

## ОТРАСЛЕВОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ И УПРАВЛЕНИЕ

### О ПРИМЕНЕНИИ МНОГОЦЕЛЕВОЙ ОПТИМИЗАЦИИ В ОТРАСЛЕВОМ ПЛАНИРОВАНИИ

А. Л. ТИХОНРАВОВ

(Харьков)

Как известно, в задачах многоцелевой оптимизации [1—3] множество компромиссных решений может быть получено при построении единой целевой функции в результате «взвешивания» нормированных исходных целевых функций. Подобная задача (в моделях линейного программирования) состоит в том, чтобы найти  $\max(\min)$  целевых функций  $C^k X$ ,  $C^k = (C_1^k, \dots, C_n^k)$ ,  $k=1, \dots, p$ , при выполнении ограничений

$$AX \leq B,$$

$$X = (X_1, \dots, X_n) \geq 0.$$

Здесь  $A$  —  $m \times n$ -матрица;  $B$  —  $m$ -вектор.

Весовые коэффициенты для единой целевой функции могут быть выбраны посредством так называемого симплекс-решетчатого планирования. Компромиссные решения определяются в заранее заданных точках симплексной решетки  $p$ -мерного пространства с постоянным шагом. Множество этих решений, оцененное по всем параметрам оптимизации, нецелесообразно представлять лицу, принимающему решение (ЛПР) для анализа, поскольку оно слишком обширно. Однако полученная информация содержит важные данные о влиянии изменения решений на параметры. Для исследования множества компромиссных решений могут быть использованы методы анализа данных [4—8], позволяющие изучить внутренние связи параметров оптимизации, выделить группы взаимосвязанных показателей и на этой основе по возможности уменьшить число рассматриваемых данных.

На практике многие компромиссные решения отличаются друг от друга по одним параметрам оптимизации незначительно, а по другим — существенно. Естественно сгруппировать решения в классы по признаку сходства и выделить из каждого класса типичные. В итоге такого «сжатия» число компромиссных решений сокращается, остающиеся типичные и должны представляться ЛПР для дальнейшего анализа и выбора.

Обратимся к задачам многоцелевой оптимизации при оптимальном планировании в цветной металлургии, для подотраслей которой разработаны и внедрены системы оптимального планирования производства, основанные на методах линейного программирования со скалярной оптимизацией [9]. Поскольку план, полученный по однокритериальной модели, не учитывает остальных критериев оптимизации, он обычно подвергается многочисленным корректировкам вручную. Ухудшение значения основного критерия при этом в ряде случаев довольно значительно (более 20%). Проведенные исследования позволили приступить

Таблица 1

Матрица значений решений по критериям оптимизации \*

Кри- терий	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2807	2527	2593	43,8	18,4	592	65,8	5035
2	2300	2051	2139	35,2	15,9	926	88,4	3639
3	2768	2549	2631	43,6	18,9	740	82,0	5260
4	2300	2093	2139	33,8	16,2	552	46,1	5547
5	2300	2089	2139	37,3	13,4	532	49,9	4472
6	2707	2458	2550	42,6	18,6	2050	92,2	2079
7	2730	2473	2582	42,8	18,8	1294	108,5	4268
8	2300	2063	2139	35,5	15,5	1367	76,1	1709
9	2773	2467	2562	43,1	18,7	955	95,2	5670
10	2769	2518	2610	43,5	18,7	2050	91,7	2128

\* В табл. 1—3, 5: 1 — выпуск продукции в натуральном выражении, т; 2 — себестоимость выпуска, тыс. руб.; 3 — выпуск продукции в стоимостном выражении, тыс. руб.; 4 — трудовые затраты, тыс. чел.-час; 5 — время работы оборудования, тыс. станко-час; 6 — объем поставок по ДС, т; 7 — прибыль; тыс. руб.; 8 — объем транспортной работы, тыс. т/км. В табл. 1: 9 — компромиссное решение № 1; 10 — компромиссное решение № 2.

к созданию системы многоцелевого планирования производства для подотраслей цветной металлургии. В настоящее время закончена разработка первой очереди системы.

Рассмотрим результаты экспериментов по многоцелевому планированию производства на заводах обработки цветных металлов (ОЦМ). Расчеты проводились для четырех заводов, выпускающих шесть видов продукции. По ее видам заданы оптовые цены, себестоимость, прибыль, трудозатраты, затраты станко-часов на производство 1 т продукции на каждом заводе. Известны региональные потребности в продукции, определены удельные затраты на ее доставку для каждой пары завод ОЦМ — район потребления.

Экономико-математическая модель данной задачи может быть сформулирована как

$$\max(\min) \sum_{i,j,q} C_{ijq}^{(k)} X_{ijq}, \quad k=1, \dots, p,$$

$$\sum_{j,q} a_{ijl} X_{ijq} \leq A_{il} \quad \forall i, l,$$

$$\sum_i X_{ijq} \geq B_{jq} \quad \forall j, q,$$

$$X_{ijq} \geq 0 \quad \forall i, j, q,$$

где  $X_{ijq}$  — количество продукции вида  $j$ , поставляемое заводом  $i$  потребителю  $q$ ;  $a_{ijl}$  — затраты ресурса  $l$  на производство продукции вида  $j$  на заводе  $i$ ;  $A_{il}$  — фонды ресурса  $l$  на заводе  $i$ ;  $B_{jq}$  — потребность потребителя  $q$  в продукции вида  $j$ ;  $C_{ijq}^{(k)}$  — коэффициенты  $k$ -й целевой функции. В качестве критериев (параметров) оптимизации рассматривались: выпуск в натуральном и стоимостном выражении, себестоимость выпуска, трудозатраты, затраты станко-часов, объем поставок по системе длительных связей (ДС) \*, прибыль, объем транспортной работы в тонно-километрах.

\* Такая система задается подмножеством в множестве пар завод ОЦМ — район потребления.

Таблица 2

Матрица коэффициентов корреляции между критериями оптимизации

Критерии	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1,00	0,94	1,00	0,99	0,96	0,51	0,59	0,02
2	0,94	1,00	0,94	0,93	0,92	0,46	0,49	0,06
3	1,00	0,94	1,00	0,99	0,96	0,53	0,62	-0,01
4	0,99	0,93	0,99	1,00	0,94	0,52	0,60	-0,01
5	0,96	0,92	0,96	0,94	1,00	0,53	0,60	0,00
6	0,51	0,46	0,53	0,52	0,53	1,00	0,47	-0,71
7	0,59	0,49	0,62	0,60	0,60	0,47	1,00	-0,16
8	0,02	0,06	-0,01	-0,01	0,00	-0,71	-0,16	1,00

Всего рассматривалось 174 решения, оцененных по восьми названным критериям. В табл. 1 представлено 8 решений, оптимизирующих перечисленные критерии порознь, и 2 компромиссных. Из этой таблицы следует, что даже среди последних неочевидно лучшее. При компромиссном решении № 1 выпуск близок к оптимально возможному: в натуральном выражении он меньше максимального на 1,2%, а в стоимостном — на 2,7%. В то же время себестоимость выпуска возросла на 20,2%, прибыль уменьшилась на 13,2%, объем транспортной работы в тонно-километрах увеличился более чем в 3,3 раза.

Для анализа решений рассмотрим матрицу коэффициентов парной корреляции между критериями оптимизации (табл. 2). Первые пять критериев связаны тесной корреляционной зависимостью, критерий «объем транспортной работы» — только с объемом поставок по ДС. Также обособлен от остальных и максимум прибыли, который имеет наибольший коэффициент корреляции с выпуском продукции в стоимостном выражении. Очевидно, существует несколько групп критериев, для определения структуры взаимосвязей которых используем факторный анализ. На основе табл. 2 с помощью метода главных компонент находим матрицу факторных нагрузок (табл. 3). Как известно, элементы в этой матрице служат коэффициентами корреляции между критериями (параметрами) и главными компонентами. Элементы строк матрицы являются коэффициентами при компонентах в линейном выражении для соответствующего критерия. Два фактора учитывают около 90% суммарной дисперсии восьми критериев, поэтому рассмотрение остальных факторов нецелесообразно.

Исследуем полученные факторы. Коэффициенты при первом факторе положительны и большинство из них достаточно велико. Данный фактор следует считать наиболее важным: у него высокие коэффициенты корреляции с такими критериями, как выпуск в натуральном и стоимостном выражениях, себестоимость выпуска, трудозатраты, затраты време-

Таблица 3

Матрица факторных нагрузок для 8 критериев оптимизации

Критерии	Факторы		Общность
	I	II	
1	0,99	-0,08	0,98
2	0,95	-0,03	0,91
3	0,99	-0,12	0,99
4	0,98	-0,12	0,97
5	0,97	-0,11	0,95
6	0,44	-0,85	0,91
7	0,63	-0,32	0,50
8	0,12	0,96	0,94
Вклад	5,57	1,57	
Процент суммарной дисперсии	69,6	19,7	

ни работы оборудования и прибыль. Учитывая, что перечисленные критерии отражают разные аспекты, связанные с выпуском, он может быть назван фактором выпуска продукции. Второй фактор имеет на двух подгруппах параметров нагрузки с разными знаками, причем наибольший коэффициент корреляции с объемом транспортной работы, высок и коэффициент корреляции с объемом поставок по ДС. Поскольку рассматриваемый фактор теснее связан с критериями, характеризующими деятельность органов материально-технического снабжения, его можно назвать фактором материально-технического снабжения. Коэффициент корреляции между обоими факторами довольно значителен ( $-0,61$ ), поэтому будем исследовать критерии с коэффициентом корреляции свыше  $0,6$ .

Группировка критериев наглядно представлена в плоскости двух главных факторов (рис. 1). Все группы критериев расположены в первом и четвертом квадрантах, причем проекции критериев на первый фактор имеют одинаковые знаки, на второй — положительная проекция только у объема транспортной работы.

Для определения групп взаимосвязанных критериев и выделения существенных факторов применяется метод экстремальной группировки параметров [10]. Предусматривалось разделение критериев оптимизации на две, три и четыре группы. Выбор числа групп связан с представлением критериев в пространстве параметров (рис. 1).

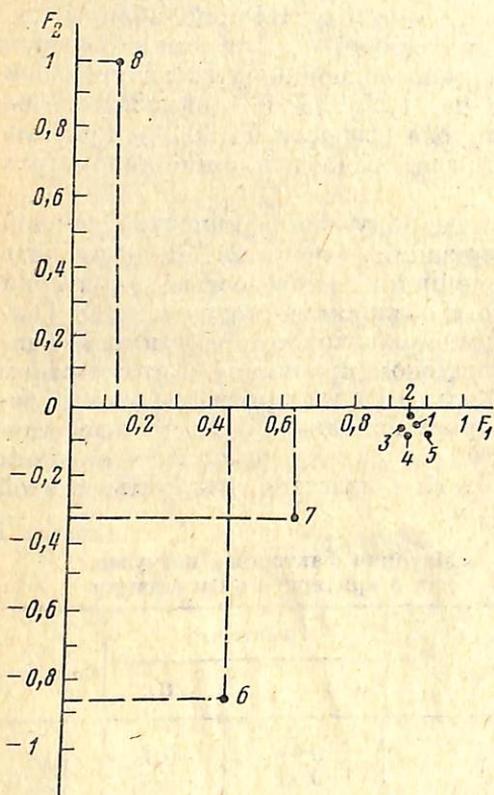


Рис. 1. Представление восьми критериев в пространстве главных факторов

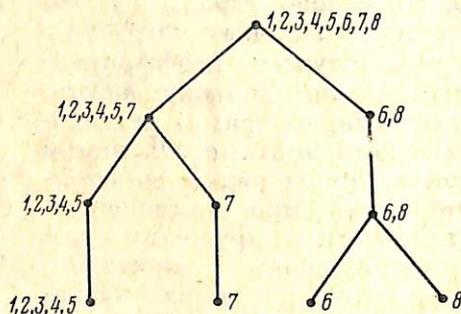


Рис. 2. Иерархическое агломеративное дерево критериев

При разбиении критериев на 2 группы в первую, как и следовало ожидать, входят соответствующие первому фактору, а во вторую — второму. Когда критерии делятся на три группы, в самостоятельную группу выделяется прибыль, в остальном разбиение неизменно. В случае четырех групп объем поставок по ДС и объем транспортной работы остаются постоянными. Дальнейшее дробление нецелесообразно, так как в одну группу входят первые пять рассматриваемых критериев, которые, как показывает корреляцион-

ная матрица, тесно связаны между собой, другие же содержат по одному критерию. Иерархическое агломеративное дерево представлено на рис. 2.

Итак, вместо первоначальных восьми критериев оптимизации может быть рассмотрено не более четырех: выпуск в стоимостном выражении, прибыль, объем поставок по ДС и объем транспортной работы. Первый из этого перечня является представителем группы из пяти первых критериев; он выбран в этом качестве потому, что имеет наибольший коэффициент корреляции с фактором, соответствующим данной группе. Число критериев может быть уменьшено и до трех. В этом случае (рис. 2) объем поставок по ДС и объем транспортной работы объединяются в одну группу, представителем которой служит второй из этих критериев как имеющий наибольший коэффициент корреляции со связанным с ним фактором. Таким образом, если взять только три критерия, то следует обратиться к выпуску в стоимостном выражении, прибыли и объему транспортной работы, а если — два, то эти критерии должны характеризовать, с одной стороны, объем выпуска, с другой — показатели материально-технического снабжения. Такими критериями являются выпуск в стоимостном выражении и объем транспортной работы.

Знание структуры взаимосвязи критериев оптимизации позволяет «сжимать» также и различные компромиссные решения, т. е. выделять из них группы «сходных». Рассмотрим группировку решений по факторам (всего исследовалось 174 решения).

Группировка по первому фактору представлена в табл. 4. Возрастание значений этого фактора в соответствии с его определением связано с увеличением выпуска продукции как в натуральном, так и в стоимостном выражении. Действительно, слева располагаются решения, для которых объем выпуска согласован с заявленной потребностью, справа — обеспечивающие максимум выпуска. В группе находятся решения, близкие по значениям к тем критериям, которые связаны с первым фактором, о чем свидетельствует сравнение величин дисперсии для групп решений и для всей их совокупности. Внутригрупповая дисперсия, как правило, в несравненно раз меньше первоначальной. Однако группы решений очерчены нечетко, кроме того, не представляется возможным выделить решения-представители, которые достаточно полно характеризовали бы свою группу.

Для получения однородных групп и выделения из них типичных решений был применен алгоритм «Форель» [11]. Использовались как первый, так и второй факторы, по каждому решению группировались на две — шесть групп.

Разбиения решений на группы отражает функционал  $I_1$  [6]. Минимальная его величина соответствует разбиению на шесть групп, результаты которого по первому фактору представлены в табл. 5. Каждая группа характеризуется типичным решением, средним значением по каждому параметру, величиной среднеквадратического отклонения, минимальным и максимальным значениями (табл. 5). Такая группировка позволяет разбить диапазон значений выпуска продукции в стоимостном выражении на практически равные интервалы от 2139 до 2590 тыс. руб.

Типичные решения двух первых групп (№ 167 и 80) незначительно отличаются друг от друга, в частности близки значения выпуска в натуральном и стоимостном выражениях; решение № 80 характеризуется меньшей себестоимостью выпуска и, как следствие, большей прибылью. Это решение имеет лучшие показатели и для критериев, соответствующих второму фактору (объем поставок по ДС и объем транспортной работы) более чем в 2 раза лучше аналогичных величин для решения № 167). Однако типичное решение первой группы отвечает оптимальной величине трудозатрат.

Таблица 4

## Группировка решений по первому фактору \*

Шкала значений первого фактора

	-11,1	-10,5	-9,8	-9,1	-8,5	-7,8	-7,1	-6,5	-5,8	-5,1	-4,5	-3,8	-3,1	-2,5	-1,8	-1,1	0,2	0,9	1,5	2,2	2,9	3,5	4,2	4,9
95	94	101	26	101	26	2	30	88	103	88	103	58	59	100	102	102	6	12	6	12	1	7	5	66
	107	105	33	105	33	8	104	99	103	99	103	58	59	100	49	49	45	68	45	68	3	22	9	71
	110	108	36	108	36	11	112	111	103	111	103	58	59	100	114	114	60	81	60	81	4	27	10	72
	161	143	42	143	42	17									149	149	64	83	64	83	44	37	13	74
	163		44		44	23											79	87	79	87	16	40	18	75
	167		46		46	32											89	90	89	90	19	43	20	123
			50		50	38											106	91	106	91	31	53	24	135
			52		52	41											148	152	148	152	34	57	25	140
			55		55	43											165	171	165	171	39	70	28	141
			69		69	46											174		174		62	73	29	142
			78		78	54															77	93	35	143
			80		80	63															86	97	47	144
			85		85	67															96	115	51	150
			92		92	76															130	119	56	155
			98		98	82															131	124	63	156
			109		109	84															146	126	116	158
			117		117	145															162	127	118	159
			133		133	151																154	120	168
						170																160	121	172
																						166	122	
																							125	
																							128	
																							129	
																							132	
																							133	
																							134	
																							136	
																							137	
																							138	
																							139	
																							147	
																							164	
																							169	
																							173	

\* Примечание: в столбцах — номера решений, попавших в соответствующий интервал шкалы; в них выделены группы решений — в больших прямоугольниках, типичные решения каждой группы — в маленьких.

Таблица 5

## Результаты разбиения решения по первому фактору на 6 групп

№ группы	Показатели группы	Критерии							
		1	2	3	4	5	6	7	8
I	Среднее значение	2300	2090	2139	34,5	15,6	570	49,2	5020
	Среднеквадратическое отклонение	0	5	0	1,3	1,1	33	5,3	585
	Минимальное значение	2300	2079	2139	33,8	13,4	532	46,2	4067
	Максимальное значение	2300	2093	2139	37,4	16,2	625	60,8	5547
	Типичное решение № 167	2300	2093	2139	33,8	16,2	606	46,2	4912
II	Среднее значение	2300	2060	2139	35,4	15,9	1208	78,9	2833
	Среднеквадратическое отклонение	1	9	0	0,5	0,4	282	9,2	927
	Минимальное значение	2300	2051	2139	34,1	14,3	697	51,6	1710
	Максимальное значение	2310	2088	2139	37,8	17,3	1693	88,4	4092
	Типичное решение № 80	2310	2060	2139	35,5	15,6	1418	79,0	1713
III	Среднее значение	2433	2195	2265	38,0	17,0	969	70,7	3858
	Среднеквадратическое отклонение	48	58	41	0,9	0,6	461	18,1	986
	Минимальное значение	2374	2117	2212	36,8	16,1	234	43,0	1876
	Максимальное значение	2510	2285	2330	39,3	17,8	1791	95,3	5071
	Типичное решение № 99	2498	2270	2313	39,0	17,4	521	43,0	4906
IV	Среднее значение	2473	2218	2311	38,6	17,3	1459	93,0	2267
	Среднеквадратическое отклонение	11	17	11	0,3	0,1	103	6,1	704
	Минимальное значение	2465	2206	2304	38,4	17,1	1313	84,5	1769
	Максимальное значение	2489	2243	2327	39,0	17,3	1532	97,3	3262
	Типичное решение № 58	2465	2206	2304	38,4	17,3	1532	97,3	1769
V	Среднее значение	2655	2410	2498	41,7	18,4	1698	89,0	2743
	Среднеквадратическое отклонение	42	41	34	0,6	0,3	491	9,3	1028
	Минимальное значение	2594	2335	2439	41,0	17,8	592	65,8	1879
	Максимальное значение	2807	2527	2593	43,8	18,7	2049	105,8	5035
	Типичное решение № 174	2642	2408	2495	41,4	18,6	2035	87,4	2917
VI	Среднее значение	2751	2492	2591	43,1	18,8	1665	97,8	3135
	Среднеквадратическое отклонение	29	27	23	0,4	0,1	374	10,2	1963
	Минимальное значение	2693	2432	2541	42,4	18,5	740	69,5	1854
	Максимальное значение	2807	2549	2631	43,9	18,9	2050	108,5	6395
	Типичное решение № 56	2730	2472	2579	42,8	18,8	1710	107,7	1956

В третьей и четвертой группах решений выпуск продукции в стоимостном выражении в среднем выше, чем во второй, на 3 и 5,3%. Хотя для типичного решения четвертой группы в сравнении с третьей выпуск продукции в натуральном и стоимостном выражении ниже, по ряду других критериев оно более предпочтительно: прибыль для него более чем в 2 раза выше, улучшены и значения критериев, соответствующих второму фактору — объем транспортной работы, например, приближается к оптимальной величине.

Для определения изменения значений критериев при увеличении выпуска продукции в натуральном и стоимостном выражении рассмотрим пятую и шестую группы, охватывающие большую часть всех решений. Выпуск продукции в стоимостном выражении в пятой группе в среднем выше, чем в четвертой, почти на 8%, но ухудшаются значения трудозат-

Таблица 6

**Классификация шести групп решений по двум факторам  
(количество решений в группах) \***

Группы решений по объему транспортной работы (второй фактор) ***	Группы решений по объему выпуска продукции (первый фактор) **						Всего
	1 (2.139)	2 (2.189)	3 (2.265)	4 (2.311)	5 (2.498)	6 (2.590)	
1 (2.224)	—	—	1	2 (58)	16	54 (56)	73
2 (2.917)	—	—	—	—	1 (174)	—	1
3 (3.234)	—	21 (80)	—	1	5	30	57
4 (4.037)	1	1	—	—	—	—	2
5 (4.211)	—	20	4	—	3	7	34
6 (5.143)	5 (167)	—	2 (99)	—	—	—	7
Всего	6	42	7	3	25	91	174

\* В клетках таблицы приведены количества решений, полужирным показаны номера типичных решений для групп разбиений по первому фактору.

\*\* Цифры в скобках — объемы выпуска продукции в среднем по группе, тыс. руб.

\*\*\* Цифры в скобках — объем транспортной работы в среднем по группе, тыс. т/км.

рат, времени работы оборудования. Для типичного решения шестой группы выпуск в натуральном и стоимостном выражениях и прибыль близки к оптимальным, имеют вполне приемлемые значения объем транспортной работы и объем поставок по ДС, ухудшены в сравнении с пятой группой показатели трудозатрат и времени работы оборудования. Таким образом, типичное решение шестой группы может рассматриваться как наиболее удовлетворительное.

Проведем анализ результатов разбиения решений на шесть групп по двум факторам (табл. 6).

Из 36 клеток таблицы 22 оказались практически пустыми, что говорит о высокой связи между полученными группами решений. Значительная часть решений расположена в двух последних столбцах и первых трех строках таблицы. Учитывая важную роль, которую играет первый фактор в изменении значений критериев, в клетках таблицы приведены типичные решения, соответствующие группировке по первому фактору.

Наибольший интерес представляют решения, расположенные в клетке на пересечении первой строки и последнего столбца таблицы. Для этих решений максимум выпуска продукции в натуральном и стоимостном выражениях не приводит к значительному росту объема транспортной работы в тонно-километрах. Как следует из табл. 6, для данной задачи определено 54 решения с аналогичными свойствами.

Рассмотренные средства анализа решений при многокритериальной оптимизации намечено использовать в подсистеме многоцелевого планирования производства подотраслей цветной металлургии.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Борисов. Проблемы векторной оптимизации. Исследование операций. Методологические аспекты. М., «Наука», 1972.
2. Р. Бенайюн, О. Ларичев, Ж. де Монгольфье, Ж. Терни. Линейное программирование при многих критериях: метод ограничений. Автоматика и телемеханика, 1971, № 8.

3. *M. Zeleny*. MCDM Bibliography. 1975. В сб. Lect. Notes Econ. and Math. Syst., 1976.
4. *Г. Харман*. Современный факторный анализ. М., «Статистика», 1972.
5. *Д. Лоули, А. Максвелл*. Факторный анализ как статистический метод. М., «Мир», 1967.
6. *Э. М. Браверман, Н. Е. Киселева, И. Б. Мучник, С. Г. Новиков*. Лингвистический подход к задаче обработки больших массивов информации. Автоматика и телемеханика, 1974, № 11.
7. *С. А. Айвазян, Э. И. Бежаева, О. В. Староверов*. Классификация многомерных наблюдений. М., «Статистика», 1974.
8. *В. М. Жуковская, И. Б. Мучник*. Факторный анализ в социально-экономических исследованиях. М., «Статистика», 1976.
9. *Д. Г. Карпачев, Г. Х. Бабич, Л. И. Мольт*. Применение ЭВМ в планировании производства и организации сбыта цветных металлов. М., «Металлургия», 1976.
10. *Э. М. Браверман*. Методы экстремальной группировки параметров и задача выделения существенных факторов. Автоматика и телемеханика, 1970, № 1.
11. Математическое обеспечение ЕС ЭВМ. Вып. 9. Минск, 1975 (Ин-т математики АН БССР).

Поступила в редакцию  
18 X 1978