состоянии обеспечить заданный темп выдачи по всем деталям

$$1 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} \frac{V_{i0}}{V_i} > 0. \tag{10}$$

Здесь и далее принимаем, что $V_{i0} < V_i$, $i \in I$. Если же, к примеру, для некоторой k-й детали это условие не выполняется, т. е. $]e[V_k > V_{k0} \geqslant$

$\geqslant [e]V_k \geqslant V_k$ (здесь $]e[$ — наименьшее целое число, не меньшее e, а $[e]$ — наибольшее целое число, не большее e), то выделим $[e]$ станков из m имеющихся в наличии для обработки только k-х деталей. Упомянутые $[e]$ станков, необходимость в переналадке которых теперь отпадает, вместе с приходящейся на них долей планового задания по темпу выдачи k-й детали в дальнейшем не учитываем, т. е. принимаем, что количество станков в группе составляет $m - [e]$, а темп выдачи k-й детали равен $V_{k0} - [e]V_k$ и т. д.

Величина $\sum\limits_{i,j}\tau_{ij}$, а вместе с ней и переменные x_i, $i \in I$ должны удовлетворять ряду условий.

Ограничения на размеры партий приводят к следующему

$$\sum_{i,j}\tau_{ij} \leqslant \frac{H_j\left(m - \sum\limits_{i=1}^{n}\frac{V_{i0}}{V_i}\right)}{\zeta_j^s V_{j0}}, \quad s = 1, 2, \ldots, x_j; \quad j \in I^H. \tag{11}$$

По различным производственным причинам может возникнуть ограничение $\sum\limits_{i,j}\tau_{ij} \leqslant M$. Оно, в частности, появится в том случае, если на начало периода T имеется ограниченное количество необходимого металла (заготовок).

Обозначим через $\overline{Q} = \{1, 2, \ldots, Q\}$ — множество наименований металла, из которого изготавливаются детали; I^q — подмножество множества I, состоящее из индексов тех деталей, которые изготавливаются из q-го металла, $q \in \overline{Q}$; $\overline{M}_q$ — количество q-го металла, имеющееся на начало периода T, $q \in \overline{Q}$; π_j^q — норма расхода q-го металла на j-ю деталь, $j \in I^q$, $q \in \overline{Q}$.

Полагаем, что $I^q \cap I^r = \phi$; $q, r \in \overline{Q}$; $q \neq r$, где через ϕ обозначено пустое множество. Тогда

$$M_q = \frac{m - \sum\limits_{i=1}^{n}\frac{V_{i0}}{V_i}}{m\sum\limits_{j\in I^q}\pi_j^q V_{j0}}\,\overline{M}_q, \quad q \in Q; \quad M = \min_{q\in\overline{Q}} M_q. \tag{12}$$

Величина функции цели (7) зависит не только от количества запусков i-й детали, $i \in I$, в обработку за время периода T, но и от последовательности этих запусков, которой соответствует замкнутый цикл — «маршрут коммивояжера» для расширенной матрицы τ^*, характеризующийся определенной продолжительностью времени на выполнение всех переналадок $\sum\limits_{i,j}\tau_{ij}$ и набором величин ζ_i^s, $s = 1, 2, \ldots, x_i$; $i \in I$.

Матрица τ^* при заданных целых положительных значениях x_i образуется из заданной матрицы переналадок τ путем последовательного добавления к последней снизу и справа в соответствии с чередованием индекса $i = 1, 2, \ldots, n$ $(x_i - 1)$-го количества i-х строк и столбцов. Последние строка и столбец матрицы τ^* будут иметь порядковый номер, равный $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$.

Ее элементы обладают такой особенностью

$$\tau_{kj} \underset{k\in I}{=} \tau_{ik} = \infty \quad \text{при} \quad \begin{cases} i, j = k, \\ i, j = n + \sum\limits_{\gamma=1}^{k-1}(x_\gamma - 1) + 1;\ n + \sum\limits_{\gamma=1}^{k-1}(x_\gamma - 1) + \\ \qquad + 2; \ldots ; n + \sum\limits_{\gamma=1}^{k}(x_\gamma - 1). \end{cases} \tag{13}$$

Отметим, что

$$\sum_{i,j} \tau_{ij} = \infty \quad \text{при} \quad \max_{i \in I} x_i > \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} x_i, \tag{14}$$

Вполне очевидно, что построение оптимального календарного графика даже для упрощенной модели серийного участка наталкивается на значительные математические трудности. Поэтому остановимся на методах получения приближенного решения, которые, помимо их ценности для практических приложений (благодаря резкому уменьшению объема вычислений), порой дают возможность найти ряд эффективных приемов, облегчающих поиск точного решения.

В качестве первого приближения примем

$$\zeta_i^1 = \zeta_i^2 = \cdots = \zeta_i^{x_i}, \quad i \in I. \tag{15}$$

Тогда

$$\zeta_i^s = \sum_{s=1}^{x_i} (\zeta_i^s)^2 = \frac{1}{x_i}, \quad s = 1, 2, \ldots, x_i; \ i \in I. \tag{16}$$

Относительная погрешность Δ определения величины функции цели от замены (16) для практических задач будет незначительной. Так, даже для такого весьма неблагоприятного, но практически маловероятного соотношения величин ζ_i^s, $s = 1, 2, \ldots, x_i$; $i \in I$, как $\zeta_i^1 : \zeta_i^2 : \ldots : \zeta_i^{x_i} = 1 : 2 : \ldots : x_i$, она будет находиться в пределах $0 \leqslant \Delta = x_i / 2(2x_i + 1) < 0{,}25$.

После принятого допущения приходим к задаче, которую назовем задачей I

$$C^*(\vec{X}) = K(\vec{X}) \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{x_i} \to \min, \tag{17}$$

$$x_i \geqslant 1 \text{ — целые числа}, \quad i \in I, \tag{18}$$

$$\max_{i \in I} x_i \leqslant \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} x_i, \tag{19}$$

$$x_k \geqslant \frac{1}{h_k} K(\vec{X}), \quad k \in I^H, \tag{20}$$

$$K(\vec{X}) \leqslant M. \tag{21}$$

Здесь $\vec{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — вектор-строка неизвестных x_i, $i \in I$;

$$K(\vec{X}) = \min \sum_{i,j} \tau_{ij} \tag{22}$$

— однозначная функция переменных x_i, $i \in I$, определенная на множестве S_1 таких точек $\vec{X}$, которые удовлетворяют условиям (18) и (19). При заданном векторе $\vec{X} \in S_1$ значение функции $K(\vec{X})$ равно по величине минимальной продолжительности суммарного времени на переналадки, соответствующей оптимальному маршруту коммивояжера для расширенной матрицы τ^*

$$h_k = \frac{H_k}{V_{k0}} \left(m - \sum_{i=1}^{n} \frac{V_{i0}}{V_i} \right), \quad k \in I^H. \tag{23}$$

Примечание. Рассматриваемая задача в целом имеет смысл лишь при условии, что за группой станков закреплено не менее трех деталей. Поэтому везде в дальнейшем предполагаем, что $n \geqslant 3$.

Даже при принятом допущении (15) задача остается чрезвычайно трудной для решения, если элементы матрицы τ являются произвольными числами. Подтверждением этому служит хотя бы тот факт, что лишь относительно недавно были достигнуты первые успехи в решении самой задачи коммивояжера [2—4].

В данной работе будет рассмотрен следующий частный вариант задачи I (назовем его задачей II)

$$\tau_{ij} = \begin{cases} \infty, & i = j, \\ a_j > 0, & i \neq j, \end{cases} \quad i, j \in I. \tag{24}$$

Этот вариант довольно часто встречается на практике, когда время на переналадку зависит главным образом от того, какая деталь запускается в обработку. В этом случае

$$K(\vec{X}) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i, \tag{25}$$

и задача II запишется в виде

$$C^{**}(\vec{X}) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{x_i} \to \min, \tag{26}$$

$x_i \geqslant 1$ — целые числа, $i \in I$,

$$\max_{i \in I} x_i \leqslant \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} x_i,$$

$$x_k \geqslant \frac{1}{h_k} \sum_{i=1}^{n} a_i x_i, \qquad k \in I^H, \tag{27}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leqslant M. \tag{28}$$

3. АНАЛИЗ СИСТЕМЫ ОГРАНИЧЕНИЙ ЗАДАЧИ II

При анализе системы ограничений задачи II были использованы основные результаты работы [5].

Обозначим через S множество точек $\vec{X}$, удовлетворяющих всем условиям задачи II, через $S_2 \supset S$ — удовлетворяющих условиям (18), (19), (27) и через $S_3 \supset S$ — условиям (18), (27) и (28).

Для удобства без потери общности примем, что $I^H = \{1, 2, \ldots, l\}$ и коэффициенты a_i, $i \in I$; h_k, $k \in I^H$ и M — целые числа.

В любом из нижеперечисленных случаев $S = \phi$.

$$\sum_{k \in I^H} \frac{a_k}{h_k} > 1, \quad l \leqslant n, \tag{29}$$

$$\sum_{k \in I^H} \frac{a_k}{h_k} = 1, \quad l < n, \tag{30}$$

$$\sum_{k \in I^H} \frac{a_k}{h_k} = 1, \quad I^H = I, \ \max_{i \in I} \frac{1}{h_i} > \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{h_i}, \tag{31}$$

$$\sum_{k \in I^H} \frac{a_k}{h_k} = 1, \ I^H = I, \quad [[h_1, h_2, \ldots, h_n]] \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{h_i} > M. \tag{32}$$

Здесь через $[[h_1, h_2, \ldots, h_n]]$ обозначено наименьшее кратное чисел $h_1, h_2, \ldots, h_n$.

Задача II будет иметь единственное решение

$$\text{а) } x_i = \frac{[[h_1, h_2, \ldots, h_n]]}{h_i}, \quad i \in I, \tag{33}$$

в случае $\sum\limits_{k \in I^H} \frac{a_k}{h_k} = 1$; $I^H = I$, $\max\limits_{i \in I} \frac{1}{h_i} \leqslant \frac{1}{2} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{h_i}$;

$$[[h_1, h_2, \ldots, h_n]] \times \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{h_i} \leqslant M, \tag{34}$$

б)
$$x_i = 1, \quad i \in I; \tag{35}$$
в случае

$$I^H = \phi \text{ или } h_k \geqslant \sum_{i=1}^{n} a_i, \quad k \in I^H; \; 0 \leqslant M - \sum_{i=1}^{n} a_i < \min_{i \in I} a_i. \tag{36}$$

Рассмотрим множество S_2.

Общая формула неотрицательных решений однородной системы неравенств (27) имеет вид

$$x_j = \begin{cases} \frac{\lambda_j}{a_j}\left(1 - \sum\limits_{k \in I^H} \frac{a_k}{h_k}\right) + \frac{1}{h_j} \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i, & j = 1, 2, \ldots, l, \\ \frac{\lambda_j}{a_j}\left(1 - \sum\limits_{k \in I^H} \frac{a_k}{h_k}\right), & j = l+1, \ldots, n, \end{cases} \tag{37}$$

где λ_j, $j \in I$ — произвольные неотрицательные числа.

Как следует из (37) и (18), только при выполнении условия

$$1 - \sum_{k \in I^H} \frac{a_k}{h_k} > 0, \quad l \leqslant n \tag{38}$$

возможны случаи, когда $S_2 \neq \phi$. Поэтому везде в дальнейшем полагаем, что неравенство (38) соблюдается.

Записав ограничение (19) в виде $\sum\limits_{i \in I,\, i \neq j} x_i - x_j \geqslant 0$, $j \in I$ и подставив в него выражение для x_j, $j \in I$ из (37), получим однородную систему линейных неравенств $B\vec{\lambda} \geqq \vec{0}$ относительно λ_i, $i \in I$, где $\vec{\lambda}$, $\vec{0}$ и B — соответственно вектор-столбец из переменных λ_i, нулевой вектор-столбец и квадратная матрица с элементами b_{ij}, зависящими от коэффициентов a_i и h_k; $i, j \in I$, $k \in I^H$. Очевидно, что если решение системы неравенств удовлетворяет условию $\vec{\lambda} \geqslant \vec{0}$ и при этом $\lambda_i > 0$, $j = l+1, l+2, \ldots, n$, в случае $l < n$, то $S_2 \neq \phi$. С учетом последнего замечания получаем, что $S_2 \neq \phi$ в любом из следующих случаев

$$\sum_{k \in I^H} \frac{1}{h_k} - \frac{2}{h_i} \geqslant 0, \quad i \in I, \quad l \leqslant n, \tag{39}$$

$$\sum_{k \in I^H} \frac{1}{h_k} - \frac{2}{h_r} < 0, \quad G^1 \neq \phi, \tag{40}$$

$$\sum_{k \in I^H} \frac{1}{h_k} - \frac{2}{h_r} < 0, \; G^1 = \phi, \; I \setminus I^H \subset G^2 \neq \phi, \tag{41}$$

и $S_2 = \phi$, если только

$$\sum_{k \in I^H} \frac{1}{h_k} - \frac{2}{h_r} < 0, \; G^3 = I \tag{42}$$

или

$$\sum_{k \in I^H} \frac{1}{h_k} - \frac{2}{h_r} < 0, \; G^1 = \phi, \; I \setminus I^H \neq \phi, \; (I \setminus I^H) \cap G^2 \neq I \setminus I^H, \tag{43}$$

где

$$\frac{1}{h_r} = \max_{k \in I^H} \frac{1}{h_k}, \; G^1 = \{j/b_{rj} > 0\}, \; G^2 = \{j/b_{rj} = 0\}, \; G^3 = \{j/b_{rj} < 0\}. \tag{44}$$

Докажем, что $S_2 \neq \phi$, если выполняется условие (39).

Действительно, в этом случае $b_{ij} > 0$ при $i \neq j$ и b_{ii} — вещественные, $i, j \in I$. А для таких матриц [6] существует такой характеристический корень $p^*(B)$, что

$$Re\, p^*(B) = p^*(B) = \max_{i \in I} \operatorname{Re} p_i(B), \quad B\vec{\lambda} = p^*(B)\vec{\lambda},$$

где $\vec{\lambda} = \vec{0}$. В то же время

$$|B| = (-1)^{n-1} 2^{n-1} (n-2) \left(1 - \sum_{k \in I^H} \frac{a_k}{h_k}\right)^{-1} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}, \quad l \leqslant n,$$

$$\text{т. е. } |B| = \begin{cases} > 0, & \text{если } n \text{ — нечетное}, \\ < 0, & \text{если } n \text{ — четное}, \end{cases} \tag{45}$$

откуда следует, что $p^*(B) > 0$ и далее $p^*(B)\vec{\lambda} > \vec{0}$ и $S_2 \neq \phi$.

Остальные утверждения относительно множества S_2 при условиях (40) — (43) доказываются или аналогично, или путем непосредственного применения правила, приведенного в [5].

Рассмотрим множество S_3.

Для каждого из непересекающихся подмножеств $E_r = \{M^{r-1} + 1, \ldots, M^r\}$, $r \in R = \{1, 2, \ldots, v\}$ множества целых чисел $E = \{1, 2, \ldots, M\}$, $M^0 = 0$, $M^v = M$ определим число δ_j^r, $j \in I$

$$\delta_j^r = \begin{cases} \left] \dfrac{M^r}{h_j} \right[, & J \in I^H, \\ 1, & j \overline{\in} I^H, \end{cases} \quad r \in R, \; j \in I. \tag{46}$$

Числа M^r, $r = 1, 2, \ldots, v - 1$, получим исходя из условия, что каждое из них должно делиться хотя бы на одно из чисел h_k, $k \in I^H$.

Разобьем множество R на подмножества R_1, R_2 и R_3. $r \in R_1$, если выполняется любое из условий

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \delta_i^r > M^r, \tag{47}$$

$$M^r - \min_{i \in I} a_i < \sum_{i=1}^{n} a_i \delta_i^r \leqslant M^r, \; \max_{i \in I} \delta_i^r > \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \delta_i^r. \tag{48}$$

$$\min_{i \in I} a_i < M^r - \sum_{i=1}^{n} a_i \delta_i^r < \left(\delta_\gamma^r - \sum_{i \in I;\, i \neq \gamma} \delta_i^r\right) a_\alpha, \; \delta_\gamma^r = \max_{i \in I} \delta_i^r, \; a_\alpha = \min_{i \in I} a_i, \tag{49}$$

$$r \in R_2, \text{ если } M^r - \min_{i \in I} a_i < \sum_{i=1}^{n} a_i \delta_i^r \leqslant M^r, \quad \max_{i \in I} \delta_i^r \leqslant \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \delta_i^r. \quad (50)$$

Остальные индексы r отнесем к подмножеству R_3.

Представим множества S_3 и S в таком виде: $S_3 = \bigcup_{r \in R} S_3^r$ и $S = \bigcup_{r \in R} S^r$, где S_3^r — подмножество точек $\vec{X}$, удовлетворяющих неравенству

$$M^{r-1} + 1 \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leqslant M^r, \quad r \in R, \quad (51)$$

и условиям (18) и (27), а S^r — тому же неравенству (51) и условиям (18), (19) и (27).

Если $r \in R_1$, то $S^r = \phi$; а если $r \in R_2$, то S_3^r и S^r состоят из единственного вектора с координатами

$$x_i^r = \delta_i^r, \quad i \in I. \quad (52)$$

Подмножества S_3^r и S^r, $r \in R_3$ состоят из векторов, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$x_i^r \geqslant \delta_i^r, \; i \in I. \quad (53)$$

4. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ II

Приведем сначала алгоритм решения следующей задачи.

З а д а ч а А. Минимизировать функцию (26) на множестве S_4 точек $\vec{X}$, удовлетворяющих условиям

$$x_i \geqslant \delta_i \geqslant 1; \; x_i \text{ и } \delta_i \text{ — целые числа}, \; i \in I, \quad (54)$$

$$M^* \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leqslant M^{**}; \; M^*, M^{**} \text{ — целые числа}; \; 0 \leqslant M^* < M^{**};$$

$$M^{**} > \sum_{i=1}^{n} a_i \delta_i + \min_{i \in I} a_i; \quad (55)$$

Методом динамического программирования [7] находим

$$\psi_n(\varepsilon) = \min \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{y_i + \delta_i}, \quad (56)$$

$$y_i \geqslant 0 \text{ — целые числа}, \; i \in I, \quad (57)$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i y_i \leqslant \varepsilon, \; \varepsilon \in \left\{\varepsilon_0, \varepsilon_0 + 1, \ldots, M^{**} - \sum_{i=1}^{n} a_i \delta_i\right\}, \quad (58)$$

где

$$\varepsilon_0 = \max\left(0, M^* - \sum_{i=1}^{n} a_i \delta_i\right). \quad (59)$$

Основное рекуррентное соотношение

$$\psi_1(\varepsilon) = \frac{b_1}{\left[\frac{\varepsilon}{a_1}\right] + \delta_1}, \quad \psi_L(\varepsilon) = \min_{0 \leqslant y_L \leqslant \left[\frac{\varepsilon}{a_L}\right]} \left\{\frac{b_L}{y_L + \delta_L} + \psi_{L-1}(\varepsilon - a_L y_L)\right\},$$

$$\varepsilon \in \left\{0, 1, \ldots, M^{**} - \sum_{i=1}^{n} a_i \delta_i\right\}, \quad L = 2, 3, \ldots, n-1, \quad (60а)$$

$$\psi_n(\varepsilon) = \min_{0 \leqslant y_n \leqslant \left[\frac{\varepsilon}{a_n}\right]} \left\{ \frac{b_n}{y_n + \delta_n} + \psi_{n-1}(\varepsilon - a_n y_n) \right\},$$

$$\varepsilon \in \left\{ \varepsilon_0, \varepsilon_0 + 1, .., M^{**} - \sum_{i=1}^{n} a_i \delta_i \right\}. \qquad (60б)$$

Затем, используя формулу

$$x_i(\varepsilon) = y_i(\varepsilon) + \delta_i, \varepsilon \in \{\varepsilon_0, \varepsilon_0 + 1, \ldots, M^{**} - \sum_{i=1}^{n} a_i \delta_i,\}, i \in I, \qquad (61)$$

получим множество X_A векторов $\vec{X}(\varepsilon)$.

Множество $\tilde{X}_A$ оптимальных решений задачи A находим по правилу

$$C^{**}(\vec{X})_{\vec{X} \in \tilde{X}_A} = \min_{\vec{X} \in S_4} C^{**}(\vec{X}) = \min_{\vec{X} \in X_A} C^{**}(\vec{X}). \qquad (62)$$

Покажем, что действительно $\tilde{X}_A \subset X_A$.

Предположим обратное, т.е. что $\vec{X}^0 \in S_4 \setminus X_A$ и $C^{**}(\vec{X}^0) < \min\limits_{\vec{X} \in X_A} C^{**}(\vec{X})$.

Обозначим $M_0 = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i^0 \leqslant M^{**}$ и $\varepsilon^0 = M_0 - \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \delta_i$. Так как $\vec{X}^0 \notin X_A$, то $\sum\limits_{i=1}^{n} b_i / x_i^0 > \psi_n(\varepsilon^0)$. При этом $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i(\varepsilon^0) \leqslant M_0$.

Отсюда следует, что $C^{**}(\vec{X}^0) = M_0 \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{b_i}{x_i^0} >$

$$> \psi_n(\varepsilon^0) \sum_{i=1}^{n} a_i x_i(\varepsilon^0) \geqslant \min_{\vec{X} \in X_A} C^{**}(\vec{X}).$$

Переходим к задаче II.

1) Пусть выполняется любое из условий

$$I^H = \phi, \ M > \sum_{i=1}^{n} a_i + \min_{i \in I} a_i, \qquad (63)$$

$$I^H \neq \phi, \min_{k \in I^H} h_k \geqslant M > \sum_{i=1}^{n} a_i + \min_{i \in I} a_i. \qquad (64)$$

Решим задачу А для случая

$$M^* = 0, M^{**} = M, \delta_i = 1, i \in I \qquad (65)$$

и получим множество X_A и $\tilde{X}_A$.

Условие (19) разделяет X_A на два подмножества

$$X_A^* = \{\vec{X} / \vec{X} \in X_A; \ \max_{i \in I} x_i \leqslant \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} x_i\} \text{ и } X_A \setminus X_A^*.$$

Из последнего выделим особо подмножество X_A^{**} таких векоторов $\vec{X}$, которые удовлетворяют неравенству

$$C^{**}(\vec{X})_{\vec{X} \in X_A^{**} \subset X_A \setminus X_A^*} < \min_{\vec{X} \in X_A^*} C^{**}(\vec{X}). \qquad (66)$$

Если $\widetilde{X}_A \cap X_A^* \neq \phi$, то любой вектор $\vec{X} \in \widetilde{X}_A \cap X_A^*$ будет оптимальным решением задачи II. Если таких векторов будет несколько, выберем из них тот, которому соответствует минимальная величина функции $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i$. Такой выбор будем производить всякий раз, когда задача II решается неоднозначно. Это даст возможность построить оптимальный календарный график с минимальной продолжительностью периода T, что имеет свои дополнительные преимущества.

Теперь предположим, что $\widetilde{X}_A \cap X_A^* = \phi$, а конкретно пусть

$$\widetilde{X}_A \subset X_A^{**}, x_n > \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad \text{или} \quad x_n > \sum_{i=1}^{n-1} x_i, \ \vec{X} \in X_A^{**}. \tag{67}$$

Можно показать, что в этом случае для получения множества оптимальных решений задачи II (обозначим его через $\widetilde{X}$) надо дополнительно решить при условии (65) вспомогательную задачу Б.

З а д а ч а Б. Отличается от задачи А лишь наличием дополнительного ограничения, которое в случае (67) запишется в виде

$$x_n = \sum_{i=1}^{n-1} x_i. \tag{68}$$

Решив задачи А и Б, получим множество векторов, содержащее оптимальное решение задачи II.

$$\widetilde{X} \subset X_A^* \cup X_\omega \cup \widetilde{X}_Б \tag{69}$$

Здесь $\widetilde{X}_Б$ — множество оптимальных решений при условии (67) задачи Б; X_ω — множество векторов $\vec{X}_\omega(\varepsilon)$, построенных для каждого ε, для которого $\vec{X}(\varepsilon) \in X_A^{**}$, по следующему правилу. Вектор $\vec{X}_\omega(\varepsilon)$ в случае (67) выбирается из множества векторов $\vec{X}$ с координатой $x_n = 1, 2, \ldots, \left[\frac{\varepsilon^*}{a_n}\right] + 1$, рассматриваемых при решении задачи A в процессе поиска $\vec{X}(\varepsilon) \in X_A$. Выбор производится исходя из условия, что вектор $\vec{X}_\omega(\varepsilon)$ должен удовлетворять ограничению (19) и доставлять при этом минимальное значение функции $b_n/x_n + \psi_{n-1}[\varepsilon - a_n(x_n - 1)]$.

Для решения задачи Б в случае (67) методом динамического программирования найдем

$$\psi_{n-1}(\mu, \varepsilon_{n-1}) = \min \sum_{i=1}^{n-1} \frac{b_i}{y_i + 1}, \tag{70}$$

$$y_i \geqslant 0 \text{ — целые числа}, \ i = 1, 2, \ldots, n-1, \tag{71}$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} y_i = \mu \in \{0, 1, \ldots, *\}, \tag{72}$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} a_i y_i \leqslant \varepsilon_{n-1} \in \{\varepsilon_0^{n-1}, \varepsilon_0^{n-1} + 1, \ldots, \varepsilon^{n-1*}\}. \tag{73}$$

Основное рекуррентное соотношение

$$\psi_1(\mu,\varepsilon_1) = \min_{0\leqslant y_1\leqslant\Delta_1} \frac{b_1}{y_1+1}, \ \psi_L(\mu,\varepsilon_L) = \min_{0\leqslant y_L\leqslant\Delta_L} \left[\frac{b_L}{y_L+1} + \right.$$

$$\left. + \ \psi_{L-1}(\mu - y_L, \varepsilon_L - a_L y_L)\right], \qquad L = 1,2,\ldots,n-1, \tag{74}$$

$$\Delta_L = \min\left(\mu, \left[\frac{\varepsilon_L}{a_L}\right]\right), \varepsilon_L \in \{\varepsilon_0{}^L, \varepsilon_0{}^L+1,\ldots, \varepsilon^{L*}\}, \quad L = 1,2,\ldots, n-1. \tag{75}$$

Здесь

$$\mu^* = \left[\frac{M - \sum\limits_{i=1}^{n} a_i - a_n(n-2)}{a_n + a_\alpha{}^{n-1}}\right], \tag{76}$$

$$a_\alpha{}^L = \min(a_1,a_2,\ldots,a_L), \qquad L = 1,2,\ldots,n-1, \tag{77}$$

$$\varepsilon_0{}^L = a_\alpha{}^L \mu, \qquad L = 1,2,\ldots,n-1, \tag{78}$$

$$\varepsilon^{L*} = \min(e_1,e_2{}^L), \qquad L = 1,2,\ldots,n-1, \tag{79}$$

$$e_1 = M - \sum_{i=1}^{n} a_i - a_n(\mu + n - 2), \tag{80}$$

$$e_2{}^L = \sum_{i=1}^{L} a_i y_i{}^*, \ L = 1, 2, \ldots, n-1, \tag{81}$$

$\vec{Y}^*_{n-1}(\mu) = (y_1{}^*, y_2{}^*, \ldots, y_4{}^*)$, $L = 1, 2, \ldots, n-1$ — вектор с неотрицательными целочисленными координатами, обращающими в минимум функцию $\sum\limits_{i=1}^{L} \frac{b_i}{y_i+1}$ при условии $\sum\limits_{i=1}^{L} y_i = \mu$.

Отметим, что

$$\psi_{L-1}(\mu-y_L, \varepsilon_L-a_L y_L) = \psi_{L-1}(\mu-y_L, \varepsilon_2^{L-1}) \text{ при } e_2^{L-1} < e_1, L=2,3,\ldots,n-1, \tag{82}$$

$$\varepsilon_2^{L-1} + 1 \leqslant \varepsilon_L - a_L y_L \leqslant e_1,$$

причем величина $\psi_{L-1}(\mu - y_L, e_2^{L-1})$ определяется вектором $\vec{Y}^*_{L-1}(\mu - y_L)$.

Определив для заданного множества значений пар чисел μ и ε_{n-1} множество $Y_Б$ векторов $\vec{Y}_{n-1}$, построим множество $X_В$ векторов $\vec{X}(\mu, \varepsilon_{n-1})$, первые $n-1$ координат которых найдем по формуле (61), а n-ю координату — по (68).

Множество $\widetilde{X}_Б$ найдем по правилу

$$C^{**}(\vec{X}) = \min_{\vec{X}\in\widetilde{X}_Б} C^{**}(\vec{X}). \tag{83}$$

$$\vec{X}\in X_Б$$

В частном случае, когда

$$a_i = a, \ i = 1, 2, \ldots, n-1, \tag{84}$$

если окажется, что $\widetilde{X}_А \cap X_А{}^* = \phi$, в качестве $Y_Б$ берем множество, состоящее из таких векторов $Y_{n-1}(\varepsilon)$, полученных при решении задачи А, которые удовлетворяют условию

$$(a + a_n)\left[n - 1 + \sum_{i=1}^{n-1} y_i(\varepsilon)\right] \leqslant M.$$

$$2) \ I^H \neq \phi, \ \min_{k\in I^H} h_k < M, \ R_2 \cup R_3 \neq \phi. \tag{85}$$

Для каждого из подмножеств $E_r \subset E$, $r \in R_2$ по (52) найдем единственное решение задачи II (все вместе они составят множество X_2), а для подмножеств $E_r \subset E$, $r \in R_3$, решив задачу A $(M^* = M^{r-1} + 1;\ M^{**} = M^r)$, найдем множества $X_A{}^r$, $X_A{}^{*r}$ и $\widetilde{X}_A{}^r$, $r \in R_3$.

Выделим из множества R_3 подмножества R_3' и R_3''

$$R_3' = \{r/r \in R_3;\ \widetilde{X}_A^r \cap X_A^{*r} \neq \phi\}, \tag{86}$$

$$R_3'' = \{r/r \in R_3 \setminus R_3',\ \min_{\vec{X} \in \widetilde{X}_A{}^r} C^{**}(\vec{X}) < \min_{\vec{X} \in X_2 \cup (\bigcup_{r \in R_3'} \widetilde{X}_{A}{}^r)} C^{**}(\vec{X})\}. \tag{87}$$

Если $R_3'' = \phi$, то решение задачи II найдем путем выбора такого вектора $\vec{X} \in X_2 \cup (\bigcup_{r \in R_3'} \widetilde{X}_A{}^r)$, который минимизирует величину функции цели.

Предположим, что $R_3'' \neq \phi$. Тогда для каждого из подмножеств E_r, $r \in R_3''$ решим задачу Б, только на этот раз вместо (68) введем условие

$$x_\beta{}^r = \sum_{i \in I,\ i \neq \beta} x_i{}^r, \tag{88}$$

где β — тот индекс из множества I, который принадлежит максимальной координате вектора $\vec{X} \in \widetilde{X}_A{}^r$, $r \in R_3''$.

Методом динамического программирования найдем

$$\psi^r(\mu^r, \varepsilon_\beta{}^r) = \min \sum_{i \in I;\ i \neq \beta} \frac{b_i}{y_i{}^r + \delta_i{}^r}, \quad r \in R_3'', \tag{89}$$

$$y_i{}^r \geqslant 0 \text{ — целые числа},\ i \in I;\ i \neq \beta, \tag{90}$$

$$\sum_{i \in I,\ i \neq \beta} y_i{}^r = \mu^r \in \{\mu_0{}^r,\ \mu_0{}^r + 1, \ldots, \mu^{*r}\}, \tag{91}$$

$$\sum_{i \in I,\ i \neq \beta} a_i y_i{}^r \leqslant \varepsilon_\beta{}^r \in E_\beta{}^r \subset \{\varepsilon_0^{r,\beta},\ \varepsilon_0^{r,\beta} + 1, \ldots, M^r - \sum_{i=1}^n a_i \delta_i{}^r\}, \tag{92}$$

где

$$\mu_0{}^r = \max\Bigl(0,\ \delta_\beta{}^r - \sum_{i \in I,\ i \neq \beta} \delta_i{}^r\Bigr), \tag{93}$$

$$\mu^{*r} = \left[\frac{M^r - \sum_{i=1}^n a_i \delta_i{}^r + a_\beta(\delta_\beta{}^r - \sum_{i \in I;\ i \neq \beta} \delta_i{}^r)}{a_\beta + \min_{i \in I,\ j \neq \beta} a_i}\right], \tag{94}$$

$$\varepsilon_0^{r,\beta} = \max\Bigl(\min_{i \in I,\ i \neq \beta} a_i \mu^r;\ M^{r-1} + 1 - \sum_{i=1}^n a_i \delta_i{}^r\Bigr). \tag{95}$$

$E_r{}^\beta$ — подмножество множества $\{\varepsilon_0^{r,\beta},\ \varepsilon_0^{r,\beta} + 1, \ldots, M^r - \sum_{i=1}^n a_i \delta_i{}^r\}$, состоящее из таких чисел $\varepsilon_\beta{}^r$, для которых векторы $\vec{X}(\varepsilon_\beta{}^r) \in X_A{}^r \setminus X_A^{*r}$ $(r \in R_3'')$ удовлетворяют неравенству

$$\min_{\vec{X}(\varepsilon_\beta{}^r) \in X_A{}^r \setminus X_A^{*r},\ r \in R_3''} C^{**}[\vec{X}(\varepsilon_\beta{}^r)] < \min_{\vec{X} \in X_2 \cup (\bigcup_{r \in R_3'} \widetilde{X}_A{}^r)} C^{**}(\vec{X}). \tag{96}$$

В результате для заданного множества значений пар чисел μ^r и $\varepsilon_\beta{}^r$ получим множество векторов $\vec{X}^r(\mu^r, \varepsilon_\beta{}^r)$, $r \in R_3''$

$$x_i{}^r = y_i{}^r + \delta_i{}^r,\ i \in I;\ i \neq \beta;\ x_\beta{}^r = \sum_{i \in I;\ i \neq \beta} x_i{}^r,\ r \in R_3'', \tag{97}$$

что, как и ранее, даст возможность найти оптимальное решение задачи Б для подмножества E_r, $r \in R_3''$, а в конечном итоге — решить задачу II.

5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОСНОВНЫХ ПАРАМЕТРОВ КАЛЕНДАРНОГО ГРАФИКА

Определив оптимальное количество запусков в обработку для каждой детали за время T (вектор $\vec{X} \in \tilde{X}$) по (6) с учетом того, что

$\sum_{i,j} \tau_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i,$ найдем величину периода.

В общем случае для полученного вектора $\vec{X}$ можно построить не один, а несколько вариантов последовательности запусков деталей в обработку, причем не все они будут равнозначны по величине суммарных издержек от пролеживания задела.

Чем меньше будут различаться отрезки времени между моментами запуска i-й детали в обработку, т. е. чем равномернее запуск, тем меньше будут издержки от пролеживания задела данной детали (они пропорциональны величине члена $b_i \sum_{s=1}^{x_i} (\zeta_i{}^s)^2$ в (7)).

Для уменьшения общих издержек от пролеживания особенно важно обеспечить высокую равномерность запуска для тех деталей, которые чаще запускаются в обработку.

Выбор оптимальной последовательности запусков путем перебора всех различных вариантов представляет весьма трудоемкую задачу.

Если не оптимальный, то достаточно близкий к нему вариант последовательности можно легко получить, если воспользоваться следующим правилом.

Таблица 1

4	4	2		
5	5	5	1	1
3	3	3	3	3
I	I	II	III	III

Таблица 2

II	
III	III
I	I

В каждую клетку нижней строки прямоугольной таблицы 1, размер основания которой соответствует величине максимальной координаты вектора $\vec{X}$, вписываем индекс детали, наиболее часто запускаемой в обработку. Далее, двигаясь по каждой новой строке слева направо и обходя строки снизу вверх, вписываем в таблицу в соответствии с убыванием величин координат вектора $\vec{X}$ индексы остальных деталей.

Если в таблице нет одинаковых столбцов (столбцы считаем одинаковыми и в том случае, если они различаются лишь индексами деталей, которые запускаются в обработку по одному разу), то, выписывая индексы всех деталей, двигаясь по столбцу снизу вверх и обходя их слева направо, получим искомую последовательность. Если же одинаковые столбцы имеются, то пронумеруем все столбцы таблицы, причем одинаковым присвоим один и тот же номер.

Аналогично предыдущему построим таблицу 2, только теперь роль индексов будут играть номера столбцов. Такие преобразования производим до тех пор, пока не получим таблицу, не содержащую одинаковых столбцов.

Пример. $\vec{X} = (2, 1, 5, 2, 3)$.

Получим такую последовательность: I—III—II—I—III $\sim$ 3—5—4—3—1—3—5—2—3—5—4—3—1. Тогда, к примеру, если период T начинается с запуска второй детали, то график работы станков на время периода будет (a_2, t_2), (a_3, t_3^1), (a_5, t_5^1), (a_4, t_4^1), (a_3, t_3^2), (a_1, t_1^1), (a_3, t_3^3), (a_5, t_5^2), (a_4, t_4^2), (a_3, t_3^4), (a_1, t_1^2), (a_3, t_3^5), (a_5, t_5^3).

Для определения продолжительности обработки при каждом запуске t_i^s, $s = 1, 2, \ldots, x_i$; $i \in I$ составляем систему из $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ линейных уравнений.

Например, между s-м и $(s+1)$-м запусками i-й детали производятся k' запусков, s_k+1, s_k+2, ..., s_k+k'-й детали k, l' запусков, s_l+1, $s_l+2, \ldots, s_l+l'$-й детали l и r' запусков, s_r+1, $s_r+2, \ldots, s_r+r$-й детали r.

Тогда для t_i^s получим уравнение

$$\frac{mV_i - V_{i0}}{V_{i0}} t_i^s - a_i = a_k k' + \sum_{j=1}^{k'} t_k^{s_k+j} + a_l l' + \sum_{j=1}^{l'} t_{l+j}^{s_l} + a_r r' + \sum_{j=1}^{r'} t_{r+j}^{s_r} \tag{98}$$

и т. д.

Заделы по каждой детали на начало периода T (начальные заделы) определяются так.

Пусть период T начинается с запуска i-й детали и пусть первому запуску j-й детали предшествуют k_i запусков детали i, k_l запусков детали l и k_r запусков детали r. Тогда

$$Z_i(0) = a_i V_{i0};\ Z_j(0) = \left(a_j + a_i k_i + \sum_{\gamma=1}^{k_i} t_i^\gamma + a_l k_l + \sum_{\gamma=1}^{k_l} t_l^\gamma + a_r k_r + \sum_{\gamma=1}^{k_r} t_r^\gamma\right) V_{j0} \tag{99}$$

и т. д.

6. СЕРИЙНЫЙ УЧАСТОК ИЗ N ГРУПП СТАНКОВ

Рассмотрим модель серийного участка из N групп станков. Условно разобьем задел каждой детали Z_{ip}, $i \in I$, $p = 2, 3, \ldots, N$ на два составляющих задела

$$Z_{ip}(t) = Z_{ip}'(t) + Z_{ip}''(t),\ i \in I;\quad p = 2, 3, \ldots, N \tag{100}$$

и положим, что из задела Z_{ip}'' детали с заданным для них темпом выдачи V_{i0} переходят в задел Z_{ip}', $i \in I$; $p = 2, 3, \ldots, N$. В результате получим N элементарных участков, каждый из которых состоит из одной группы станков. Издержки от пролеживания для такого участка обусловлены наличием дооперационного $Z'_{i,\,p+1}$ и послеоперационного Z_{ip}'' заделов, $Z_{i1}'' = Z_{i1}$; $i \in I$, $p = 2, 3, \ldots, N$; индекс $N+1$ относится к заготовительному участку.

Математическая модель для каждого из элементарных участков будет аналогична ранее расмотренной модели участка из одной группы станков. Изменится лишь формула для определения коэффициента b_{ip} — теперь в (8) вместо β_i следует подставлять $\beta_{ip} + \beta_{i,\,p+1}$; $i \in I$, $p \in \overline{N}$.

Построив оптимальный календарный график для каждого из элементарных участков, получим оптимальный (без учета дополнительного эффекта от синхронизации) график для всего серийного участка. Осуществив затем синхронизацию работы элементарных участков между собой во времени (способы синхронизации здесь не рассматриваются), можно получить дополнительное снижение издержек от пролеживания задела.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. И. Смоляр. Математические модели календарного планирования серийного производства. Экономика и матем. методы, 1966, т. II, вып. 5.
2. Дж. Литл, К. Мурти, Д. Суини, К. Кэрел. Алгоритм для решения задачи о коммивояжере. Экономика и матем. методы, 1965, т. I, вып. 1.
3. М. Хелд, Р. М. Карп. Применение динамического программирования к задачам упорядочения. Кибернетический сборник, 1964, вып. 9.
4. Р. Беллман. Применение динамического программирования к задаче о коммивояжере. В сб. [3].
5. Н. В. Черникова. Алгоритм для нахождения общей формулы неотрицательных решений систем линейных неравенств. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1965, т. 5, № 2.
6. Э. Беккенбах, Р. Беллман. Неравенства. М., «Мир», 1965.
7. Р. Беллман. Динамическое программирование. М., Изд-во иностр. лит., 1960.

Поступила в редакцию
25 III 1969