ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ 1981 Том XVII, вып. 1

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

ПЕРЕХОД К БЕСКОНЕЧНОМУ ЧИСЛУ УЧАСТНИКОВ В МОДЕЛИ ГРУППОВОГО ВЫБОРА

А. С. ТАНГЯН

(Москва)

В литературе неоднократно обсуждался парадокс Эрроу [1], согласно которому коллективное решение не может удовлетворять одновременно нескольким естественным, на первый взгляд, условиям. П. Фишберн показал, что те же условия совместимы в модели с бесконечным числом участников [2]. Из парадокса Эрроу следует, что все коллективные решения принимаются неким «диктатором». Из результата Фишберна вытекает, что «диктатора» может и не быть. Возникает вопрос: имеет ли бесконечная модель содержательную интерпретацию, и если да, то как объяснить противоречие между конечной и бесконечной моделями?

К замене конечных моделей бесконечными часто прибегают в прикладных исследованиях. Некоторые явления, не наблюдаемые в конечной модели, прослеживаются в бесконечной, а интерпретации при необходимом обосновании распространяются на конечный случай в качестве тенденций, проявляющихся при расширении модели. Обращение к бесконечной модели оправдано в случае, когда перед исследователем стоят задачи не количественного, а качественного анализа. Понятия же *большого* и *малого* плохо поддаются разграничению, так как вопреки своей количественной природе они отражают разное качество. Однако для формализованных методов исследования необходимы система символов и правила обращения с ними, соответствующие правилам обращения с этими понятиями. Их замена понятиями *конечного* и *бесконечного* как раз освобождает модель от внутренних противоречий и создает предпосылки для теоретико-множественных методов исследования. Более того, поскольку с теоретико-множественной, логической и топологической точек зрения все конечные структуры и последовательности операций обладают идентичными свойствами, только переход к бесконечности позволяет получить принципиально новые результаты и обнаружить новые закономерности. Таким образом, возникают качественно разные методы для изучения большого и малого.

Напомним, что к бесконечным моделям прибегают, например, в механике, когда большое, но конечное число молекул жидкости заменяют непрерывной средой, или в математической экономике, когда совершенную конкуренцию изучают на континууме участников. Именно так Ж. Дебрё, Г. Скарф, Р. Ауман, И. Каннаи и В. Хильденбранд доказали гипотезу Ф. Эджворта о совпадении ядра «большой» конкурентной экономики с множеством ее равновесных состояний [3–7]. Для этого было показано, как увеличение числа участников в конечной модели рынка приводит в пределе к континуальной модели, где ядро уже совпадает с множеством равновесных состояний.

В настоящей работе предлагается подобное обоснование модели группового выбора с бесконечным числом участников. Такая модель представляется через предел последовательности расширяющихся конечных моделей. Тем самым строго определяется, в каком смысле бесконечная и конечная модели аппроксимируют друг друга. С помощью понятия решающей иерархии, введенного в [8], удается объяснить исчезновение «диктатора» в бесконечной модели группового выбора: с увеличением числа участников «диктатор», возглавляющий решающую иерархию, все реже выражает коллективное предпочтение в одиночку, а выступает совместно с другими участниками из иерархии (это иллюстрирует числовая таблица в заключении работы); тем самым роль «диктатора» перенимает решающая иерахия, которая в пределе может его полностью заместить.

МОДЕЛЬ ГРУППОВОГО ВЫБОРА

Сначала напомним необходимые определения и аксиомы; они рассматривались в [8], поэтому здесь приводятся без комментариев.

Пусть X — непустое множество альтернатив.

Определение 1. Бинарное отношение P на X называется п р е д п о ч т е н и е м, если оно: а) асимметрично, т. е. из $(x, y)\in P$ следует $(y, x)\notin P$ для любых $x, y\in X$; б) транзитивно, т. е. из $(x, y)\in P$ и $(y, z)\in P$ следует $(x, z)\in P$ для любых $x, y, z\in X$. Если $(x, y)\in P$ для $x, y\in X$, говорим, что x предпочтительнее y. Множество всех предпочтений на X обозначим через $\mathfrak{R}$.

Общая часть — пересечение — любого числа предпочтений на X (как подмножеств $X\times X$) есть снова предпочтение на X.

Определение 2. Предпочтение P на X называется с л а б ы м у п о р я д о ч е н и е м, если оно отрицательно транзитивно, т. е. из $(x, y)\notin P$ и $(y, z)\notin P$ следует $(x, z)\notin P$ для любых $x, y, z\in X$.

Пусть V — непустое множество участников.

Определение 3. М н о ж е с т в о м к о а л и ц и й называется булева алгебра $\mathfrak{A}$ на множестве участников V (т. е. непустая система подмножеств множества V, замкнутая относительно операций взятия конечного объединения $\cup$, пересечения $\cap$ и дополнения $(\cdot)^c$). Коалицией называется всякий ненулевой элемент (непустое подмножество) из $\mathfrak{A}$. Коллективом (группой, обществом) называется единица алгебры $\mathfrak{A}$ — множество всех участников V.

Сведения о булевых алгебрах приводятся, например, в [9, 10].

Определение 4. Отображение $f\colon V\to\mathfrak{R}$, ставящее каждому участнику $v\in V$ в соответствие некоторое предпочтение $f(v)$ на X, называется с и т у а ц и е й, если f удовлетворяет условию измеримости: $\{v\in V\colon (x, y)\in f(v)\}\in\mathfrak{A}$ для каждой пары альтернатив $x, y\in X$. Обозначим через $f(A)$ общую часть предпочтений участников коалиции $A\in\mathfrak{A}$, т. е. предпочтение $f(A)=\cap\{f(v)\colon v\in A\}$. Множество всех ситуаций обозначим через F.

Выпишем а к с и о м ы г р у п п о в о г о в ы б о р а.

А.1. Число альтернатив $|X|\geqslant 3$.

А.2. При каждой ситуации $f\in F$ существует и единственно групповое предпочтение $\sigma(f)$ на X, причем если при ситуации f предпочтения $f(v)$ всех участников $v\in V$ являются слабыми упорядочениями, то и соответствующее групповое предпочтение $\sigma(f)$ также является слабым упорядочением.

А.3. Соблюдается принцип единогласия: $f(V)\subset\sigma(f)$ при любой ситуации $f\in F$.

А.4. Групповое предпочтение на паре альтернатив не зависит от индивидуальных предпочтений на других альтернативах, т. е. если на паре альтернатив $x, y\in X$ две ситуации $f, g\in F$ совпадают: $f(v)\cap\{(x, y), (y, x)\}=g(v)\cap\{(x, y), (y, x)\}$ для всех $v\in V$, то при этих ситуациях на этой паре альтернатив совпадают и групповые предпочтения: $\sigma(f)\cap\{(x, y), (y, x)\}=\sigma(g)\cap\{(x, y), (y, x)\}$.

Отображение σ: $F\to\mathfrak{R}$, удовлетворяющее аксиомам А.1 – А.4, называется агрегирующей функцией Эрроу, или просто агрегирующей функцией.

Определение иерархии приведем сразу в алгебраических терминах.

Определение 5. Максимальной иерархией называется ультрафильтр алгебры $\mathfrak{A}$, т. е. подмножество H ее ненулевых элементов (коалиций) такое, что: а) из $A\in H$, $A\subset B$, $B\in\mathfrak{A}$ следует $B\in H$; б) из A, $B\in H$ следует $A\cap B\in H$; в) для любого $A\in\mathfrak{A}$ либо $A\in H$, либо $A^c\in H$. Максимальная иерархия H называется решающей при агрегирующей функции σ, если $f(A)\subset\sigma(f)$ при каждой ситуации $f\in F$ для каждой коалиции A из иерархии H.

В [8] доказана теорема о биекции.

Теорема 1. *Если H — максимальная иерархия (ультрафильтр), то правило: $\sigma(f)=\cup\{f(A): A\in H\}$ при каждой ситуации $f\in F$ определяет агрегирующую функцию Эрроу σ: $F\to\mathfrak{R}$. Такое соответствие между множеством максимальных иерархий (ультрафильтров) и множеством агрегирующих функций Эрроу взаимно-однозначно.*

ВЛОЖЕНИЯ МОДЕЛЕЙ ГРУППОВОГО ВЫБОРА

В этом разделе определяется, как понимать увеличение числа участников в модели группового выбора, т. е. каким образом модель с бо́льшим числом участников согласовать с данной.

Как и в [8], алгебраической моделью группового выбора будем называть тройку $(\mathfrak{A}, F, \sigma)$, где $\mathfrak{A}$ — булева алгебра коалиций на некотором множестве участников V; F — множество ситуаций при данном множестве альтернатив X, а σ — агрегирующая функция Эрроу.

Определение 6. Алгебраическая модель группового выбора $(\mathfrak{A}, F, \sigma)$ изоморфно вкладывается в алгебраическую модель группового выбора $(\mathfrak{A}', F', \sigma')$, определенную для того же множества альтернатив, если существует такой изоморфизм φ алгебры $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{A}'$, что $\sigma(f)\subset\sigma'(f')$ при каждых ситуациях $f\in F$, $f'\in F'$, удовлетворяющих условию $f'(\varphi(A))=f(A)$ для всех коалиций $A\in\mathfrak{A}$. Если φ — изоморфизм «на», то модели называются изоморфными *. Если алгебра $\mathfrak{A}$ является подалгеброй алгебры $\mathfrak{A}'$, а φ — тождественный изоморфизм, то будем говорить, что первая модель вложена во вторую.

Изоморфное вложение в смысле последнего определения означает, что множество участников первой модели с сохранением коалиционной структуры помещается во множество участников второй модели, а продолжение ситуаций не меняет группового предпочтения. Прежде чем формулировать это в виде строгого утверждения, напомним, что гомоморфизм φ булевой алгебры $\mathfrak{A}$ на множестве V в булеву алгебру $\mathfrak{A}'$ на множестве V' индуцируется поточечным отображением ψ множества V' в множество V, если $\varphi(A)=\psi^{-1}(A)$ для любого элемента $A\in\mathfrak{A}$. Если, например, алгебра $\mathfrak{A}$ совершенна (булева алгебра $\mathfrak{A}$ на множестве V называется совершенной, если каждый ее ультрафильтр H определяется некоторой точкой $v\in V$, т. е. $H=\{A\in\mathfrak{A}: v\in A\}$), то каждый гомоморфизм алгебры

---

* В этом случае $\sigma(f)=\sigma'(f')$ при каждых ситуациях $f\in F$, $f'\in F'$, удовлетворяющих условию $f'(\varphi(A))=f(A)$ для всех коалиций $A\in\mathfrak{A}$. Действительно, пусть $H\subset\mathfrak{A}$ и $H'\subset\mathfrak{A}'$ — ультрафильтры, соответствующие агрегирующим функциям σ и σ' по теореме 1. По приводимой в этом разделе лемме тогда $\varphi(H)=H$, следовательно, $\sigma(f)=\cup\{f(A): A\in H\}=\cup\{f'(\varphi(A)): A\in H\}=\cup\{f'(A'): A'\in H'\}=\sigma'(f')$, что и требовалось.

$\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{A}'$ на множестве V' индуцируется поточечным отображением [9, стр. 55].

Предложение 1. *Пусть* $(\mathfrak{A}, F, \sigma)$ *и* $(\mathfrak{A}', F', \sigma')$ *— две алгебраические модели группового выбора, определенные для одного множества альтернатив и множеств участников* V *и* V' *соответственно. Если первая модель изоморфно вкладывается во вторую, а изоморфизм* φ *из определения 6 индуцируется поточечным отображением* Ψ *множества* V' *в* V, *то* $\sigma(f)=\sigma'(f')$ *при всех ситуациях* $f\in F$, $f'\in F'$, *удовлетворяющих условию* $f(\psi(v'))=f'(v')$ *для всех* $v'\in V'$. *Наоборот, если существует отображение* ψ *множества* V' *в* V, *индуцирующее изоморфизм алгебры* $\mathfrak{A}$ *в* $\mathfrak{A}'$, *и такое, что* $\sigma(f)=\sigma'(f')$ *при всех ситуациях* $f\in F$, $f'\in F'$, *удовлетворяющих условию* $f(\psi(v'))=f'(v')$ *для всех* $v'\in V'$, *то первая модель изоморфно вкладывается во вторую.*

Лемма. *Пусть* $(\mathfrak{A}, F, \sigma)$ *и* $(\mathfrak{A}', F', \sigma')$ *— две алгебраические модели группового выбора, определенные для одного множества альтернатив, и пусть* $H\subset\mathfrak{A}$ *и* $H'\subset\mathfrak{A}'$ *— ультрафильтры, соответствующие агрегирующим функциям* σ *и* σ' *по теореме 1. Для того чтобы первая модель изоморфно вкладывалась во вторую, необходимо и достаточно, чтобы существовал изоморфизм* φ *алгебры* $\mathfrak{A}$ *в* $\mathfrak{A}'$ *такой, что* $\{\varphi(A)\colon A\in H\}\subset H'$, *причем если такой изоморфизм существует, то он совпадает с изоморфизмом из определения 6.*

Доказательство. Пусть модель $(\mathfrak{A}, F, \sigma)$ изоморфно вкладывается в модель $(\mathfrak{A}', F', \sigma')$. По определению 6 это означает, что существует такой изоморфизм φ алгебры $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{A}'$, что $\sigma(f)\subset\sigma'(f')$ при каждых ситуациях $f\in F$ и $f'\in F'$, удовлетворяющих условию $f'(\varphi(A))=f(A)$ для всех коалиций $A\in\mathfrak{A}$. Покажем, что тогда $\{\varphi(A)\colon A\in H\}\subset H'$. Предположим противное, т. е. что существует элемент $A\in H$ и $\varphi(A)\notin H'$. Так как H' — ультрафильтр, то $(\varphi(A))^c\in H'$. Определим две ситуации: $f\in F$ и $f'\in F'$. Зафиксируем альтернативы $x, y\in X$ и положим $f(v)=\{(x, y)\}$, если $v\in A$; $f(v)=$ $=\{(y, x)\}$, если $v\in A^c$; $f'(v')=\{(x, y)\}$, если $v'\in\varphi(A)$; $f'(v')=\{(y, x)\}$, если $v'\in(\varphi(A))^c$. Из $A\in H$ и $(\varphi(A))^c\in H'$ по теореме 1 следует $(x, y)\in\sigma(f)$ и $(y, x)\in\sigma'(f')$. Так как φ — изоморфизм, то $\varphi(B)\neq\varnothing$ для любой коалиции $B\in\mathfrak{A}$ и, как легко убедиться, ситуации f и f' удовлетворяют условию определения 6, поэтому $\sigma(f)\subset\sigma'(f')$ и, следовательно, (x, y), $(y, x)\in\sigma'(f')$, что невозможно, поскольку $\sigma'(f')$ асимметрично в силу А.2. Полученное противоречие доказывает, что $\{\varphi(A)\colon A\in H\}\subset H'$. Необходимость установлена.

Пусть теперь φ — такой изоморфизм алгебры $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{A}'$, что $\{\varphi(A)\colon A\in$ $\in H\}\subset H'$, а ситуации $f\in F$ и $f'\in F'$ удовлетворяют условию $f(A)=f'(\varphi(A))$ для всех коалиций $A\in\mathfrak{A}$. Тогда в силу теоремы 1 справедливы следующие соотношения: $\sigma(f)=\cup\{f(A)\colon A\in H\}=\cup\{f'(\varphi(A))\colon A\in H\}\subset\cup\{f'(A')\colon A'\in$ $\in H'\}=\sigma'(f')$, откуда следует, что первая модель изоморфно вкладывается во вторую. Достаточность установлена.

Лемма полностью доказана.

Доказательство предложения 1. Обозначим через $H\subset\mathfrak{A}$ и $H'\subset\mathfrak{A}'$ ультрафильтры, соответствующие агрегирующим функциям Эрроу σ и σ' по теореме 1.

Пусть модель $(\mathfrak{A}, F, \sigma)$ изоморфно вкладывается в модель $(\mathfrak{A}', F', \sigma')$, а изоморфизм φ из определения 6 индуцирован поточечным отображением ψ множества V' в V. Пусть ситуации $f\in F$, $f'\in F'$ удовлетворяют условию $f(\psi(v'))=f'(v')$ для всех $v'\in V'$. Покажем, что тогда $\sigma(f)=\sigma'(f')$.

Заметим, что для каждого непустого $\mathfrak{A}\in A$ множество $\{v'\in V'\colon \psi(v')\in A\}$ непусто, поэтому $f(A)=\cap\{f(v)\colon v\in A\}\subset\cap\{f(\psi(v')\colon v'\in\varphi(A)\}=\cap\{f'(v')\colon$ $v'\in\varphi(A)\}=f'(\varphi(A))$. Следовательно, по теореме 1 и по лемме $\sigma(f)=$ $=\cup\{f(A)\colon A\in H\}\subset\cup\{f'(\varphi(A))\colon A\in H\}\subset\cup\{f'(A')\colon A'\in H'\}=\sigma'(f)$, т. е. $\sigma(f)\subset$ $\subset\sigma'(f')$.

Чтобы доказать обратное включение, предположим, что $(x, y)\in\sigma'(f')$ для некоторых $x, y\in X$. В силу теоремы 1 тогда $(x, y)\in f'(A')$ для некоторого элемента $A'\in H'$. Так как f' — ситуация, то по условию измеримости $B'=\{v'\in V'\colon (x, y)\in f'(v')\}\in\mathfrak{A}'$, и поскольку H' — ультрафильтр, а $A'\subset B'$, то и $B'\in H'$. Так как f — ситуация, то по условию измеримости $B=\{v\in V\colon (x, y)\in f(v)\}\in\mathfrak{A}$. Легко убедиться, что $\psi(v')\in B$, если и только если $v'\in B'$, поэтому $\varphi(B)=B'$. При этом $(x, y)\in f(B)$ и $B\in H$ (если бы это было не так, то поскольку H — ультрафильтр, выполнялось $B^c\in H$, и по лемме $\varphi(B^c)=B'^c\in H'$, что невозможно, так как $B'\in H$ по доказанному), откуда $(x, y)\in\cup\{(f(A)\colon A\in H\}=\sigma(f)$, что и требовалось. Первое утверждение предложения 1 установлено.

Пусть φ — изоморфизм алгебры $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$, индуцированный таким отображением ψ множества V' в множество V, что $\sigma(f)=\sigma'(f')$ при любых ситуациях $f\in F$, $f'\in F'$, удовлетворяющих условию $f(\psi(v'))=f'(v')$ для всех $v'\in V'$. В силу леммы для того, чтобы доказать изоморфное вложение первой модели во вторую, достаточно проверить, что $\{\varphi(A)\colon A\in H\}\subset H'$. Докажем это включение от противного. Предположим, что существует элемент $A\in H$ и $\varphi(A)\notin H'$. Так как H' — ультрафильтр, то $(\varphi(A))^c\in H'$. Определим две ситуации: $f\in F$ и $f'\in F'$. Зафиксируем $x, y\in X$ и положим $f(v)=\{(x, y)\}$, если $v\in A$; $f(v)=\{(y, x)\}$, если $v\in A^c$; $f'(v')=\{(x, y)\}$, если $v'\in\varphi(A)$; $f'(v')=\{(y, x)\}$, если $v'\in(\varphi(A))^c$. Легко убедиться, что $f(\psi(v'))=f'(v')$ для всех $v'\in V'$, следовательно, согласно условию, $\sigma(f)=\sigma'(f')$. По теореме 1 $(x, y)\in\sigma(f)$ и $(y, x)\in\sigma'(f')$, но в силу предыдущего $(x, y)\in\sigma'(f')$, что невозможно, так как $\sigma'(f')$ асимметрично по А.2. Тем самым доказано $\{(\varphi(A)\colon A\in H\}\subset H'$, что и требовалось. Второе утверждение предложения 1 установлено.

Предложение 1 доказано полностью.

Прежде чем формулировать следующее утверждение, уточним понятие числа участников в модели группового выбора.

Модель группового выбора будем называть конечной или бесконечной в зависимости от того, конечна или бесконечна алгебра коалиций. Участниками в конечной модели назовем атомы алгебры, а их число — числом участников (атом — это «неделимая» коалиция $A\in\mathfrak{A}$, т. е. такая, что из $B\subset A$, $B\in\mathfrak{A}$, $B\neq\varnothing$ следует $B=A$) *.

Предложение 2. *Каждая конечная модель группового выбора может быть изоморфно вложена в любую модель группового выбора, определенную для того же множества альтернатив, с бо́льшим числом участников или бесконечную.*

Доказательство. Пусть $(\mathfrak{A}, F, \sigma)$ — алгебраическая модель группового выбора с n участниками, где n — натуральное число, а $(\mathfrak{A}', F', \sigma')$ — модель, определенная для того же множества альтернатив, с m участни-

---

* Определение кардинального числа участников в бесконечной модели группового выбора является самостоятельной задачей, выходящей за пределы настоящей работы и достаточно сложной. Дело в том, что число атомов алгебры коалиций уже не характеризует множество участников в бесконечной модели, поскольку существуют безатомные булевы алгебры. Число же точек множества участников, на котором определена алгебра коалиций, не сохраняется при изоморфизмах модели и, следовательно, не является ее инвариантом, что весьма нежелательно. Таким инвариантом является мощность множества ультрафильтров, но интерпретация ультрафильтров как участников уязвима для критики, так как тогда приходится мириться с существованием значительного числа не влияющих на групповое предпочтение «невидимых участников» [11], в общем случае более многочисленных, чем «видимые участники». Наиболее приемлемым представляется показатель плотности стоуновского бикомпакта — наименьшей мощности всюду плотных множеств, одного кратко обосновать это здесь невозможно.

ками, где натуральное $m \geqslant n$, или бесконечная. Тогда существуют разбиения $T \subset \mathfrak{A}$ и $T' \subset \mathfrak{A}'$ из n элементов каждое *.

Пусть $H \subset \mathfrak{A}$ и $H' \subset \mathfrak{A}'$ — ультрафильтры, соответствующие агрегирующим функциям σ и σ' по теореме 1. Так как разбиения конечны, найдутся такие элементы $A \in T$ и $A' \in T'$, что $A \in H$ и $A' \in H'$. Пусть φ — взаимно-однозначное отображение T на T', при котором $\varphi(A) = A'$. Так как T — семейство образующих, то по теореме о продолжении до гомоморфизмов [9, стр. 60] это отображение продолжается до изоморфизма φ алгебры $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{A}'$, причем, очевидно, $\{\varphi(A): A \in H\} \subset H'$. Тогда в силу леммы модель $(\mathfrak{A}, F, \sigma)$ изоморфно вкладывается в модель $(\mathfrak{A}', F', \sigma')$.

Предложение 2 доказано.

Определим теперь последовательные вложения моделей.

Определение 7. Пусть N — множество натуральных чисел. Индексированное множество $\{(\mathfrak{A}_n, F_n, \sigma_n): n \in N\}$ моделей группового выбора, определенных для одного множества альтернатив, будем называть последовательностью (изоморфно) вложенных моделей, если модель $(\mathfrak{A}_n, F_n, \sigma_n)$ (изоморфно) вкладывается в модель $(\mathfrak{A}_{n+1}, F_{n+1}, \sigma_{n+1})$ для каждого $n \in N$.

Привлечение теоремы о представлении булевых алгебр (использующей аксиому выбора) позволяет доказать следующее важное утверждение.

Предложение 3. *Для любой последовательности $\{(\mathfrak{A}_n, F_n, \sigma_n): n \in N\}$ изоморфно вложенных моделей группового выбора, определенных для одного множества альтернатив, существует последовательность $\{(\mathfrak{A}_n', F_n', \sigma_n'): n \in N\}$ вложенных моделей группового выбора, определенных для того же множества альтернатив, такая, что для каждого $n \in N$ модели $(\mathfrak{A}_n, F_n, \sigma_n)$ и $(\mathfrak{A}_n', F_n', \sigma_n')$ изоморфны.*

Доказательство (основано на построении индуктивного предела последовательности моделей группового выбора). Для каждого $n \in N$ через $\varphi_{n,n}$ обозначим тождественный изоморфизм алгебры $\mathfrak{A}_n$ на себя, через $\varphi_{n,n+1}$ — изоморфизм (из определения 6) алгебры $\mathfrak{A}_n$ в $\mathfrak{A}_{n+1}$, а для каждых m, $n \in N$, где $m < n$, обозначим через $\varphi_{m,n}$ композицию изоморфизмов $\varphi_{m,m+1} \circ \varphi_{m+1,m+2} \circ \ldots \circ \varphi_{n-1,n}$ — изоморфизм алгебры $\mathfrak{A}_m$ в $\mathfrak{A}_n$. Рассмотрим множество $\mathfrak{A} = \{A: A \in \mathfrak{A}_n, n \in N\}$ и введем на нем отношение эквивалентности $\sim$, полагая, что элемент $A \in \mathfrak{A}_m$ эквивалентен $B \in \mathfrak{A}_n$, где m, $n \in N$, если только если $\varphi_{m,k}(A) = \varphi_{n,k}(B)$, $k = \max(m, n)$. На фактор-множестве $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A} | \sim$ введем булевы операции следующим способом. Пусть A', $B' \in \mathfrak{A}'$ и $A \in \mathfrak{A}_m$, $B \in \mathfrak{A}_n$, $(m, n \in N)$ — представители классов A' и B' соответственно. Их объединением назовем класс из $\mathfrak{A}'$ с представителем $\varphi_{m,k}(A) \cup \varphi_{n,k}(B) \in \mathfrak{A}_k$, где $k = \max(m, n)$; пересечением — класс из $\mathfrak{A}'$ с представителем $\varphi_{m,k}(A) \cap \varphi_{n,k}(B) \in \mathfrak{A}_k$, где $k = \max(m, n)$, а дополнениями — классы с представителями $A^c \in \mathfrak{A}_m$ и $B^c \in \mathfrak{A}_n$ соответственно. По теореме о представлении булевых алгебр [9, стр. 41], булева алгебра $\mathfrak{A}'$ может быть задана на некотором множестве V'. Заметим, что для каждого $n \in N$ множество $\mathfrak{A}_n'$ классов из $\mathfrak{A}'$ с представителями из $\mathfrak{A}_n$ образует подалгебру алгебры $\mathfrak{A}'$, изоморфную алгебре $\mathfrak{A}_n$. Действительно, отображение h_n, которое ставит каждому элементу $A \in \mathfrak{A}_n$ в соответствие класс $h_n(A) \in \mathfrak{A}'$, содержащий A в качестве своего представителя, как легко убедиться, является изоморфизмом.

Теперь для каждого $n \in N$ построим модель $(\mathfrak{A}_n', F_n', \sigma_n')$, изоморфную модели $(\mathfrak{A}_n, F_n, \sigma_n)$. Множество ситуаций F_n' определим для данного множества альтернатив, множества участников V' и алгебры коалиций $\mathfrak{A}_n'$. Агрегирующую функцию σ_n' определим, согласно теореме 1, по ультрафильтру $H' = \{h_n(A): A \in H_n\} \subset \mathfrak{A}_n'$, где H_n — ультрафильтр алгебры $\mathfrak{A}_n$,

* Семейство T ненулевых элементов алгебры $\mathfrak{A}$ называется разбиением, если эти элементы попарно не пересекаются, а их объединение есть единица алгебры $\mathfrak{A}$.

соответствующий агрегирующей функции σ_n по теореме 1. Тогда по лемме модель $(\mathfrak{A}_n', F_n', \sigma_n')$ изоморфна $(\mathfrak{A}_n, F_n, \sigma_n)$.

Покажем, наконец, что для каждого $n \in N$ модель $(\mathfrak{A}_n', F_n', \sigma_n')$ вложена в $(\mathfrak{A}'_{n+1}, F'_{n+1}, \sigma'_{n+1})$. Из построения видно, что $\mathfrak{A}_n' \subset \mathfrak{A}'_{n+1}$. В силу леммы достаточно проверить включение $H_n' \subset H'_{n+1}$. Пусть $A' \in H_n'$. Тогда из построения $h_n^{-1}(A') \in H_n$. Так как модель $(\mathfrak{A}_n, F_n, \sigma_n)$ изоморфно вложена в $(\mathfrak{A}_{n+1}, F_{n+1}, \sigma_{n+1})$ по условию, то из леммы $\varphi_{n,n+1}(h_n^{-1}(A')) \in H_{n+1}$. По построению класс $A'' = h_{n+1}(\varphi_{n,n+1}(h_n^{-1}(A'))) \in H'_{n+1}$. Но элементы $h_n^{-1}(A')$ и $\varphi_{n,n+1}(h_n^{-1}(A'))$ эквивалентны, следовательно, определяют один класс из $\mathfrak{A}'$, т. е. $A'' = A'$, откуда $A' \in H'_{n+1}$, что и требовалось.

Предложение 3 доказано.

В заключение раздела сформулируем утверждение, вытекающее непосредственно из предложений 2 и 3.

Предложение 4. *Для любой последовательности* $\{(\mathfrak{A}_n, F_n, \sigma_n): n \in N\}$ *конечных моделей группового выбора с возрастающим числом участников и определенных для одного множества альтернатив существует последовательность* $\{(\mathfrak{A}_n', F_n', \sigma_n'): n \in N\}$ *вложенных моделей группового выбора, определенных для того же множества альтернатив, такая, что для каждого* $n \in N$ *модели* $(\mathfrak{A}_n, F_n, \sigma_n)$ *и* $(\mathfrak{A}_n', F_n', \sigma_n')$ *изоморфны.*

СХОДИМОСТЬ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ МОДЕЛЕЙ ГРУППОВОГО ВЫБОРА

В этом разделе определяется, в каком смысле можно говорить о сходимости последовательности изоморфно вложенных моделей группового выбора. Так как в силу предложений 3 и 4 изучение каждой такой последовательности сводится к изучению последовательности вложенных моделей (определенных на одном множестве участников), то и понятие сходимости можно без ограничения общности сформулировать для последовательности моделей, определенных на одном множестве участников, а затем распространить его и на общий случай.

Определение 8. Пусть $\{(\mathfrak{A}_n, F_n, \sigma_n): n \in N\}$ — индексированное множество (последовательность) моделей группового выбора, определенных на одном множестве участников V для одного множества альтернатив X. Будем говорить, что эта последовательность сходится к модели $(\mathfrak{A}, F, \sigma)$, определенной на том же множестве участников V для того же множества альтернатив X, если:

а) последовательность булевых алгебр $\{\mathfrak{A}_n: n \in N\}$ сходится к булевой алгебре $\mathfrak{A}$ в следующем смысле: для каждого подмножества A множества V существует номер $m \in N$ такой, что A является или не является элементом $\mathfrak{A}$, если и только если A является или соответственно не является элементом всех алгебр $\mathfrak{A}_n$ для всех $n > m$, $m \in N$, т. е. $\mathfrak{A} \cap \{A\} = \mathfrak{A}_n \cap \{A\}$;

б) последовательность агрегирующих функций $\{\sigma_n: n \in N\}$ сходится к агрегирующей функции σ в следующем смысле: для каждой ситуации $f \in F$ и пары альтернатив $x, y \in X$ существует номер $n \in N$ такой, что для всех $n > m$, $n \in N$, если ситуация $f_n \in F_n$ совпадает с ситуацией f на альтернативах x, y, т. е. $f_n(v) \cap \{(x, y), (y, x)\} = f(v) \cap \{(x, y), (y, x)\}$ для всех $v \in V$, то при этих ситуациях на этой паре альтернатив совпадают и групповые предпочтения, т. е. $\sigma_n(f_n) \cap \{(x, y), (y, x)\} = \sigma(f) \cap \{(x, y), (y, x)\}$.

Легко убедиться, что сходимость алгебр является поточечной сходимостью подмножеств $\mathfrak{A}_n \subset Y = 2^V$, $n \in N$, в пространстве подмножеств множества участников V с дискретной топологией. Сходимость предпочтений понимается как сходимость подмножеств в пространстве $X\times X$ с дискретной топологией, а сходимость агрегирующих функций — как поточечная сходимость функций с той лишь оговоркой, что в силу А.4 «точкой» оказывается все множество ситуаций $f_n\in F_n\subset F$, $n\in N$, совпадающих на фиксированной паре альтернатив.

Прокомментируем определение 8.

Моделям группового выбора с разным числом участников соответствуют разные алгебры коалиций и, следовательно, разные пространства состояний — множества ситуаций. Возникает проблема: как исследовать на сходимость последовательность функций (в данном случае агрегирующих функций Эрроу) с разными областями определения? Аналогичная ситуация наблюдается при аппроксимации числовой функции значениями в точках. Добавление новых точек уточняет аппроксимацию, на основании чего делается вывод о «приближении» к истинной функции.

Обсудим эту аналогию подробнее. Как доказано в предложениях 3 и 4, добавление новых участников эквивалентно добавлению новых коалиций. Поэтому можно исходить как бы из заданного бесконечного множества участников, которое последовательно расчленяется на все более мелкие коалиции. При этом каждая ситуация из бесконечной модели «аппроксимируется» ситуациями из конечных моделей — ступенчатыми функциями, постоянными на каждом элементе разбиения. В силу сходимости алгебр и условия измеримости такая «аппроксимация» на каждой фиксированной паре альтернатив оказывается «точной», начиная с некоторого шага (зависящего от приближаемой ситуации и выбора пары альтернатив). Агрегирующая функция — это функционал на множестве всех ситуаций (его значениями являются предпочтения). Сходимость агрегирующих функций фактически означает непрерывность этого функционала по последовательностям специального вида — ступенчатым «аппроксимирующим» ситуациям, причем эта непрерывность согласована с А.4.

Сформулируем теперь основное утверждение настоящей работы.

Теорема 2. *Каждая последовательность вложенных моделей группового выбора с конечным возрастающим числом участников сходится к единственной бесконечной модели группового выбора со счетной булевой алгеброй коалиций. Наоборот, для каждой бесконечной модели группового выбора со счетной булевой алгеброй коалиций существует сходящаяся к ней последовательность вложенных моделей группового выбора с конечным возрастающим числом участников.*

Доказательство. Пусть сначала дана последовательность $\{(\mathfrak{A}_n, F_n, \sigma_n): n\in N\}$ вложенных моделей группового выбора с конечным возрастающим числом участников (атомов) на фиксированном множестве V для множества альтернатив X. Построим бесконечную модель $(\mathfrak{A}, F, \sigma)$, к которой сходится данная последовательность моделей. Положим $\mathfrak{A}=\cup\{\mathfrak{A}_n: n\in N\}$. Легко убедиться, что $\mathfrak{A}$ является бесконечной счетной булевой алгеброй, содержащей все алгебры $\mathfrak{A}$, $n\in N$, в качестве своих подалгебр, причем последовательность $\{\mathfrak{A}_n: n\in N\}$ сходится к $\mathfrak{A}$ в смысле определения 8. Множество ситуаций F определим для данного множества альтернатив X и построенной алгебры $\mathfrak{A}$. Определим агрегирующую функцию σ на F. Для каждого $n\in N$ обозначим через $H_n\subset\mathfrak{A}_n$ ультрафильтр, соответствующий агрегирующей функции σ_n по теореме 1. Положим $H=\cup\{H_n: n\in N\}$ и проверим, что H является ультрафильтром алгебры $\mathfrak{A}$. Действительно, H — непустое множество непустых элементов из $\mathfrak{A}$. Покажем, что если $A\in H$, $B\in\mathfrak{A}$, $A\subset B$, то $B\in H$. В самом деле, найдутся номера m, $n\in N$ такие, что $A\in H_m$ и $B\in\mathfrak{A}_n$. Пусть $k=\max(m, n)$. По лемме $H_m\subset H_k$, поэтому $A\in H_k$, а так как $\mathfrak{A}_n\subset\mathfrak{A}_k$, то $B\in\mathfrak{A}_k$. Поскольку H_k — ультрафильтр, то $B\in H_k$, откуда $B\in H$, что и требовалось. Покажем, что если A, $B\in H$, то $A\cap B\in H$. В самом деле, найдутся номера m, $n\in N$ такие, что $A\in H_m$ и $B\in H_n$. Пусть $k=\max(m, n)$. Рассуждая аналогично, получим, что A, $B\in H_k$ и, следовательно, $A\cap B\in H_k$, откуда $A\cap B\in H$. Наконец, покажем, что если $A\in\mathfrak{A}$, то либо $A\in H$, либо $A^c\in H$. В самом деле, найдется номер $n\in N$ такой, что $A\in\mathfrak{A}_n$, а так как H_n — ультрафильтр, то или $A\in H_n$, или $A^c\in H_n$, откуда и следует требуемое.

Итак, проверено, что H — ультрафильтр алгебры $\mathfrak{A}$. По теореме 1 ему соответствует агрегирующая функция σ; покажем, что последовательность $\{\sigma_n\colon n\in N\}$ агрегирующих функций сходится к ней в смысле определения 8. Рассмотрим ситуацию $f\in F$ и пару альтернатив x, $y\in X$. По условию измеримости $A=\{v\in V\colon (x, y)\in f(v)\}\in\mathfrak{A}$. В силу теоремы 1 $(x, y)\in\sigma(f)$, если и только если $A\in H$; это справедливо тогда и только тогда, когда существует номер $m\in N$ такой, что $A\in H_n$ для всех $n>m$, $n\in N$; последнее в силу теоремы 1 и А.4 имеет место, если и только если существует номер $m\in N$ такой, что $(x, y)\in\sigma_n(f_n)$ для всех $n>m$, $n\in N$, при всех ситуациях $f_n\in F_n$, совпадающих с ситуацией f на паре альтернатив x, y. Тем самым показано, что данная последовательность $\{\sigma_n\colon n\in N\}$ сходится к σ.

Итак, последовательность моделей $\{(\mathfrak{A}_n;\ F_n;\ \sigma_n)\colon n\in N\}$ сходится к модели $(\mathfrak{A}, F, \sigma)$. Убедимся, что она не сходится ни к какой другой модели группового выбора. Если алгебра $\mathfrak{A}'$ на V отличается от алгебры $\mathfrak{A}$, то найдется подмножество A множества V такое, что $\{A\}\cap\mathfrak{A}'\neq\{A\}\cap\mathfrak{A}$, и поэтому последовательность $\{\mathfrak{A}_n\colon n\in N\}$ не может сходиться к $\mathfrak{A}'$. Если σ' — агрегирующая функция на F, отличающаяся от σ, то существуют ситуация $f\in F$ и пара альтернатив x, $y\in X$ такие, что $\{(x, y)\}\cap\sigma(f)\neq\{(x, y)\}\cap\sigma'(f)$, и поэтому последовательность $\{\sigma_n\colon n\in N\}$ не может сходиться к σ в смысле определения 8.

Первое утверждение теоремы 2 доказано.

Пусть теперь $(\mathfrak{A}, F, \sigma)$ — бесконечная модель группового выбора, определенная на множестве участников V для множества альтернатив X и пусть алгебра коалиций $\mathfrak{A}$ счетна. Построим последовательность $\{(\mathfrak{A}_n, F_n, \sigma_n)\colon n\in N\}$ вложенных моделей группового выбора с конечным возрастающим числом участников, сходящуюся к модели $(\mathfrak{A}, F, \sigma)$.

Построим последовательность вложенных конечных подалгебр с возрастающим числом элементов, сходящуюся к $\mathfrak{A}$. Так как алгебра $\mathfrak{A}$ счетна, можно занумеровать ее элементы; пусть $\mathfrak{A}=\{A_i\colon i=1, 2, \ldots\}$. Последовательность булевых алгебр $\{\mathfrak{A}_n\colon n\in N\}$ построим по индукции. Пусть $\mathfrak{A}_1$ — двухэлементная подалгебра алгебры $\mathfrak{A}$, состоящая из нуля и единицы алгебры $\mathfrak{A}$ (т. е. из пустого множества и множества всех участников V). Пусть конечные алгебры $\mathfrak{A}_n$ построены для всех натуральных $n\leqslant k$ для некоторого натурального k и при этом $\mathfrak{A}_1\subset\ldots\subset\mathfrak{A}_k$ и $\mathfrak{A}_n\neq\mathfrak{A}_{n+1}$. Так как алгебра $\mathfrak{A}_k$ конечна, найдется наименьший номер i_k такой, что $A_{i_k}\notin\mathfrak{A}_k$. Определим алгебру $\mathfrak{A}_{k+1}$ как минимальную подалгебру алгебры $\mathfrak{A}$, содержащую все элементы из $\mathfrak{A}_k$ и элемент A_{i_k}. Подалгебра $\mathfrak{A}_{k+1}$ как порожденная конечной системой элементов конечна, при этом, очевидно, $\mathfrak{A}_k\subset\mathfrak{A}_{k+1}$ и $\mathfrak{A}_k\neq\mathfrak{A}_{k+1}$. Так как алгебра $\mathfrak{A}$ бесконечна, построение не закончится ни на каком конечном шаге. Покажем, что $\mathfrak{A}=\cup\{\mathfrak{A}_n\colon n\in N\}$. Действительно, по построению $i_1<\ldots<i_k<\ldots$, поэтому $k\leqslant i_k$, что означает $A_k\in\mathfrak{A}_{k+1}$ для любого натурального k. Отсюда $\mathfrak{A}=\cup\{A_k\colon n\in N\}=\cup\{\mathfrak{A}_n\colon n\in N\}\subset\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}=\cup\{\mathfrak{A}_n\colon n\in N\}$, что и требовалось. Легко убедиться, что последовательность алгебр $\{\mathfrak{A}_n\colon n\in N\}$ сходится к $\mathfrak{A}$.

Для каждого $n\in N$ определим множество ситуаций F_n для алгебры $\mathfrak{A}_n$ и множества альтернатив X.

Определим для каждого $n\in N$ агрегирующую функцию σ_n на множестве ситуаций F_n. Пусть H — ультрафильтр алгебры $\mathfrak{A}$, соответствующий агрегирующей функции σ по теореме 1. Для каждого $n\in N$ положим $H_n=$

$=H\cap\mathfrak{A}_n$ и проверим, что H_n является ультрафильтром алгебры $\mathfrak{A}_n$. Действительно, H_n есть непустое подмножество ненулевых элементов алгебры $\mathfrak{A}_n$ (непустое потому, что заведомо содержит единицу алгебры $\mathfrak{A}_n$ — множество V). Покажем, что если $A\in H_n$, $B\in\mathfrak{A}_n$, $A\subset B$, то $B\in H_n$. В самом деле, тогда $A\in H$ и $B\in\mathfrak{A}$, а так как H — ультрафильтр, то $B\in H$; в то же время $B\in\mathfrak{A}_n$, следовательно, $B\in H_n$, что и требовалось. Покажем, что если A, $B\in H_n$, то $A\cap B\in H_n$. В самом деле, тогда A, $B\in H$, а поскольку H — ультрафильтр, то $A\cap B\in H$; в то же время $A\cap B\in\mathfrak{A}_n$, следовательно, $A\cap B\in H_n$, что и требовалось. Наконец, покажем, что если $A\in\mathfrak{A}_n$, то либо $A\in H_n$, либо $A^c\in H_n$. В самом деле тогда $A\in\mathfrak{A}$, а так как H — ультрафильтр, то или $A\in H$, или $A^c\in H$; в то же время A, $A^c\in\mathfrak{A}_n$, следовательно, либо $A\in H_n$, либо $A^c\in H_n$, что и требовалось. Итак, проверено, что H_n — ультрафильтр алгебры $\mathfrak{A}_n$ для каждого $n\in N$. По теореме 1 каждому ультрафильтру H_n, $n\in N$, соответствует агрегирующая функция σ_n на F_n. Так как по построению $H_n\subset H_{n+1}$ для каждого $n\in N$, то по лемме модель $(\mathfrak{A}_n, F_n, \sigma_n)$ вложена в модель $(\mathfrak{A}_{n+1}, F_{n+1}, \sigma_{n+1})$ для каждого $n\in N$. Следовательно, $\{(\mathfrak{A}_n, F_n, \sigma_n): n\in N\}$ — последовательность вложенных моделей группового выбора с конечным возрастающим числом участников. По первой части доказательства она сходится к модели $(\mathfrak{A}, F, \sigma)$.

Теорема 2 полностью доказана.

Обобщение теоремы 2 на случай не только счетных, но и несчетных последовательностей моделей может быть получено так же, как в [12].

Имея в виду предложение 4, можно заключить, что всякая последовательность моделей группового выбора с конечным возрастающим числом участников сходится к некоторой бесконечной модели со счетной алгеброй коалиций, и обратно, каждая коалиция может быть представлена через предел последовательности моделей с конечным возрастающим числом участников.

ИСЧЕЗНОВЕНИЕ «ДИКТАТОРА» ПРИ ПЕРЕХОДЕ К БЕСКОНЕЧНОМУ ЧИСЛУ УЧАСТНИКОВ В МОДЕЛИ ГРУППОВОГО ВЫБОРА

В этом разделе объясняются причины расхождений между выводами о существовании «диктатора» для конечной и бесконечной моделей.

Поскольку роль участников в конечной модели выполняют атомы, введем определение «диктатора» как атома алгебры коалиций.

Определение 9. «Диктатором» при агрегирующей функции σ называется такой атом A алгебры $\mathfrak{A}$, что $f(A)=\sigma(f)$ при любой ситуации $f\in F$.

Как было показано в [8], «диктатор», если он существует, совпадает с высшим уровнем максимальной решающей иерархии, точнее, коалиция $A\in\mathfrak{A}$ является «диктатором» при агрегирующей функции σ, если и только если ультрафильтр H, соответствующий σ по теореме 1, определяется элементом A, т. е. $H=\{B\in\mathfrak{A}: A\subset B\}$.

Поскольку в случае конечной булевой алгебры каждый ультрафильтр определяется некоторым атомом, то в конечной модели группового выбора при любой агрегирующей функции существует «диктатор», что соответствует результату Эрроу [1]. В случае бесконечной модели, когда алгебра коалиций бесконечна, существуют ультрафильтры с пустым пересечением, которым соответствуют агрегирующие функции без «диктатора»,— мы приходим к результату Фишберна [2].

По теореме 2 к каждой модели группового выбора со счетной алгеброй коалиций сходится последовательность конечных моделей, причем в бесконечной модели «диктатора» может не быть, тогда как в каждой конечной модели он присутствует. Проследим на примере, как происходит «вытеснение диктатора».

Пример. Рассмотрим бесконечную модель группового выбора, в которой множество участников — множество N натуральных чисел, а множество коалиций задано булевой алгеброй $\mathfrak{A}$, состоящей из конечных подмножеств N и дополнений к ним. Пусть X — произвольное множество альтернатив, содержащее не менее трех элементов, а множество ситуаций F определено для данного X и булевой алгебры $\mathfrak{A}$. Определим агрегирующую функцию σ по ультрафильтру H, состоящему из всех бесконечных элементов алгебры $\mathfrak{A}$, т. е. по правилу: $\sigma(f)=\cup\{f(A)\colon A\in H\}$ при каждой ситуации $f\in F$. Построим последовательность $\{(\mathfrak{A}_n, F_n, \sigma_n)\colon n\in N\}$ вложенных моделей группового выбора с конечным числом участников, сходящуюся к модели $(\mathfrak{A}, F, \sigma)$. Для каждого $n\in N$ определим подалгебру $\mathfrak{A}_n$ алгебры $\mathfrak{A}$ как состоящую из всех подмножеств первых $n-1$ чисел и дополнений к ним в N.

Легко убедиться, что для каждого $n\in N$ алгебра $\mathfrak{A}_n$ конечна, содержит n атомов, и $\mathfrak{A}_n\subset\mathfrak{A}_{n+1}$, а последовательность $\{\mathfrak{A}_n\colon n\in N\}$ сходится к алгебре $\mathfrak{A}$. Для каждого $n\in N$ обозначим через F_n множество ситуаций, определенных для множества альтернатив X и алгебры $\mathfrak{A}_n$, а через σ_n — агрегирующую функцию на F_n, определенную по ультрафильтру $H_n=H\cap\mathfrak{A}_n=\{B\in\mathfrak{A}_n\colon A_n\subset B\}$, где атом $A_n=\{n, n+1, \ldots\}$, т. е. по правилу $\sigma_n(f_n)=\cup\{f_n(B)\colon B\in H_n\}=\cup\{f_n(B)\colon A_n\subset B\}=f_n(A_n)$ при каждой ситуации $f_n\in F_n$.

Следуя доказательству теоремы 2, можно проверить, что последовательность $\{(\mathfrak{A}_n, F_n, \sigma_n)\colon n\in N\}$ вложенных моделей группового выбора с конечным возрастающим числом участников (в n-й модели n участников) сходится к модели $(\mathfrak{A}, F, \sigma)$. Так как $\cap\{A\colon A\in H\}$ пусто, то в модели $(\mathfrak{A}, F, \sigma)$ не существует «диктатора»; в модели $(\mathfrak{A}_n, F_n, \sigma_n)$, $n\in N$, «диктатором» является атом A_n. Проследим, как функцию «диктатора» перенимает решающая максимальная иерархия, которая в пределе полностью его замещает. Пусть в некоторой модели $(\mathfrak{A}_n, F_n, \sigma_n)$ при ситуации $f_n\in F_n$ решение «x предпочтительнее, чем y» $(x, y\in X)$ — «единоличное решение диктатора» в том смысле, что $(x, y)\in f_n(A_n)$; $(x, y)\notin f_n(k)$, где k — натуральное число меньшее n (при этом $(x, y)\in\sigma_n(f_n))$. Рассмотрим ту же ситуацию f_n, но в следующей $(n+1)$-й модели $(\mathfrak{A}_{n+1}, F_{n+1}, \sigma_{n+1})$. Очевидно, $f_n\in F_{n+1}$. При ситуации f_n в модели $(\mathfrak{A}_{n+1}, F_{n+1}, \sigma_{n+1})$ то же решение «x предпочтительнее, чем y» есть решение коалиции из максимальной решающей иерархии, а не только «диктатора». Действительно, коалиция A_n, являющаяся атомом в алгебре $\mathfrak{A}_n$, уже не является атомом в алгебре $\mathfrak{A}_{n+1}$, а входит в иерархию, «возглавляемую диктатором» $A_{n+1}\subset A_n$. При переходе от n-й модели к $(n+1)$-й «диктатор» как бы расщепляется на двух участников, один из которых «диктатором» уже не является (сравнить с предложением 1).

Простая выкладка иллюстрирует, как снижается единоличное влияние «диктатора» на групповое предпочтение при увеличении числа участников.

Пусть X — конечное множество альтернатив. Зафиксируем x, $y\in X$ и обозначим через p отношение числа предпочтений на X, содержащих пару (x, y), к числу всех предпочтений на X. Число p можно интерпретировать как вероятность того, что при случайном равновероятном выборе предпочтения альтернатива x окажется предпочтительнее y. Заметим, что величина p не зависит от x, y, а определяется только числом предпочтений на X, т. е. в конечном счете количеством альтернатив из X.

Выразим вероятность того, что «диктатор» принимает «единоличное решение», т. е. «диктатор» предпочитает альтернативу x альтернативе y, тогда как все прочие участники x не предпочитают y. Эту величину назовем частным влиянием «диктатора» (слово «частным» означает, что речь идет о частных решениях — для пар альтернатив, а не вообще о выборе группового предпочтения) и обозначим через P. Легко убедиться, что $P=p(1-p)^{n-1}$, где n — число участников в модели. Так как, очевидно,

$0<p<1$, то P стремится к нулю вместе с ростом числа участников, т. е. частное влияние «диктатора» убывает.

Аналогично выразим вероятность того, что предпочтение «диктатора» отлично от предпочтений всех остальных участников. Пусть q — величина, обратная числу предпочтений на X. Величина q соответствует вероятности того, что данное предпочтение выбирается из их общего множества. Обозначим через Q вероятность того, что предпочтение «диктатора» не совпадает ни с одним из предпочтений остальных участников, и назовем ее абсолютным влиянием «диктатора» (абсолютным в том смысле, что «диктатор» детерминирует групповое предпочтение в целом). Легко убедиться, что $Q=q(1-q)^{n-1}$, где n — число участников. Так как $0<q<1$, то Q стремится к нулю вместе с ростом n, т. е. абсолютное влияние «диктатора» убывает при увеличении числа участников.

Приведем числовые значения P и Q для числа участников $n=2, 3, \ldots, 10$ в предположении, что число альтернатив $|X|=3$. Пусть $X=\{x, y, z\}$. Тогда 19 бинарных отношений на X являются предпочтениями. Перечислим их: $P_1=\{\varnothing\}$; $P_2=\{(x, y)\}$; $P_3=\{(x, z)\}$; $P_4=\{(y, x)\}$; $P_5=\{(y, z)\}$; $P_6=\{(z, x)\}$; $P_7=\{(z, y)\}$; $P_8=\{(x, y), (x, z)\}$; $P_9=\{(x, z), (y, z)\}$; $P_{10}=\{(y, x), (y, z)\}$; $P_{11}=\{(y, x), (z, x)\}$; $P_{12}=\{(z, x), (z, y)\}$; $P_{13}=\{(z, y), (x, y)\}$; $P_{14}=\{(x, y), (y, z), (x, z)\}$; $P_{15}=\{(x, z), (z, y), (x, y)\}$; $P_{16}=\{(y, x), (x, z), (y, z)\}$; $P_{17}=\{(y, z), (z, x), (y, x)\}$; $P_{18}=\{(z, x), (x, y), (z, y)\}$; $P_{19}=\{(z, y), (y, x), (z, x)\}$.

Отсюда видно, что $p={}^6/_{19}$, а $q={}^1/_{19}$. Составим таблицу, подставляя эти значения в формулы для P и Q.

Число участников, n	Частное влияние «диктатора», P	Абсолютное влияние «диктатора», Q	Число участников, n	Частное влияние «диктатора», P	Абсолютное влияние «диктатора», Q
2	0,216	0,050	6	0,047	0,040
3	0,148	0,047	7	0,032	0,038
4	0,101	0,045	8	0,022	0,036
5	0,069	0,042	9	0,015	0,034
			10	0,010	0,032

Автор приносит искреннюю благодарность Б. А. Ефимову за внимание к работе и многочисленные полезные советы и обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *K. Arrow.* Social Choice and Individual Value. N. Y., 1963.
2. *P. Fishburn.* Arrow's Impossibility Theorem: Concise Proof and Infinite Voters. J. Ec. Theory, 1970, v. 2, № 1.
3. *G. Debreu, H. Scarf.* A Limit Theorem on the Core of an Economy. Intern. Ec. Rev., 1963, v. 4, № 3.
4. *Р. Ауман.* Рынки с континуумом участников. В сб. Математическая экономика. М., «Мир», 1974.
5. *Р. Ауман.* Существование конкурентных равновесий в рынках с континуумом участников. В сб. [4].
6. *Y. Kannai.* Continuity Properties of the Core of a Market. Econometrica, 1970, v. 38, № 6.
7. *W. Hildenbrand.* Core and Equilibria of a Large Economy. Princeton, 1974.
8. *А. С. Тангян.* Иерархическая модель группового выбора. Экономика и матем. методы, 1980. т. XVI, вып. 3.
9. *Р. Сикорский.* Булевы алгебры. М., «Мир», 1969.
10. *Д. А. Владимиров.* Булевы алгебры. М., «Наука», 1969.
11. *A. Kirman, D. Sonderman.* Arrow's Theorem. Many Agents and Invisible Dictators. J. Ec. Theory, 1972, v. 5, № 2.
12. *А. С. Тангян.* Агрегирование в модели социального выбора. М., 1979 (ЦЭМИ АН СССР).

Поступила в редакцию
17 IX 1979