ДВУХЭТАПНЫЙ ПОДХОД К ОПТИМИЗАЦИИ ДОЛГОВРЕМЕННЫХ СТРОИТЕЛЬНЫХ ПРОГРАММ

КИБАЛОВ Е. Б., ХУТОРЕЦКИЙ А. Б.

(Новосибирск)

Долговременные строительные программы как эффективное средство ориентации управления на достижение высоких конечных социально-экономических результатов приобретают все большее значение в динамично развивающейся экономике страны. Моделирование таких программ — сравнительно новая сфера приложения математических методов. Первые опыты в этой области [1—3] показали, с одной стороны, высокую актуальность и полезность количественной оценки вариантов развертывания капитальных работ на длительных временных интервалах и, с другой, необходимость совершенствования применяемого экономико-математического аппарата. Главным здесь является более полный учет специфики проблемы и создание на этой основе адекватных моделей и работоспособных схем оптимизационных расчетов.

Постановка проблемы. В настоящей статье описывается подход, смысл которого состоит в разбиении процедуры оптимизации долговременной строительной программы на два этапа. На первом, предплановом этапе, когда решения принимаются на основе весьма неопределенных данных, когда решения принимаются на основе весьма неопределенных данных, содержащихся в «слабоструктуризованных» документах — технико-экономических докладах (ТЭД) и технико-экономических обоснованиях (ТЭО), плановая программа представляется агрегированно, объемно. Плановый период $[0, T]$ составляет 20—25 лет, единицей измерения времени служит пятилетка, T — число пятилеток в периоде. Предстоящие объемы работ в стоимостной оценке задаются по пятилеткам с помощью «вилки», а оптимальная стратегия развития строительных мощностей, необходимых для осуществления программы и оцениваемых также в объемно-стоимостной форме, определяется на основе игровой схемы (задача A). На втором этапе единица измерения времени — год, строительная программа детализируется и представляется в виде сетевой модели. Для отыскания наилучшего варианта календарного плана формализованной таким образом программы предлагается специальный метод (задача B). В качестве критерия оптимальности при выборе вариантов развертывания строительной программы во времени в задачах A и B принимаются затраты, приведенные к моменту окончания строительства и подлежащие минимизации.

В задаче A затратами считаются те расходы по программе, которые возникают сверх предполагаемого уровня сметной стоимости строительных-монтажных работ, определенного экспертно или по аналогии. Эти затраты появляются при несоответствии мощностей «местного» строительного комплекса в отдельные интервалы планового периода объемам работ, предусмотренным программой. Следуя [4], под «местным» строительным комплексом понимается совокупность строительных организаций и промышленных предприятий, предназначенная (или создаваемая вновь)

только для данного строительства. Предполагается, что все издержки по созданию, эксплуатации, переспециализации или ликвидации строительного комплекса после завершения программы должным образом учитываются при формировании предусматриваемого (планового) уровня сметной стоимости строительно-монтажных работ. Понятно, что из-за низкой транспортабельности строительных конструкций и материалов основные структурные элементы строительного комплекса обычно размещаются вблизи места интенсивной застройки, и в этом смысле такой комплекс также является «местным».

Итак, если мощности такого комплекса в какой-либо пятилетке превышают финансируемый по программе объем работ, то загрузить их можно лишь за пределами экономически целесообразного радиуса его действия. Если же эти мощности недостаточны для освоения выделенных средств, то дополнительные мощности можно привлечь только из-за границ района, где локализована данная программа и функционирует «местный» строительный комплекс. Подобные ситуации недостаточно учитываются при составлении плановых калькуляций строительных расходов, а соответствующие затраты чаще всего фиксируются *post factum*. В задаче А предлагается учесть еще на стадии планирования возможные затраты на использование дополнительных мощностей из других районов или загрузку излишних мощностей «местного» строительного комплекса вне данного района. Сумма таких затрат в каждой пятилетке принимается пропорциональной величине привлекаемых или излишних мощностей. Коэффициенты пропорциональности обозначим через γ_t^1 и γ_t^2 , где t — номер пятилетки. Эти же коэффициенты позволяют отразить неравноценность разновременных затрат и привести их к моменту окончания программы. Получаемые значения назовем затратами вида I.

Задача В решается последовательно на интервалах $[5t, 5T]$, где $5t$ — конец пятилетки t ; $5T$ — конец планового периода. Предполагается, что по крайней мере на ближайшую пятилетку имеется проектно-сметная документация. Сметные затраты по каждой работе программы, моделируемой в сетевой форме, считаются фиксированными. Изменяются лишь даты начала и длительности работ. Таким образом, при постоянной сметной стоимости работ программы меняется в зависимости от распределения сметных объемов во времени [3] величина затрат, приведенных к моменту окончания программы. Назовем их затратами вида II.

Первый этап — задача А. Предположим, что существуют: 1) единый (и единственный) заказчик-застройщик, действующий на данной территории и определяющий финансируемые объемы строительно-монтажных работ (СМР) по интервалам планового периода; будем называть его «Инвестор»; 2) генеральный подрядчик, ответственный как за реализацию собственно строительной программы, так и за развитие мощностей «местного» строительного комплекса; назовем его «Строитель». Далее условимся, что известны множество $Y = \{y\}$ возможных вариантов финансирования (стратегий Инвестора) и множество $X = \{x\}$ возможных траекторий развития мощностей строительного комплекса (стратегий Строителя). Допустим, что при стратегиях Строителя и Инвестора x и y величина затрат вида I у первого определяется функцией $F(x, y)$. Не имея полной информации о намерениях Инвестора, Строитель находится в ситуации «игры с природой», т. е. вынужден планировать развитие строительного комплекса в условиях неопределенности. Естественно, Строитель стремится к тому, чтобы его наибольший возможный проигрыш был как можно меньше. Это значит, что он ищет вектор x^0 такой, что $\max_y F(x^0, y) = \min_x \max_y F(x, y)$.

Задача А заключается в нахождении x^0 .

Различные конкретизации множеств X , Y и функции F порождают различные игровые постановки этой задачи. В предположении, что суммарный объем работ по программе, финансируемый Инвестором за весь плановый период, известен заранее и должен быть обязательно выполнен Строителем, который в любом интервале планового периода имеет резервный фронт работ, задача A с функцией F специального вида решена нами в [5]. Все предпосылки и форма функции выигрыша в этом случае отражали тот факт, что строительная программа осуществлялась в районе «со стабильным режимом воспроизводства основных фондов» [4].

Рассмотрим случай, когда строительная программа выполняется в районе нового хозяйственного освоения. Суммарный объем финансирования для такой программы нередко неизвестен и может существенно меняться в ходе ее реализации.

Затраты вида I, которые по предположению несет Строитель, для данной ситуации представим в виде

$$F(x, y) = \sum_{t=1}^T \gamma_t(x, y) |x_t - y_t| = \sum_{t=1}^T f_t(x, y),$$

где

$$\gamma_t(x, y) = \begin{cases} \gamma_t^1, & \text{если } x_t \geq y_t, \gamma_t^1 > 0, \gamma_t^2 > 0. \\ \gamma_t^2, & \text{если } x_t \leq y_t, \end{cases}$$

Пусть

$$X = \{(x_t)^T_{t=1} | x_t \geq 0\}, \quad (1)$$

$$Y = \{(y_t)^T_{t=1} | 0 \leq a_t \leq y_t \leq b_t\}.$$

Здесь $F(x, y)$ — непрерывная функция, выпуклая по x для каждого $y \in Y$; Y — выпуклый компакт. Поэтому у Строителя существует чистая оптимальная стратегия ([6, теорема 2]).

Определим стратегию Строителя x^0

$$x_t^0 = \frac{\gamma_t^1 a_t + \gamma_t^2 b_t}{\gamma_t^1 + \gamma_t^2}, \quad t=1, \dots, T.$$

Ясно, что $x^0 \in X$. Легко видеть также, что $a_t \leq x_t^0 \leq b_t$ для $t=1, \dots, T$. Покажем, что x^0 — оптимальная стратегия Строителя. Для этого достаточно показать, что x^0 не хуже любой другой стратегии из X .

Теорема 1. $\max_Y F(x^0, y) \leq \max_Y F(x, y)$ для $x \in X$.

Доказательство. Пусть $x \in X$, $x \neq x^0$, $y \in Y$. Построим вектор y' следующим образом. Если $x_t^0 < x_t$ и $x_t^0 < y_t$, то

$$y_t' = a_t + \frac{\gamma_t^2}{\gamma_t^1} (b_t - y_t), \quad (2)$$

если $x_t < x_t^0$ и $y_t < x_t^0$, то

$$y_t' = b_t - \frac{\gamma_t^1}{\gamma_t^2} (y_t - a_t), \quad (3)$$

во всех других случаях $y_t' = y_t$. Дальнейшее доказательство теоремы расчленим на леммы.

Лемма 1. $y' \in Y$.

Доказательство. Если $y'_t = y_t$, то $a_t \leq y'_t \leq b_t$. Если $y'_t \neq y_t$, то выполняется один из случаев (2), (3). Пусть $x_t^0 < x_t$ и $x_t^0 < y_t < b_t$. Тогда

$$\begin{aligned} a_t \leq y'_t &= a_t + \frac{\gamma_t^2}{\gamma_t^1} (b_t - y_t) = x_t^0 \left(1 + \frac{\gamma_t^2}{\gamma_t^1} \right) - \frac{\gamma_t^2}{\gamma_t^1} y_t = \\ &= x_t^0 - \frac{\gamma_t^2}{\gamma_t^1} (y_t - x_t^0) \leq x_t^0 < y_t \leq b_t. \end{aligned}$$

Пусть теперь $x_t < x_t^0$, $a_t \leq y_t < x_t^0$. Тогда

$$\begin{aligned} b_t \geq y'_t &= b_t - \frac{\gamma_t^1}{\gamma_t^2} (y_t - a_t) = x_t^0 \left(1 + \frac{\gamma_t^1}{\gamma_t^2} \right) - \\ &- \frac{\gamma_t^1}{\gamma_t^2} y_t = x_t^0 + \frac{\gamma_t^1}{\gamma_t^2} (x_t^0 - y_t) \geq x_t^0 > y_t \geq a_t. \end{aligned}$$

Следовательно, $a_t \leq y'_t \leq b_t$ при $t=1, \dots, T$. Лемма доказана.

Лемма 2. $f_t(x^0, y') = f_t(x^0, y)$ для $t=1, \dots, T$ и $y \in Y$.

Доказательство. Пусть $y'_t \neq y_t$. Предположим сначала, что $x_t^0 < x_t$ и $x_t^0 < y_t$, тогда

$$y'_t = x_t^0 - \frac{\gamma_t^2}{\gamma_t^1} (y_t - x_t^0) \leq x_t^0$$

(см. доказательство леммы 1), поэтому $f_t(x^0, y') = \gamma_t^1 (x_t^0 - y'_t) = \gamma_t^2 (y_t - x_t^0) = f_t(x^0, y)$. Пусть теперь $x_t < x_t^0$ и $x_t^0 > y_t$, тогда

$$y'_t = x_t^0 + \frac{\gamma_t^1}{\gamma_t^2} (x_t^0 - y_t) \geq x_t^0$$

(см. доказательство леммы 1) и $f_t(x^0, y') = \gamma_t^2 (y'_t - x_t^0) = \gamma_t^1 (x_t^0 - y_t) = f_t(x^0, y)$. Лемма доказана.

Лемма 3. $f_t(x, y') \geq f_t(x^0, y')$ для $t=1, \dots, T$.

Доказательство. Пусть $x_t \neq x_t^0$. Рассмотрим четыре случая.

1. $x_t^0 < x_t$, $y_t \leq x_t^0$, тогда $y'_t = y_t = x_t^0 < x_t$. Следовательно, $f_t(x, y') = -\gamma_t^1 (x_t - y'_t) \geq \gamma_t^1 (x_t^0 - y'_t) = f_t(x^0, y')$.

2. $x_t^0 < x_t$, $y_t > x_t^0$, тогда (см. доказательство леммы 1) $y'_t \leq x_t^0 < x_t$ и $f_t(x, y') \geq f_t(x^0, y')$, как в случае 1.

3. $x_t < x_t^0$, $y_t \geq x_t^0$, тогда $y'_t = y_t \geq x_t^0 > x_t$. Следовательно, $f_t(x, y') = -\gamma_t^2 (y'_t - x_t) \geq \gamma_t^2 (y'_t - x_t^0) = f_t(x^0, y')$.

4. $x_t < x_t^0$, $y_t < x_t^0$, тогда (см. доказательство леммы 1) $y'_t \geq x_t^0 > x_t$ и $f_t(x, y') \geq f_t(x^0, y')$, как в случае 3. Лемма доказана.

Из лемм 1–3 вытекает, что для любых $x \in X$ и $y \in Y$ существует $y' \in Y$

$$\text{такое, что } F(x^0, y) = \sum_{i=1}^T f_i(x^0, y) = \sum_{i=1}^T f_i(x^0, y') \leq \sum_{i=1}^T f_i(x, y') = F(x, y').$$

Тогда $\max_Y F(x^0, y) \leq \max_Y F(x, y)$ для $x \in X$. Теорема доказана.

Замечание. Используя стратегию x^0 , Строитель в году t может проиграть не более

$$\gamma_t^1 (x_t^0 - a_t) = \gamma_t^2 (b_t - x_t^0) = \frac{\gamma_t^1 \gamma_t^2}{\gamma_t^1 + \gamma_t^2} (b_t - a_t).$$

Его суммарный проигрыш, следовательно, не превышает $\sum_{i=1}^T \frac{\gamma_i^1 \gamma_i^2}{\gamma_i^1 + \gamma_i^2} \times$

$\times (b_i - a_i)$.

Чем точнее информация о намерениях Инвестора (чем меньше $|b_i - a_i|$), тем лучшие результаты даст Строителю его оптимальная стратегия x^0 . Таким образом, Строитель заинтересован в получении возможно более точной информации. Заинтересован ли Инвестор в том, чтобы предоставить ему такую информацию? Инвестору необходимо, прежде всего, чтобы был выполнен неизвестный заранее суммарный объем СМР за весь период

$[0, T]$. Но $a_i \leq x_i^0 \leq b_i$ и $a_i \leq y_i \leq b_i$, поэтому $\left| \sum_{i=1}^T y_i - \sum_{i=1}^T x_i \right| \leq \sum_{i=1}^T (b_i - a_i)$.

Следовательно, Инвестор заинтересован в том, чтобы Строитель имел возможно более точную информацию.

Второй этап — задача В. На предыдущем этапе оптимизации долговременной строительной программы в агрегированной форме была определена такая траектория развития мощностей строительного комплекса по пятилеткам, которая в условиях неопределенности параметров строительной программы позволяет свести к минимуму затраты вида I. Цель второго этапа — минимизация затрат вида II. Естественной основой для формализации в этом случае служат так называемые модели комплексов операций [2]. Ранее нами предложены некоторые способы анализа и оптимизации таких комплексов, отображающие развитие процесса строительного производства в границах краткосрочного планового периода [7, 8]. Переход к долгосрочным моделям требует принять во внимание их специфику, прежде всего — изменение способов учета фактора времени и увеличение агрегированности переменных и параметров модели, что ведет к иной интерпретации получаемых результатов. Все это вызывает необходимость модификации предложенных в [7] алгоритмических процедур.

В дополнение к предпосылкам 1), 2), введенным на первом этапе, будем предполагать также, что: 3) конечный результат (эффект) реализуется только после окончания строительной программы в полном объеме*; 4) существует временная упорядоченность возведения объектов программы, отражающая их технические, технологические и экономические взаимосвязи.

Пусть работы строительной программы, подлежащие выполнению после пятилетки $t-1$, моделируются графом G_t . Каждая его дуга соответствует укрупненной работе, отображающей в агрегированном виде процесс строительства одного из объектов программы**. Можно считать, что $G_t = (X_t, U_t)$, где X_t — конечное множество натуральных чисел; U_t — бинарное антисимметричное, антирефлексивное отношение без циклов на X_t .

Как было сказано выше, задача В заключается в определении в границах некоторого планового периода с шагом, равным одному году, таких сроков начала и длительностей дуг — работ графа G_t , при которых достигалось бы экстремальное значение критерия оптимальности (минимум затрат вида II). Считается, что для каждой работы $(i, j) \in U_t$ известны наибольшая и наименьшая длительности a_{ij} , b_{ij} и сметная стоимость c_{ij} . Ясно,

* Предпосылка 3) в значительной степени является следствием применения в задаче критерия затратного типа. Тем не менее она специально выделяется, так как сформулированное в ней допущение непосредственно влияет на выбор структуры используемой сетевой модели.

** Если работа начата до пятилетки t , то в граф G_t входит только та ее часть, которая не будет выполнена в предшествующем периоде.

что $a_{ij} \leq b_{ij} \leq 5(T-t)$. Известен также объем финансирования СМР y_t на пятилетку t .

Говоря, что работа начинается (кончается) в момент τ , мы подразумеваем, что она начинается (кончается) в интервале, началом (концом) которого является τ .

Неизвестные величины $T_{ij}, t_{ij}, (ij) \in U_t$, обозначающие соответственно время начала и длительность работы (ij) , — целые. Будем предполагать, что a_{ij}, b_{ij} — также целые числа.

Неизвестные должны удовлетворять следующим ограничениям

$$T_{ij} + t_{ij} \leq 5T, \quad (ij) \in U_t,$$

т.е. строительство любого объекта программы завершается не позже года $5T$;

$$T_{ij} \geq 5(t-1), \quad (ij) \in U_t,$$

т.е. работы графа G_t начинаются не ранее года $5(t-1)$;

$$T_{ij} + t_{ij} \leq T_{jk}, \quad (ij) \in U_t, \quad (jk) \in U_t,$$

т.е. строительство объектов программы упорядочено во времени;

$$a_{ij} \leq t_{ij} \leq b_{ij}, \quad (ij) \in U_t,$$

т.е. искомая продолжительность любой работы должна находиться в заданных пределах.

Прежде чем выписать другие ограничения, введем некоторые обозначения

$$\pi = \{(T_{ij}, t_{ij}) / (ij) \in U_t\},$$

$$M_t^s(\pi) = \{(ij) / (ij) \in U_t, T_{ij} \leq 5(t-1) + s < T_{ij} + t_{ij}\} \quad \text{для } s=0, \dots, 4,$$

$$R_t^s(\pi) = \sum_{(ij) \in M_t^s(\pi)} \frac{c_{ij}}{t_{ij}}$$

$$R_t(\pi) = \sum_{s=0}^4 R_t^s, \quad (4)$$

где $M_t^s(\pi)$ — множество работ, которые производятся в интервале $[5(t-1)+s, 5(t-1)+s+1]$, т.е. в году $s+1$ пятилетки t .

Будем считать выполненными следующие предположения: 5) сметная стоимость при строительстве любого объекта программы осваивается равномерно, тогда c_{ij}/t_{ij} — потребность в ресурсах (обобщенно выраженная через сметную стоимость) на выполнение работы (ij) в любом единичном интервале, в котором эта работа производится; 6) общая сметная стоимость работ, осуществляемых Строителем в пятилетке t для Инвестора (с учетом привлечения или «вывоза» мощностей), должна примерно совпадать с объемом финансирования в данной пятилетке, т.е. $y_t - \varepsilon_t^1 \leq R_t(\pi) \leq y_t + \varepsilon_t^2$, где отклонения ε_t^1 и ε_t^2 предполагаются известными и достаточно малыми, чтобы не вызывать дополнительных затрат вида I у Строителя. Эти отклонения, как правило, преодолеваются за счет использования плановых резервов Строителя и, естественно, находят отражение при формировании планового уровня сметных затрат.

Зная величину фактического финансирования на пятилетку t , можно найти значения α_t^s и β_t^s для $s=0, \dots, 4$, определяющие границы освоения сметной стоимости в году $s+1$ пятилетки t : $\alpha_t^s \leq R_t^s(\pi) \leq \beta_t^s, s=0, \dots, 4$.

Итак, пусть $\pi = \{(T_{ij}, t_{ij}) / (ij) \in U_t\}$.

Используя непрерывное дисконтирование [9], целевую функцию модели запишем

$$\Phi(\pi) = \sum_{(ij) \in U_t} \int_{T_{ij}}^{T_{ij}+t_{ij}} \frac{c_{ij}}{t_{ij}} (1+E)^{5T-\tau} d\tau. \quad (5)$$

После вычисления интеграла и элементарных преобразований

$$\Phi(\pi) = \sum_{(ij) \in U_t} \frac{c_{ij}}{t_{ij}} \frac{(1+E)^{5T-T_{ij}-t_{ij}}}{\ln(1+E)} ((1+E)^{t_{ij}} - 1),$$

где $\Phi(\pi)$ — интегральные приведенные затраты [3, 9]. В результате задача B записывается следующим образом: найти план $\pi = \{(T_{ij}, t_{ij}) / (ij) \in U_t\}$, доставляющий минимум функции

$$\Phi(\pi) = \sum_{(ij) \in U_t} \frac{c_{ij}}{\ln(1+E)} \frac{(1+E)^{5T-T_{ij}-t_{ij}}}{t_{ij}} ((1+E)^{t_{ij}} - 1) \quad (6)$$

при ограничениях

$$T_{ij} + t_{ij} \leq 5T, \quad (ij) \in U_t, \quad (7)$$

$$T_{ij} \geq 5(t-1), \quad (ij) \in U_t, \quad (8)$$

$$T_{ij} + t_{ij} \leq T_{jk}, \quad (ij) \in U_t, \quad (jk) \in U_t, \quad (9)$$

$$a_{ij} \leq t_{ij} \leq b_{ij}, \quad (ij) \in U_t, \quad (10)$$

$$y_t - \varepsilon_t \leq R_t(\pi) \leq y_t + \varepsilon_t, \quad (11)$$

$$\alpha_t^s \leq R_t^s(\pi) \leq \beta_t^s, \quad s=0, \dots, 4, \quad (12)$$

$$T_{ij}, t_{ij} - \text{целые}. \quad (13)$$

В (11), (12) R_t^s и R_t определяются по формулам (4).

Анализ модели (6) — (13). Модель формализует комбинаторную задачу полного упорядочения работ строительной программы, предварительно полуупорядоченных с помощью графа G_t [10]. Эффективных общих подходов к решению подобных задач нет, поэтому необходимо в каждом конкретном случае искать специальные приемы поиска оптимальных (или близких к ним) решений. Применительно к задаче календаризации строительных программ в постановке, близкой по смыслу к приведенной в данной статье, можно выделить два таких метода. В [4] предлагается для упрощения исключить «сетевые условия» (в нашем случае — (7)–(10)); тогда при дискретной форме дисконтирования строительных затрат удастся перейти к задаче линейного программирования. Получив решение в аналитическом виде, авторы [4] стремятся «обнаружить некоторые свойства оптимальных решений задач рассматриваемого класса». Затем с помощью некоторой эвристической процедуры, используя результаты предыдущего этапа, предполагается найти расписание, удовлетворяющее отброшенным сетевым ограничениям.

В [2] сформулирована модель с сетевыми ограничениями и целевой функцией, описывающей суммарный дисконтированный эффект, причем неизвестными считаются только сроки начал работ. Благодаря этому задачу календаризации можно свести к задаче линейного программирования.

Оба приема наряду с достоинством имеют очевидные недочеты. В первом случае поставленная календарная задача фактически не решается, а связь результата, полученного по упрощенной модели, с искомым расписанием не ясна. Во втором случае в модели учтены лишь сетевые ограничения, локальные по своему характеру, т. е. описывающие условия ре-

лизации только данной строительной программы, независимо от других, параллельно осуществляемых программ. Ограничения вида (11), (12), лимитирующие общий уровень расходов по программе и столь существенные в практических приложениях, отсутствуют. Без таких ограничений нельзя с уверенностью судить о степени соответствия локально оптимального решения глобальному народнохозяйственному оптимуму [41]. Таким образом, попытки избежать традиционных для теории расписаний трудностей путем искусственной «регуляризации» [12] исходной задачи до конца проблемы не решают.

Ниже для (6)–(13) предлагается метод типа «ветвей и границ», осуществляющий усеченный перебор вариантов. Правила отсекаания заведомо «неоптимальных» ветвей составлены так, чтобы по возможности сократить время поиска решения. Наш подход позволяет сохранить все существенные ограничения модели и за приемлемое время получить искомое решение [7].

Обозначим $\min_{(jk) \in U_t} \{T_{jk}\} - a_{ij}$ через T_{ij}^1 для $(ij) \in U_t$ (если $\{(jk)/(jk) \in U_t\} = \emptyset$, то полагаем $T_{ij}^1 = 5T - a_{ij}$).

Лемма 4. Функция $\Phi(\pi)$ при ограничениях (7)–(10), (13) достигает минимума на плане $\pi_0 = \{(T_{ij}^1, a_{ij}) / (ij) \in U_t\}$.

Доказательство (см. доказательство леммы 1 в [13]). Из леммы 4 следует, что если задача (6)–(10) имеет допустимые решения, то ее оптимальным решением является π_0 . Если π_0 удовлетворяет ограничениям (11), (12), то π_0 — решение задачи B . В противном случае, варьируя T_{ij} и t_{ij} , можно перебрать все решения, допустимые относительно (7)–(10), (13) в поисках такого, которое удовлетворяет условиям (11), (12). Если этот перебор осуществляется в порядке возрастания функции $\Phi(\pi)$, то первое подобное решение будет оптимальным для задачи B .

Алгоритм решения задачи (6)–(13).

Шаг 1. Полагаем $T_{ij} = T_{ij}^1$ для $(ij) \in U_t$.

Шаг 2. Полагаем $t_{ij} = a_{ij}$ для $(ij) \in U_t$.

Замечание. Если $\min_{(ij) \in U_t} T_{ij}^1 < 5(t-1)$, то задача не имеет допустимых решений, поэтому будем считать, что $T_{ij}^1 \geq 5(t-1)$ для $(ij) \in U_t$.

Шаг 3. Определен план $\pi = \{(T_{ij}, t_{ij})\}$. Вычисляем величины $R_t^s(\pi)$ для $s = 0, \dots, 4$.

Шаг 4. Проверяем, выполнены ли ограничения (11), (12). Если да, то переходим к шагу 5, в противном случае — к шагу 6.

Шаг 5. Зафиксированные к этому моменту T_{ij} и t_{ij} дают решение задачи B . Работа алгоритма закончена.

Шаги 6, 7. Преобразованием плана π_0 назовем набор $r = \{(\Delta_{ij}, \delta_{ij}) / (ij) \in U_t\}$, где Δ_{ij} и δ_{ij} — натуральные числа (компоненты преобразования). Через r_0 обозначим преобразование, все компоненты которого равны нулю. Преобразование $\bar{r} = \{(\bar{\Delta}_{ij}, \bar{\delta}_{ij})\}$ назовем более правым, чем $r = \{(\Delta_{ij}, \delta_{ij})\}$, если $\bar{\delta}_{ij} - \Delta_{ij} \geq \delta_{ij} - \Delta_{ij}$ и $\bar{\delta}_{ij} \leq \delta_{ij}$ для всех $(ij) \in U_t$, а преобразование $r \neq r_0$ — допустимым, если

$$T_{ij}^1 - \Delta_{ij} + a_{ij} + \delta_{ij} \leq 5T, \quad (ij) \in U_t, \quad (14)$$

$$T_{ij}^1 - \Delta_{ij} \geq 5(t-1), \quad (ij) \in U_t, \quad (15)$$

$$T_{ij}^1 - \Delta_{ij} + a_{ij} + \delta_{ij} \leq T_{jk}^1 - \Delta_{jk}, \quad (ij) \in U_t, \quad (jk) \in U_t, \quad (16)$$

$$a_{ij} + \delta_{ij} \leq b_{ij}, \quad (ij) \in U_t. \quad (17)$$

Преобразование $r = \{(\Delta_{ij}, \delta_{ij})\}$ допустимо тогда и только тогда, когда план $\pi_0(r) = \{(T_{ij}^1 - \Delta_{ij}, a_{ij} + \delta_{ij})\}$ удовлетворяет условиям (6)–(10). Издержками допустимого преобразования r будем называть $c(r) = \Phi(\pi_0(r)) - \Phi(\pi_0)$, $c(r) \geq 0$ по лемме 4. Предположим, что множество R всех допу-

стимых преобразований упорядочено по возрастанию $c(r)$: $R = \{r_1, r_2, \dots\}$, $c(r_{i+1}) \geq c(r_i)$ для $i \geq 1$. Шаг 6 проверяет, не исчерпана ли эта последовательность, шаг 7 выбирает очередной ее элемент, если он существует. Делается это следующим образом.

Предположим, что к шагам 6, 7 мы обращались уже s раз, $s \geq 0$. Тогда найдены преобразования $r_0, \dots, r_s$ и конечное множество $D_s \subset R$ ($D_0 = \emptyset$ по определению), причем $c(r_0) \leq \dots \leq c(r_s)$. Обозначим $D_s \setminus \{r_s\}$ через D_s' . Пусть $r_s = \{(\Delta_{ij}^s, \delta_{ij}^s)\}$. Для каждой пары $(m, n) \in U$, рассмотрим следующие преобразования r_{mn}^1 и r_{mn}^2 : $r_{mn}^1 = \{(\Delta_{ij}, \delta_{ij})\}$, $\delta_{ij} \in \delta_{ij}^s$ и $\Delta_{ij} = \Delta_{ij}^s$ для $(ij) \neq (mn)$, $\Delta_{mn} = \Delta_{mn}^s + 1$, $\delta_{mn} = \delta_{mn}^s + 1$, $r_{mn}^2 = \{(\Delta_{ij}, \delta_{ij})\}$, $\Delta_{ij} = \Delta_{ij}^s$ для $(ij) \neq (mn)$, $\Delta_{mn} = \Delta_{mn}^s + 1$, $\delta_{ij} = \delta_{ij}^s$ для $(ij) \in U$. Добавляем к D_s' преобразования r_{mn}^1 , если оно допустимо (для этого достаточно выполнения условия (15) при $(ij) = (mn)$, (16) при $(jk) = (mn)$, (17) при $(ij) = (mn)$) и в D_s' нет преобразования, более правого, чем r_{mn}^1 . Добавляем к D_s' преобразование r_{mn}^2 , если оно допустимо (достаточно справедливости (15) при $(ij) = (mn)$, (16) при $(jk) = (mn)$) и в D_s' нет преобразования, более правого, чем r_{mn}^2 . Проведем описанную процедуру для всех $(mn) \in U$, получим множество $D_{s+1} \supseteq D_s'$. Если $D_{s+1} = \emptyset$, то шаг 6 дает ответ «нет», и переходим к шагу 8, в противном случае — к шагу 7 и выбираем $r_{s+1} = \{(\Delta_{ij}^{s+1}, \delta_{ij}^{s+1})\}$ так, чтобы $c(r_{s+1}) = \min_{r \in D_{s+1}} c(r)$. Полагаем $T_{ij} = T_{ij}^1 - \Delta_{ij}^{s+1}$, $t_{ij} = a_{ij} + \delta_{ij}^{s+1}$. Переходим к шагу 3.

Изложенный алгоритм реализации шагов 6, 7 обосновывается леммой 5.

Лемма 5. $\min_{r \in D_s} c(r) = \min_{r \in R \setminus \{r_0, \dots, r_{s-1}\}} c(r)$ для $s \geq 1$.

Доказательство (см. доказательство леммы 2 в [13]). Из леммы 5 ясно, что последовательность $r_1, r_2, \dots$, порождаемая алгоритмом, перечисляет все элементы множества R в порядке возрастания функции $c(r)$.

Шаг 8. Если шаг 6 дал ответ «нет», то условия задачи несовместны, решений нет. Работа алгоритма закончена.

Заключительные замечания. В целом двухэтапный процесс оптимизации долговременной строительной программы на основе моделей задач A и B можно представить следующим образом.

В начале долгосрочного планового периода (20–25 лет), имея неполную информацию о намерениях Инвестора относительно финансирования строительной программы, Строитель определяет в результате решения задачи A стратегию развития своих мощностей по пятилеткам. Затем, как только становится известным точный объем финансирования на очередную пятилетку, Строитель исходя из предпосылки, что все средства, выделенные на пятилетку, должны быть освоены, в годовом разрезе решает задачу B , т. е. намечает сроки начала и длительности работ, которые должны быть произведены в данной пятилетке. Относительно работ программы, переходящих либо целиком выполняемых в последующие пятилетки планового периода, окончательные решения принимаются лишь после того, как выявлены объемы финансирования строительных расходов на эти пятилетки. Ясно, что задача B решается T раз. Фиксируя план выполнения работ в пятилетке t , можно изменять после каждого расчета параметры модели и даже топологию сети в последующих пятилетках.

Подобная гибкость модели особенно важна при практических расчетах, которые проводятся в настоящее время применительно к строительным программам отдельных территориально-производственных комплексов Тюменской нефтегазоносной провинции и зоны хозяйственного освоения Байкало-Амурской магистрали.

ЛИТЕРАТУРА

1. Долгосрочные программы капитальных вложений. М.: Экономика, 1974.
2. Алтаев В. Я., Козутовская Л. А. Сетевые методы планирования капитальных вложений. М.: Наука, 1976.
3. Богачев В. Н. Некоторые вопросы моделирования инвестиционного процесса в районах пионерного освоения.— В кн. Планирование многоотраслевых долгосрочных строительных программ. Новосибирск: ИЭ и ОПП СО АН СССР, 1971.
4. Богачев В. Н., Лавров Л. Г. Опыт моделирования процесса создания энергопромышленного комплекса.— В кн. [1].
5. Кибалов Е. Б., Хуторецкий А. Б. К вопросу о выборе стратегии развертывания мощностей строительного комплекса.— В кн. Моделирование развития строительного комплекса. Новосибирск: ИЭ и ОПП СО АН СССР, 1979.
6. Боненблат Х. Ф., Карлин С., Шепли Л. С. Игры с непрерывной функцией выигрыша.— В кн. Бесконечные антагонистические игры. М.: Физматгиз, 1963.
7. Кибалов Е. Б., Хуторецкий А. Б. Задача объемно-календарного планирования строительного производства.— Экономика и матем. методы, 1976, т. XII, вып. 6.
8. Кибалов Е. Б., Хуторецкий А. Б., Емельянов Я. П. Декомпозиционный подход и фактор надежности в задаче объемно-календарного планирования строительного производства.— Экономика и матем. методы, 1978, т. XIV, вып. 5.
9. Массе П. Критерии и методы оптимального определения капиталовложений. М.: Статистика, 1971.
10. Шкурба В. В. О задачах упорядочения.— Кибернетика, 1967, № 2.
11. Аганбегян А. Г., Багриновский К. А., Гранберг А. Г. Система моделей народно-хозяйственного планирования. М.: Мысль, 1972.
12. Корбут А. А., Финкельштейн Ю. Ю. Дискретное программирование. М.: Наука, 1969.
13. Кибалов Е. Б., Хуторецкий А. Б. Модель и алгоритм оптимизации долгосрочной строительной программы.— В кн. [5].

Поступила в редакцию
12 VII 1979