

ОПТИМИЗАЦИЯ РАЗВИТИЯ ОТРАСЛИ С КРУПНЫМИ ПРЕДПРИЯТИЯМИ

Я. В. ШЕВЕЛЕВ, А. В. КЛИМЕНКО

(Москва)

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Сформулируем задачу перспективного планирования в отрасли, отвлекаясь от таких факторов, как технический прогресс, возможность строительства предприятий очередями и т.п. Подобная задача рассмотрена в [1] для частного случая постоянной скорости роста спроса на продукцию, неизменной стоимости сырья и в предположении, что построенное предприятие всегда работает на номинальной мощности. Эта гипотеза опровергается в [2]. Зато в [1] изучено влияние неопределенности информации о будущем спросе на продукцию (от этого фактора мы в данной статье абстрагируемся).

Пусть капитальные затраты зависят от установленной мощности Q предприятия и вместе с приведенной к моменту пуска частью эксплуатационных расходов, не зависящей от загрузки предприятия, выражаются функцией $f(Q)$. Будем считать, что $f(Q)$ имеет невозрастающую производную при $Q > 0$ и $f(0) = 0$. Таким образом, $f(Q)$ — выпукла вверх. Оставшиеся эксплуатационные расходы предполагаются пропорциональными текущей производительности предприятия с коэффициентом $c(t) > 0$, который не зависит от установленной мощности предприятия, но меняется со временем. Предположим, что $c(t)e^{-pt}$ — строго убывающая функция времени, может быть, разрывная.

Предприятия данного типа последовательно вводятся в строй в моменты t_j , $0 \leq t_j < T$, $j = 0, 1, \dots, n$, где T — длительность планового периода. Число предприятий $n+1$, моменты их ввода t_j , установленные мощности Q_j и план загрузки, т.е. график изменения суммарной текущей производительности введенных предприятий $q(t)$, подлежат оптимизации по критерию минимума приведенных затрат

$$Z = \sum_{j=0}^n f(Q_j) e^{-pt_j} + \int_0^T c(t) q(t) e^{-pt} dt, \quad (1)$$

где p — норма дисконтирования. При этом в любой момент должен быть удовлетворен плановый спрос $q_c(t)$. Функцию $q_c(t)$ будем считать строго возрастающей; возможны разрывы $q_c(t)$. Если $q_y(t)$ — суммарная установленная ранее момента t мощность, а $m(t)$ — складской запас, то должны выполняться неравенства

$$0 \leq q(t) \leq q_y(t), \quad (2)$$

$$m(t) \geq 0, \quad (3)$$

$$Q_j \geq 0. \quad (4)$$

Установленную в доплановый период мощность и начальный складской запас будем считать равными нулю. Тогда

$$q_y(t) = \sum_{i=0}^{j-1} Q_i, \quad t_{j-1} < t < t_j, \quad (5)$$

$$m(t) = \int_0^t (q(t) - q_c(t)) dt, \quad (6)$$

$$t_0 = 0, \quad t_{n+1} = T. \quad (7)$$

В разд. 2–4 будет показано, что существует оптимальный план со строго положительными вводимыми мощностями Q_j (т. е. с неформальными моментами ввода t_j) со следующей структурой: на каждом интервале (t_{j-1}, t_j) , быть может, в его начале, но не в конце имеется момент переключения t_{nj} с режима отслеживания спроса ($q=q_c, m=0^*$) на режим максимального использования установленной мощности ($q=q_y, m \geq 0$), при котором склад заполняется, а затем опорожняется, так что в момент t_j склад пуст.

2. СТРУКТУРА ПЛАНА ЗАГРУЗКИ ПРЕДПРИЯТИЙ

В оптимальном плане вариации, не нарушающие неравенства (2)–(4), не должны приводить к убыванию Z . Произведем вариацию, локализовав ее на одном интервале (t_{j-1}, t_j) между двумя соседними моментами ввода предприятий. Предположим, что на подынтервале $(t^{(1)}, t^{(2)})$, где $t_{j-1} \leq t^{(1)} < t^{(2)} \leq t_j$, склад не пуст, а предприятия работают с недогрузкой, т. е. $m(t) > 0, 0 < q(t) < q_y(t)$. Тогда возможна вариация $q(t)$ с выработкой малой дополнительной порции продукции в момент $t^{(2)}$ и такой же недовыработкой в момент $t^{(1)}$; недовыработка в ранний момент $t^{(1)}$ возможна, поскольку склад не пуст и $q > 0$. Но такая вариация уменьшает второе слагаемое в (1), так как $c(t)e^{-pt}$ — убывающая функция. Отсюда следует первое условие оптимальности

$$m(t)q(t)(q(t) - q_y(t)) = 0, \quad (8)$$

т. е. на подынтервале, где склад не пуст, предприятия работают на полную мощность ($q=q_y$) или не работают вовсе ($q=0$). На подынтервале, где склад пуст, т. е. $m(t)=0, dm(t)/dt=0$, согласно (6), должно быть $q=q_c$.

Посмотрим, как могут взаимно располагаться подынтервалы трех видов: $q=0, q=q_y, q=q_c$. Покажем, что $q=q_y$ справа оканчивается моментом ввода предприятия t_j . Предположим, что это не так. Тогда справа к $q=q_y$ примыкает либо $q=0$, либо $q=q_c$. В первом случае на стыке подынтервалов $m > 0$, ибо m убывает на подынтервале $q=0$. Но в этих условиях возможна вариация с недовыработкой продукции слева от стыка и компенсирующей выработкой справа от него. Такая вариация уменьшает Z . Во втором случае на стыке $m=0$. Левее стыка m не возрастает, т. е. $q_y \leq q_c$, а правее $q_y > q_c$, что противоречит неубыванию q_c .

Итак, если на интервале (t_{j-1}, t_j) есть подынтервал $q=q_y$, то он оканчивается в точке t_j . Обозначим начало этого подынтервала, т. е. момент переключения на режим максимальной загрузки предприятий, через t_{nj} . Если $t_{nj} \neq t_{j-1}$, то какие подынтервалы могут помещаться между t_{j-1} и t_{nj} ? Пусть там имеется подынтервал $q=0$. На его левой границе $m > 0$. Поэтому

* Здесь и иногда дальше аргумент t опущен.

слева к $q=0$ не может примыкать $q=q_c$. Значит, левая граница подынтервала $q=0$ — момент ввода предприятия t_{j-1} .

Но какой смысл вводить предприятие, зная, что его ожидает простой? Отодвинув момент ввода на конец подынтервала $q=0$, мы не нарушим ограничения (2)–(4) и уменьшим Z . Значит, подынтервалы $q=0$ не существуют в оптимальном плане. Поэтому между t_{j-1} и t_{nj} предприятия загружены в соответствии со спросом, $q=q_c \leq q_y$. Таким образом, чтобы построить оптимальный график загрузки предприятий, достаточно помимо Q_j , t_j знать моменты переключения t_{nj} с $q=q_c$ на $q=q_y$.

3. СУЩЕСТВОВАНИЕ МОМЕНТОВ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯ

Назовем минимальным план с наименьшим n при заданном Z . Покажем, что в оптимальном минимальном плане на любом интервале (t_{j-1}, t_j) есть хотя бы одна точка, где $q=q_y$, так что подынтервал (t_{nj}, t_j) никогда не пуст. Попутно докажем, что

$$\Delta k_j > 0, \quad (9)$$

где

$$\Delta k_j = k(Q_{j-1})e^{-p't_{j-1}} - \begin{cases} k(Q_j)e^{-p't_j} & \text{при } j < n+1, \\ 0 & \text{при } j = n+1, \end{cases} \quad (10)$$

$$k(Q) = \frac{df(Q)}{dQ}, \quad k_j = k(Q_j). \quad (11)$$

Величину Δk_j можно рассматривать как предел в точке $v=0$ для функции

$$\begin{aligned} \Delta k(j, v) &= k(Q_{j-1} + v)e^{-p't_{j-1}} - \\ &- \begin{cases} k(Q_j + v)e^{-p't_j} & \text{при } j < n+1, \\ 0 & \text{при } j = n+1. \end{cases} \end{aligned}$$

Функция $\Delta k(j, v)$ — неубывающая, так что при выполнении (9) для левого предела $(\Delta k_j)_-$ ее правый предел в точке $v=0$ $(\Delta k_j)_+$ тоже положителен, а интеграл

$$\begin{aligned} \delta Z &= \int_0^v (-\Delta k(j, v')) dv' = (f(Q_{j-1} + v) - f(Q_{j-1}))e^{-p't_{j-1}} + \\ &+ \begin{cases} (f(Q_j + v) - f(Q_j))e^{-p't_j} & \text{при } j < n+1, \\ 0 & \text{при } j = n+1, \end{cases} \end{aligned}$$

отрицателен, если $v > 0$. Легко видеть, что этот интеграл дает вариацию Z , когда $q(t)$ не меняется, а установленные мощности варьируются: $\delta Q_{j-1} = -v$, $\delta Q_j = v$ при $j < n+1$.

Подобная вариация, если только она сохраняет установленные мощности неотрицательными, всегда возможна при $v < 0$, а если $q < q_y$ на всем интервале (t_{j-1}, t_j) , допустима и при небольшом положительном v . Поэтому, если (9) доказать для левого предела, то тем самым будет установлена и невозможность выполнения неравенства $q < q_y$ на всем интервале (t_{j-1}, t_j) , лишь при котором имеются условия для вариации $v > 0$, уменьшающей Z в противоречии с оптимальностью исходного плана. Доказывать неравенство (9) нужно лишь, когда $j < n+1$; при $j = n+1$ оно очевидно.

Положим $v < 0$. Если $\Delta k_j < 0$ для левого предела, то подынтегральная функция в формуле для δZ положительна при всех $v' < 0$ и интеграл отрицателен в противоречии с оптимальностью плана. Если $\Delta k_j = 0$ для левого предела, то подынтегральная функция равна нулю (положительной она не

могла бы стать ввиду оптимальности плана) вплоть до обращения Q_j в нуль. Но это означает, что исходный план не минимальный — имеется план с меньшим n и тем же Z . Тем самым доказано (9) и выполнение $q=q_y$ хотя бы в одной точке интервала (t_{j-1}, t_j) , т.е. существование t_{nj} .

4. ОПТИМАЛЬНЫЕ УСТАНОВЛЕННЫЕ МОЩНОСТИ

Покажем, что существует оптимальный план, в котором склады пусты перед вводом любого предприятия и в момент T , т.е.

$$m_j=0, \quad j=1, \dots, n+1, \quad (12)$$

где

$$m_j=m(t_j). \quad (13)$$

Для такого плана без затруднений вычисляются оптимальные установленные мощности. Очевидно, если $m_{n+1}>0$, то план можно улучшить, уменьшив мощность q перед моментом T ; поэтому в любом оптимальном плане $m_{n+1}=0$.

Пусть имеется минимальный оптимальный план, в котором $m_j>0$, $j<n+1$. Произведем вариацию, локализованную на интервале (t_{j-1}, t_{j+1}) , при которой меняются m_j , Q_{j-1} , Q_j и, если $j<n$, то и Q_{j+1} . Моменты ввода и переключения не меняются. Условия локализации этой вариации: $\delta m_j=(t_j-t_{nj})\delta Q_{j-1}$, $\delta m_j+(t_{j+1}-t_j)\delta Q_j=0$ ($\delta Q_{j-1}+\delta Q_j+\delta Q_{j+1}=0$ при $j<n$) дают линейную связь вариаций вводимых мощностей с δm_j . Так как Z — выпуклую вверх функцию вводимых мощностей (интегральный член в (1) линеен по вводимым мощностям и не нарушает выпуклости), то она — выпуклая вверх функция δm_j . Значение $\delta m_j=0$ является точкой минимума Z . Точка $\delta m_j=0$ лежит строго внутри интервала значений δm_j , совместимых с условиями (3), (4). Выпуклая вверх функция может принимать минимальное значение во внутренней точке, только когда она постоянна на всем интервале допустимых значений. Если бы уменьшение m_j было ограничено нарушением (4), то можно было бы получить план с меньшим n и тем же значением Z , чего быть не может, так как исходный план — минимальный. Значит, можно уменьшить m_j до нуля, сохраняя неизменным Z . Таким образом, среди минимальных оптимальных планов данной задачи всегда есть план с пустыми складами для всех t_j ; в дальнейшем только такие планы и будем рассматривать.

Первоначально это положение было доказано с помощью громоздких выкладок. Приведенное доказательство любезно предложено А. Д. Вирцевым и независимо от него В. З. Бельским, который установил, что аналогичные рассуждения можно было бы применить для доказательства гипотезы максимальной отсрочки [3] при выпуклой вверх затратной характеристике.

Обозначим

$$\Delta t_j=t_j-t_{nj}, \quad q_{cj}=\int_{t_{nj}}^{t_j} q_c(t) dt / \Delta t_j, \quad q_{co}=0. \quad (14)$$

Тогда из (12) следует

$$Q_j=q_{c,j+1}-q_{cj}, \quad \sum_{i=0}^{j-1} Q_i=q_{cj}, \quad (15)$$

поэтому набор значений t_j , t_{nj} определяет и установленные мощности предприятий, и график их загрузки. Подставив (15) в (1), получим

$$Z = \sum_{j=1}^{n+1} \left(f(q_{cj} - q_{c,j-1}) e^{-p't_{j-1}} + \int_{t_{j-1}}^{t_{nj}} c(t) q_c(t) e^{-p't} dt + q_{cj} \int_{t_{nj}}^{t_j} c(t) e^{-p't} dt \right), \quad (16)$$

так что определяется и функционал.

5. ОПТИМАЛЬНЫЕ МОМЕНТЫ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯ

Выражение для определения оптимальных моментов переключения можно получить, либо произведя соответствующую вариацию, либо дифференцируя (16) по t_{nj} , имея в виду, что, согласно (14),

$$dq_{cj}/dt_{nj} = (q_{cj} - q_c(t_{nj})) / \Delta t_j.$$

Получим

$$\frac{\partial Z}{\partial t_{nj}} = \frac{q_{cj} - q_c(t_{nj})}{\Delta t_j} (\Delta k_j - u_j(t_{nj})), \quad (17)$$

где

$$u_j(t) = \int_t^{t_j} (c(t) e^{-p't} - c(t') e^{-p't'}) dt'. \quad (18)$$

Функция $u_j(t)$ — монотонная, убывающая до нуля при $t = t_j$. Поэтому $\Delta k_j - u_j(t)$ либо положительно на всем интервале (t_{j-1}, t_j) , либо внутри него проходит через нуль в точке t_{0j} , т. е.

$$(\Delta k_j - u_j(t_{0j}))_+ \geq 0 \geq (\Delta k_j - u_j(t_{0j}))_-, \quad (19)$$

будучи положительна при $t > t_{0j}$ и отрицательна при $t < t_{0j}$. Первый сомножитель в (17) неотрицателен. Оптимальное t_{nj} определяется следующими возможными ситуациями: а) корень (19) меньше t_{j-1} ; уменьшение t_{nj} ведет к уменьшению Z ; оптимальное t_{nj} совпадает с t_{j-1} ; б) корень (19) больше t_{j-1} , тогда t_{0j} — оптимальное значение t_{nj} . Таким образом,

$$t_{nj} = \max(t_{j-1}, t_{0j}). \quad (20)$$

Так как $u_j(t_j) = 0$, то в силу (9) $t_{0j} < t_j$, вследствие чего интервал (t_{nj}, t_j) не только не пуст, но и имеет ненулевую длину.

6. ОПТИМАЛЬНЫЕ МОМЕНТЫ ВВОДА ПРЕДПРИЯТИЙ

Как и в предыдущем разделе, выражение для оптимальных моментов t_j можно получить либо с помощью соответствующей вариации, либо дифференцированием Z по t_j . В последнем случае нужно учитывать возможную зависимость от t_j моментов переключения. Если момент переключения t_{nj} равен t_{0j} , то изменение t_{nj} можно игнорировать, поскольку $\partial t_{nj} / \partial t_j$ конечно, а производная от Z по t_{nj} равна нулю. От t_j может зависеть $t_{n,j+1}$, если $t_{n,j+1} = t_j$; в этом случае надо учитывать зависимость Z от $t_{n,j+1}$. Помимо явного вхождения в Z величина t_j входит в Z неявно через q_{cj} . Аналогично $t_{n,j+1}$ входит не только явно, но и посредством $q_{c,j+1}$. Учитывая все эти обстоятельства,

$$\frac{\partial Z}{\partial t_j} = -pf(Q_j) e^{-p't_j} + (q_c(t_j) - q_{cj}) (p_j e^{-p't_j} - c(t_j) e^{-p't_j}) +$$

$$+(q_{c,j+1}-q_c(t_j))(\pi_{j+1}e^{-p't_{j+1}}-c(t_j)e^{-p't_j}) \cdot \begin{cases} 0 & \text{при } t_{0,j+1} > t_j, \\ 1 & \text{при } t_{0,j+1} < t_j, \end{cases} \quad (21)$$

где

$$\pi_j e^{-p't_j} = \left(\Delta k_j + \int_{t_{nj}}^{t_j} c(t) e^{-p't} dt \right) / \Delta t_j. \quad (22)$$

Если правая часть (21) непрерывна при оптимальном t_j , то она должна обратиться в нуль в этой точке. Однако функции $q_c(t)$, $c(t)$ могут изменяться скачком. Если скачки приходятся на точку оптимума, то должны выполняться условия оптимальности более общего вида

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial t_j} \right)_+ \geq 0 \geq \left(\frac{\partial Z}{\partial t_j} \right)_-, \quad (23)$$

где плюс и минус означают, что производная берется справа или слева.

7. ЦЕНА ПРОИЗВОДСТВА ПРОДУКЦИИ

В соответствии с общим взглядом на цены как инструмент оптимального планирования, «цену производства» $\pi(t)$ следует определить как минимальные дополнительные удельные синхронные эквивалентные затраты на выработку к моменту t бесконечно малого количества дополнительной продукции. Синхронность затрат означает, что они делаются в момент выдачи сверхплановой продукции, а эквивалентность — что эти затраты после приведения увеличивают функционал Z так же, как он увеличивается на самом деле. Минимальность следует понимать так, что план, ранее не приспособленный к выработке дополнительной продукции, перестраивается оптимально на всем интервале $(0, T)$. Сверхплановая порция продукции δm_i будет выдана к моменту t за счет увеличения Z на

$$\delta Z = \pi(t) e^{-p't} \delta m_i. \quad (24)$$

Покажем прежде всего, что

$$\pi_i = \pi(t_i - 0), \quad (25)$$

т. е. определяемая (22) величина π_i — «цена производства» непосредственно перед вводом предприятия i . С этой целью перепишем (6), имея в виду структуру оптимального плана,

$$m_j = \sum_{i=1}^j \left(\sum_{l=0}^{i-1} Q_l - q_{ci} \right) \Delta t_i, \quad j=1, \dots, n+1. \quad (26)$$

Здесь Δt_i и q_{ci} вычисляются по (14). Разрешим (26) относительно Q_i

$$Q_i = \frac{m_{j+1} - m_j}{\Delta t_{j+1}} - \frac{m_j - m_{j-1}}{\Delta t_j} + q_{c,j+1} - q_{cj}, \quad \sum_{i=0}^{j-1} Q_i = \frac{m_j - m_{j-1}}{\Delta t_j} + q_{cj}. \quad (27)$$

Подставив (15) в (16) и используя (27), получим явную зависимость Z от m_j . Проидифференцируем Z по m_j , используя (22)

$$\frac{\partial Z}{\partial m} = \pi_j e^{-p't_j} - \pi_{j+1} e^{-p't_{j+1}}. \quad (28)$$

Наряду с основной задачей (1)–(7) рассмотрим ее модификацию, где непосредственно перед оптимальным для основной задачи моментом ввода

предприятия i со склада забирается малая порция продукции δm_i . Это можно выразить и иначе: в малой левой окрестности t_i спрос увеличивается без нарушения строгого возрастания функции $q_c(t)$. Поэтому структура оптимального плана модифицированной задачи останется прежней. Моменты t_j могут сместиться, но, так как они выбирались оптимальными, при расчете изменения $\mathcal{Z}$ этим сдвигом можно пренебречь. То же относится и к $t_{nj}=t_{oj}$. Мощности Q_j не могут остаться теми же, так как изменится соотношение (26). Левая часть (26) теперь уже не запас в момент t_j , а $m_j' = m_j + \theta_{ji}\delta m_i$, $\theta_{ji}=0$ при $j < i$, $\theta_{ji}=1$ при $j \geq i$.

Вместо (27) получим то же выражение, что и в основной задаче, но место m_j займет величина m_j' . Как в основной, так и в модифицированной задаче склады пусты в моменты t_j , т. е. $m_j=0$. Поэтому $m_j' = \theta_{ji}\delta m_i$, а изменение $\mathcal{Z}$ при переходе к модифицированной задаче

$$\delta \mathcal{Z} = \sum_{j=1}^{n+1} \left(\frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial m_j} \right) \theta_{ji} \delta m_i. \quad (29)$$

Таким образом, согласно (28) и (29),

$$\delta \mathcal{Z} = \delta m_i \sum_{j=1}^{n+1} (\pi_j e^{-p t_j} - \pi_{j+1} e^{-p t_{j+1}}) \theta_{ji} = \delta m_i \pi_i e^{-p t_i},$$

и, сопоставляя с (24), убеждаемся в справедливости (25).

Подсчитаем цену для подынтервала, где есть резерв мощности, $q = q_c < q_s$. С этой целью рассмотрим модифицированную задачу, в которой q_c изменено в окрестности момента t так, чтобы было выпущено дополнительное количество продукции δm_i . Планы, оптимальные для основной и модифицированной задач, будут иметь совершенно одинаковые t_j , Q_j . Они различаются только графиками $q(t)$ на подынтервале (t_{j-1}, t_{nj}) , где $q = q_c$. Поэтому, согласно (16),

$$\delta \mathcal{Z} = c(t) e^{-p t} \delta m_i,$$

так что в соответствии с (24)

$$\pi(t) = c(t). \quad (30)$$

На подынтервале, где $m > 0$, безразлично, в какой момент увеличилось q_c ; это одинаково отразится на изменении плана. Поэтому

$$\pi(t) e^{-p t} = \pi_j e^{-p t_j}, \quad t_{oj} \leq t \leq t_j. \quad (31)$$

8. НЕКОТОРЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ЦЕН

Используя (18), (19), (22), нетрудно показать, что (30), (31) дают одно и то же значение цены в момент переключения, если $t_{nj} > t_{j-1}$, т. е.

$$c(t_{nj}) e^{-p t_{nj}} = \pi_j e^{-p t_j}. \quad (32)$$

Имеют место два важных неравенства

$$\pi_j e^{-p t_j} \geq c(t_{nj}) e^{-p t_j}, \quad (33)$$

$$\pi_j e^{-p t_j} \geq \pi_{j+1} e^{-p t_{j+1}}. \quad (34)$$

Из (22) и (18) следует, что

$$\pi_j e^{-p t_j} = (\Delta k_j - u(t_{nj}) + \Delta t_j c(t_{nj}) e^{-p t_{nj}}) / \Delta t_j.$$

Но $(\Delta k_j - u(t_{nj})) = 0$, если $t_{oj} > t_{j-1}$, или положительно. Отсюда следует (33), причем равенство будет при $t_{oj} > t_{j-1}$.

Докажем (34). Пусть в оптимальном плане выполняется обратное неравенство. Рассмотрим модифицированную задачу, у которой спрос в левой окрестности t_j увеличен так, что здесь требуется дополнительное количество продукции δm_j , а в левой окрестности t_{j+1} спрос уменьшен, поэтому потребитель недополучает δm_j . В модифицированной задаче функционал отличается от функционала основной на

$$\delta Z = (\pi_j e^{-p t_j} - \pi_{j+1} e^{-p t_{j+1}}) \delta m_j,$$

причем $\delta Z < 0$. Оптимальный план модифицированной задачи является допустимым для основной; при его реализации между моментами t_j и t_{j+1} на складе будет находиться избыток продукции δm_j . Между тем функционал Z при использовании плана модифицированной задачи в качестве плана основной уменьшится. Установленное противоречие доказывает справедливость (34), а фактически — более общего положения: «цена» бесплатно складываемой и непортящейся продукции не может расти быстрее, чем $e^{p t}$. Заметим, что неравенства (9) и (34) выполняются в случае $k(Q) = \text{const}$ не только в оптимальном плане, но и при неоптимальных значениях t_j . Для (9) это очевидно. Для (34) в случае $t_{0,j+1} > t_j$, используя (32), убывание $c(t) e^{-p t}$ и (33), получим

$$\pi_{j+1} e^{-p t_{j+1}} = c(t_{n,j+1}) e^{-p t_{n,j+1}} < c(t_j) e^{-p t_j} \leq c(t_{nj}) e^{-p t_{nj}} \leq \pi_j e^{-p t_j}.$$

В случае $t_{0,j+1} = t_j$

$$\begin{aligned} \pi_j e^{-p t_j} - \pi_{j+1} e^{-p t_{j+1}} &= \left(\left(\int_{t_{nj}}^{t_j} c(t) e^{-p t} dt \right) / \Delta t_j - \left(\int_{t_j}^{t_{j+1}} c(t) e^{-p t} dt \right) / \Delta t_{j+1} \right) + \\ &+ p k e^{-p t_j} \left(\frac{t_j - t_{j-1}}{\Delta t_j} \frac{e^{z_j} - 1}{z_j} - \frac{1 - e^{-z_{j+1}}}{z_{j+1}} \right), \quad z_j = (t_j - t_{j-1}) p, \quad z_{j+1} = (t_{j+1} - t_j) p. \end{aligned}$$

Первое слагаемое — разность средних значений убывающей функции на соседних интервалах — положительно. Второе увеличится от замены $(t_j - t_{j-1}) / \Delta t_j$ единицей, после чего оно станет положительной величиной при любых положительных z_j, z_{j+1} . Значит, (34) строго выполняется при $k = \text{const}$ для любого упорядоченного набора t_j . При произвольной малой вариации функции спроса вместо (24) записывается

$$\delta Z = \int_0^T \pi(t) e^{-p t} \delta q_c(t) dt. \quad (35)$$

Величину

$$B = \int_0^T \pi(t) e^{-p t} q_c(t) dt \quad (36)$$

назовем приведенной выручкой за проданную по цене $\pi(t)$ продукцию. Соотношение (35) можно интерпретировать таким образом, что при малых изменениях спроса разница между приведенными затратами и выручкой не меняется

$$\delta(Z - B) = 0. \quad (37)$$

Нетрудно получить выражение для этой стационарной величины. Перепишем (36), имея в виду (30), (31), (14), (15),

$$B = \sum_{j=1}^{n+1} \left(\int_{t_{j-1}}^{t_{nj}} c(t) e^{-p t} q_c(t) dt + q_{cj} \Delta t_j \pi_j e^{-p t_j} \right). \quad (38)$$

Используя (22), из (16) и (38) получим

$$З - В = \sum_{j=0}^n (f(Q_j) - k_j Q_j) e^{-p t_j}. \quad (39)$$

Так как $f(Q)$ — выпуклая вверх функция, $f(Q) - k(Q)Q \geq 0$, так что приведенные затраты превышают приведенную выручку, за исключением случая, когда f пропорционально Q . Предприятия с выпуклой вверх производственной характеристикой не самокупаются. Хозяйственный расчет для них возможен, но его формы специфичны.

Таким образом, получены структура оптимального плана и уравнения для параметров t_{nj} , t_j , Q_j , полностью определяющих его при известном числе предприятий. План с такими параметрами локально оптимален: любого типа малые отклонения от него увеличивают функционал или оставляют его неизменным. Вопрос о числе локальных оптимумов и об оптимальном числе предприятий остается открытым. Получены также «цены», позволяющие объединять данную задачу с другими задачами оптимального планирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. И. Арушанян, В. З. Бельский, А. М. Белостоцкий, С. В. Образцов. Стационарная оптимизационная модель развития капиталоемкой отрасли. Экономика и матем. методы, 1977, т. XIII, вып. 6.
2. А. Д. Вирцер, Ю. И. Корякин, В. Л. Локин, С. Я. Чернавский. Математическая модель оптимизации системы топливоснабжения развивающейся ядерной энергетики. Атомная энергия, 1974, т. 37, вып. 2.
3. В. З. Бельский. Оптимальное развитие производства при стационарно растущем спросе. Экономика и матем. методы, 1979, т. XV, вып. 4.

Поступила в редакцию
3 IV 1979