

5. Об одном итеративном методе решения задач целочисленного программирования. Докл. АН СССР, 1966, т. 169, № 6.
6. В. А. Волконский. Принципы оптимального планирования. М., «Экономика», 1973.
7. Ю. Г. Марков. Отраслевое перспективное планирование в терминах l -вариантов. В сб. Состояние и перспективы развития ОАСУ. Материалы Всес. симпозиума, 1977 (ЦЭМИ АН СССР).
8. А. Б. Поманский, А. Д. Шапиро. Об итеративных методах решения отраслевых задач, содержащих дискретные переменные. Докл. АН СССР, 1969, т. 186, № 1.
9. С. С. Гдалевич. Вопросы прикладного использования двойственных оценок. М., «Наука», 1975.

Поступила в редакцию
8 V 1979

СТОХАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВЫБОРА НАЧАЛА СТРОИТЕЛЬСТВА ОРОСИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

Н. Д. НИКОЛАЕВА

(Москва)

Орошение и обводнение земель засушливых и полупустынных зон — важная народнохозяйственная проблема. Для наиболее эффективного использования водных ресурсов создаются модели оптимального выбора размеров ирригационных систем вдоль бассейна одной или нескольких рек, оптимального распределения водных ресурсов при дефиците воды. Как правило, в таких моделях за критерий качества принимают приведенную прибыль хозяйства [1, 2].

Основной характеристикой реки является сток — годовой объем воды, протекающей через данное сечение. Очевидно, сток реки есть случайная величина. Распределение стока определяется на основе многолетнего наблюдения за ним. До сих пор обычно рассматривались задачи проектирования ирригационных систем, в которых распределение стока предполагалось известным. В настоящее время возникает необходимость проектирования ирригационных систем на реках, наблюдения за стоком которых либо вовсе отсутствуют, либо их недостаточно для оценки распределения. Подобные ситуации встречаются, например, при проектировании ирригационных систем на малых реках.

В данной заметке рассматривается модель, в которой водные ресурсы потребляются только сельским хозяйством. Конечная цель исследования состоит в выборе момента начала строительства оросительной системы и ее размеров. Другими словами, решается вопрос о том, что выгоднее: использовать сведения о распределении стока реки на данный момент времени и на их основе выбирать оптимальные размеры оросительной системы или отложить строительство на год, но уточнить распределение стока, наблюдая за ним.

В работе предлагается стратегия выбора момента начала строительства, с помощью которой удастся получить ответ на важный экономический вопрос: имеет ли смысл отсрочка начала строительства? В некоторых случаях экономически более выгодно отложить строительство.

Приведем точную постановку задачи. Будем считать, что сток реки Q является дискретной случайной величиной, принимающей конечное число значений $Q_1, \dots, Q_n$. Относительно распределения вероятностей Q предполагается следующее. Допустим, что географический район, на территории которого расположен бассейн данной реки (понятие района см., например, в [3]), может быть отнесен к одному из h типов: $\sigma_1, \dots, \sigma_h$, причем неизвестно, какого типа данный район, а известны априорные вероятности того, что он является районом типа σ со значениями $\sigma_l, l=1, \dots, h$. Обозначим эти вероятности через $q(\sigma_l), l=1, \dots, h$.

Распределение стока реки неизвестно. Однако известны условные распределения в зависимости от того, к какому типу принадлежит район, на территории которого расположен бассейн данной реки, т. е. для каждого $\sigma_l, l=1, \dots, h$, задан набор вероятностей $P(Q_j/\sigma_l), j=1, \dots, n$. Тогда, если нет дополнительных наблюдений за стоком, распределение Q находится следующим образом

$$P(Q_j) = \sum_{l=1}^h P(Q_j/\sigma_l) q(\sigma_l), \quad j=1, \dots, n.$$

Обычно априорное распределение $q(\sigma_l)$, $l=1, \dots, h$, представляет собой оценки истинного распределения параметра σ , которые в нашем случае с помощью дополнительных наблюдений за стоком реки могут быть улучшены. Предположим, что произведено наблюдение за стоком и его реализация оказалась равной Q_i . Тогда апостериорное распределение параметра σ , согласно байесовскому подходу, находится как

$$q(\sigma_l/Q_i) = P(Q_i/\sigma_l) q(\sigma_l)/P(Q_i), \quad l=1, \dots, h.$$

Распределение стока в этом случае определяется набором

$$P(Q_j/Q_i) = \sum_{l=1}^h P(Q_j/\sigma_l) q(\sigma_l/Q_i), \quad j=1, \dots, n. \quad (1)$$

Следующее наблюдение позволяет снова по байесовским формулам пересчитать распределение параметра σ и стока и т. д.

Пусть в бассейне реки предполагается возделывание на площади S одной сельскохозяйственной культуры с заданной нормой орошения γ . При этом удельный доход и удельные затраты на орошенной площади, на неорошенной площади и на богаре $\gamma\gamma$ считаются известными, причем доход и затраты пропорциональны площади. Требуется определить момент начала строительства оросительной системы и размеры площади $F \leq S$, на которой предполагается строительство оросительной системы. В качестве критерия принимается математическое ожидание годовой прибыли (средняя годовая прибыль), подсчитанной с учетом капитальных вложений, от возделывания на S данной сельскохозяйственной культуры с нормой орошения γ . Задача выбора F , максимизирующего среднюю годовую прибыль при условии, что сток реки Q — случайная величина с известной функцией распределения вероятностей, является задачей двухэтапного стохастического программирования и решена в [1].

В момент времени $t=0$ имеются следующие возможности: 0.1. начать строительство оросительной системы в году $t=0$; 0.2. отложить начало строительства.

В первом случае, принимая в качестве распределения Q набор $P(Q_1), \dots, P(Q_n)$, найдем F , решая задачу максимизации средней годовой прибыли. Во втором случае начало строительства откладывается по крайней мере на год. В году $t=1$ снова возникают возможности начать 1.1 или отложить 1.2. строительство.

В случае 1.1. выбор размеров площади F производится в момент $t=1$. При этом для уточнения распределения важно учесть реализацию стока в году $t=0$. Если в году $t=0$ произошла реализация стока Q_i , то, согласно (1), в качестве распределения Q полагаем набор $P(Q_j/Q_i)$, $j=1, \dots, n$, и решаем задачу выбора F , максимизирующего среднюю годовую прибыль. В случае 1.2. начало строительства откладывается по крайней мере еще на год и т. д.

Введем обозначения. Пусть $\varphi_i(t, Q_i, \dots, Q_n)$ — оптимальное значение средней годовой прибыли. Нижний индекс указывает год принятия решения о моменте начала строительства, а также номер года, по информации которого определяется математическое ожидание. Первая компонента аргумента функции показывает, в каком году решено начать строительство. Последующие компоненты аргумента означают, какие произошли реализации стока при дополнительных наблюдениях за ним, если такие имеются.

В принятых обозначениях оптимальное значение средней годовой прибыли в случае 0.1. равно $\varphi_0(0)$. Если осуществилась ситуация 1.1, то при реализации Q_i в году $t=0$ величина средней годовой прибыли равна $\varphi_1(1, Q_i)$. Кроме того, нам понадобятся

$$\varphi_0(1) = \sum_{i=1}^n \varphi_1(1, Q_i) P(Q_i), \quad \varphi_1(2, Q_i) = \sum_{j=1}^n \varphi_2(2, Q_i, Q_j) P(Q_j/Q_i),$$

и т. д.

Аналогично определяются

$$\varphi_0(2), \dots, \varphi_0(t), \dots, \varphi_1(3, Q_i), \dots, \varphi_1(t, Q_i), \dots \text{ и т. д.}$$

Можно показать что $\varphi_0(t) \leq \varphi_0(t+1)$ для каждого $t=0, 1, \dots$, $\varphi_1(t, Q_i) \leq \varphi_1(t+1, Q_i)$ для каждого $t=1, \dots$ и т. д.

* Под нормой орошения понимается удельное (на единицу площади) количество воды за оросительный период.

** Богар — неорошаемая площадь.

Заметим, что, если ввод оросительной системы осуществляется в момент $t=1$, то доходы будут также поступать, начиная с момента $t=1$. Поэтому в момент $t=0$ сравнивать между собой нужно не величины $\varphi_0(0)$ и $\varphi_0(1)$, а $\varphi_0(0)$ и $\lambda\varphi_0(1)$, где коэффициент дисконтирования λ , $0 < \lambda < 1$, отражает факт годовой отсрочки в получении прибыли.

Время начала строительства оросительной системы будем выбирать следующим образом.

Сравниваем $\varphi_0(0)$ и $\lambda\varphi_0(1)$. Если $\varphi_0(0) \geq \lambda\varphi_0(1)$, то начинаем строительство оросительной системы в году $t=0$. Если $\varphi_0(0) < \lambda\varphi_0(1)$, то откладываем решение о начале строительства на следующий год. Это решение будет приниматься по правилу, сформулированному ниже.

Предположим, что $\varphi_0(0) < \lambda\varphi_0(1)$, и в году $t=0$ произошла реализация стока Q_i . Найдем прибыли $\varphi_1(1, Q_i)$, $\varphi_1(2, Q_i)$ с учетом того, что распределение стока описывается набором $P(Q_1/Q_i), \dots, P(Q_n/Q_i)$. Если $\varphi_1(1, Q_i) \geq \lambda\varphi_1(2, Q_i)$, то начинаем строительство оросительной системы в году $t=1$. Если $\varphi_1(1, Q_i) < \lambda\varphi_1(2, Q_i)$, то снова откладываем решение о выборе момента начала строительства до следующего года и т. д.

Таким образом, момент начала строительства есть величина случайная. Обозначим ее через τ . Величина прибыли при условии, что строительство начинается в году t и до года t произошли реализации стока $(Q_{i_1}, \dots, Q_{i_t}) = Q^t$, равна $\varphi_t(t, Q^t)$. Математическое ожидание в году $t=0$ этой прибыли при условии, что $\tau=t$, обозначим через $\varphi(t)$.

Теорема. Пусть $\varphi_0(0) < \lambda\varphi_0(1)$. Тогда $M\lambda^\tau\varphi(\tau) > \varphi_0(0)$.

Доказательство. Прежде всего найдем значение $\varphi(\tau)$ при фиксированном τ . По условию теоремы $\tau > 0$. Пусть $\tau=t$. Согласно предложенной стратегии, $\tau=t$ в том случае, когда

$$\varphi_\tau(\tau, Q^\tau) < \lambda\varphi_\tau(\tau+1, Q^\tau) \text{ для любого } \tau < t \quad (2)$$

$$\varphi_t(t, Q^t) \geq \lambda\varphi_t(t+1, Q^t) \text{ для } \tau=t.$$

Другими словами, $\tau=t$ для векторов Q^t , удовлетворяющих (2). Обозначим множество наборов индексов $\xi = (i_1, \dots, i_t)$, для которых Q^t удовлетворяют (2), через I_t . Тогда

$$P(\tau=t) = \sum_{\xi \in I_t} P(Q^t),$$

$$P(\varphi_t(t, Q^t)/\tau=t) = P(Q^t)/P(\tau=t).$$

Математическое ожидание прибыли при условии, что $\tau=t$

$$\varphi(t) = \sum_{\xi \in I_t} \varphi_t(t, Q^t) \frac{P(Q^t)}{P(\tau=t)} \quad (3)$$

и

$$M\lambda^\tau\varphi(\tau) = \sum_{\tau=1}^{\infty} \lambda^\tau\varphi(\tau)P(\tau).$$

Заметим, что все функции $\varphi_t(t, Q^t)$ ограничены в совокупности для любых t и Q^t ,

т. е. существует число A , такое, что $|\varphi(\tau)| \leq A$ для любого τ . Далее, $\sum_{\tau=1}^{\infty} P(\tau) = 1$.

По условию теоремы $\varphi_0(0) < \lambda\varphi_0(1)$. Обозначим через

$$\Delta = \lambda\varphi_0(1) - \varphi_0(0). \quad (4)$$

Из ограниченности $\varphi(\tau)$ и сходимости ряда $\sum_{\tau=1}^{\infty} P(\tau)$ следует сходимость ряда

$$\sum_{\tau=1}^{\infty} \lambda^\tau\varphi(\tau)P(\tau). \quad \text{Для каждого } \tau \text{ из (3) следует}$$

$$\varphi(\tau)P(\tau) = \sum_{\xi \in I_\tau} \varphi_\tau(\tau, Q^\tau)P(Q^\tau). \quad (5)$$

Рассмотрим множество индексов

$$I_s^1 = \{\xi = (i_1, \dots, i_s) : \varphi_s(s, Q^s) < \lambda \varphi_s(s+1, Q^s)\}.$$

Так как ряд $\sum_{\tau=1}^{\infty} \lambda^\tau \varphi(\tau)P(\tau)$ сходится, $|\varphi_s(s, Q^s)| < A$, $0 < \lambda < 1$, по любому $\delta > 0$, в частности по $\delta < \Delta/2$, найдется номер s , такой, что

$$\sum_{\tau=s+1}^{\infty} \lambda^\tau \varphi(\tau)P(\tau) > \sum_{\xi \in I_s^1} \lambda^s \varphi_s(s, Q^s)P(Q^s) - \frac{\Delta}{2}. \quad (6)$$

С учетом (5) и (6) получаем

$$\begin{aligned} M\lambda^\tau \varphi(\tau) &> \sum_{\tau=1}^s \lambda^\tau \varphi(\tau)P(\tau) + \sum_{\xi \in I_s^1} \lambda^s \varphi_s(s, Q^s)P(Q^s) - \frac{\Delta}{2} = \\ &= \sum_{\tau=1}^{s-1} \lambda^\tau \varphi(\tau)P(\tau) + \sum_{\xi \in I_s \cup I_s^1} \lambda^s \varphi_s(s, Q^s)P(Q^s) - \frac{\Delta}{2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Множество индексов $I_s \cup I_s^1$ состоит из всевозможных ξ , для которых соответствующие векторы $Q^s = (Q^{s-1}, Q_i)$ таковы, что

$$\sum_{\xi \in I_s \cup I_s^1} \lambda^s \varphi_s(s, Q^s)P(Q^s) = \sum_{\xi \in I_{s-1}^1} \left(\sum_{i=1}^n \lambda^s \varphi_s(s, Q^{s-1}, Q_i)P(Q_i / Q^{s-1}) \right) P(Q^{s-1}). \quad (8)$$

Согласно определению $\varphi_{s-1}(s, Q^{s-1})$, имеем

$$\sum_{i=1}^n \lambda^s \varphi_s(s, Q^{s-1}, Q_i)P(Q_i / Q^{s-1}) = \lambda^s \varphi_{s-1}(s, Q^{s-1}). \quad (9)$$

С учетом (8), (9) и так как для $\xi \in I_{s-1}^1$

$$\varphi_{s-1}(s-1, Q^{s-1}) < \lambda \varphi_{s-1}(s, Q^{s-1}),$$

неравенство (7) принимает вид

$$\begin{aligned} M\lambda^\tau \varphi(\tau) &> \sum_{\tau=1}^{s-1} \lambda^\tau \varphi(\tau)P(\tau) + \sum_{\xi \in I_{s-1}^1} \lambda^s \varphi_{s-1}(s, Q^{s-1})P(Q^{s-1}) - \\ &- \frac{\Delta}{2} = \sum_{\tau=1}^{s-1} \lambda^\tau \varphi(\tau)P(\tau) + \sum_{\xi \in I_{s-1}^1} \lambda^{s-1} \varphi_{s-1}(s-1, Q^{s-1})P(Q^{s-1}) - \frac{\Delta}{2}. \end{aligned} \quad (10)$$

Из сравнения (7) и (10), продолжая процедуру таким образом, получаем

$$M\lambda^\tau \varphi(\tau) > \lambda \varphi(1)P(1) + \sum_{\xi \in I_1^1} \lambda \varphi_1(1, Q^1)P(Q^1) - \frac{\Delta}{2}.$$

Сумма справа равна

$$\lambda \sum_{i=1}^n \varphi_i(1, Q_i) P(Q_i) - \frac{\Delta}{2} = \lambda \varphi_0(1) - \frac{\Delta}{2}.$$

Принимая во внимание (4), окончательно имеем

$$M\lambda^* \varphi(\tau) > \varphi_0(0) + \frac{\Delta}{2} > \varphi_0(0).$$

Теорема доказана.

Таким образом показано, что если в году $t=0$ кроме размеров оросительной системы выбирается момент начала ее строительства, то можно получить в среднем большую прибыль.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Д. Николаева. Стохастические модели проектирования размеров ирригационных систем. Препринт. М., 1977 (ЦЭМИ АН СССР).
2. В. А. Кардаш, Э. О. Рапопорт. Об одной динамической модели многолетнего регулирования стока в целях орошения. В сб. Оптимизация. Вып. 2 (19). Новосибирск, 1971 (ИЭ и ОПИ СО АН СССР).
3. Руководство по определению расчета гидрологических характеристик. Л., Гидрометеиздат, 1973.

Поступила в редакцию
4 XII 1978

МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ ОДНОЙ ЦЕЛОЧИСЛЕННОЙ ОПТИМИЗАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ

И. Г. МИТЕВ

(НРБ)

В практике часто возникает оптимизационная задача распределения ресурсов при неделимости объектов (из этого условия следует целочисленность некоторых или всех переменных)

$$\min (c, x), \quad (1)$$

$$Ax = b,$$

$$x \geq 0 - \text{целые.}$$

Здесь $A = (a^1, \dots, a^m)$ — матрица ограничений, $a^i \in R^n$, $i=1, \dots, m$; вектор $b = (b_1, \dots, b_m)$ — наличные ресурсы. Естественно, в задачу могут включаться и некоторые непрерывные переменные, но без ограничения общности их можно не рассматривать.

В (1) не отражена одна возможность, довольно часто встречающаяся в практике: допущение замены одного ресурса другим с соответствующей доплатой. Если учесть в модели возможность замены ресурсов, то, во-первых, будет лучше отражена экономическая реальность; во-вторых, ограничения задачи станут более «гибкими», т. е. число допустимых целочисленных решений резко возрастет, что может облегчить поиск оптимума; в-третьих, оптимальное решение новой задачи «не хуже» оптимума задачи (1). Не будем останавливаться на очевидных выгодах экономического характера (более полное использование ресурсов, сокращение запасов и т. д.) — это выходит за рамки настоящей заметки.

С учетом возможности замены ресурсов модель (1) модифицируется

$$\min \left\{ \sum_{j=1}^n c_j x_j + \sum_{i=1}^m k_i |p_i| \right\},$$