ЭКОНОМИКА
И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

1981
том XVII, вып. 2

ЗАМЕТКИ И ПИСЬМА

АНАЛИЗ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ВОЗМОЖНОСТЕЙ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

ЛОТОВ А. В.

(Москва)

В данной заметке предлагается подход к анализу управляемых экономических систем, предназначенный для оценки их потенциальных возможностей, т. е. всех реализуемых результатов функционирования при любых допустимых управлениях. Этот подход может оказаться полезен для прогнозирования развития и предпланового анализа таких систем, описываемых линейными моделями, и дополнить существующие в настоящее время методы анализа систем подобного рода.

Основные его идеи будут изложены в статическом и динамическом случае и проиллюстрированы несколькими простыми примерами. Работа над численными алгоритмами оценки потенциальных возможностей экономических систем была начата в ВЦ АН СССР в 1970 г., некоторые положения высказывались ранее в [1, 2].

1. АНАЛИЗ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ВОЗМОЖНОСТЕЙ В СТАТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

Рассмотрим экономическую систему, описываемую линейными методами типа

$$A_1u\leqq b_1, \tag{1}$$

$$A_2u=b_2, \tag{2}$$

где $u=(u_1,\ldots,u_r)\in E^r$ – вектор переменных модели; A_1, A_2 – заданные матрицы; b_1, b_2 – заданные векторы. Соотношения (1), (2) – представление линейной статической экономической модели в общем виде. Пусть задана система m линейных показателей

$$f=Fu, \tag{3}$$

где $f=(f_1,\ldots,f_m)\in E^m$ – вектор показателей системы; F – заданная матрица, устанавливающая связь f с u.

Множество G_f потенциальных возможностей по отношению к системе показателей (функционалов) f определим как совокупность всех реализуемых с точки зрения модели (1), (2) значений f

$$G_f=\{f:f=Fu,\ A_1u\leqq b_1,\ A_2u=b_2\}. \tag{4}$$

Выражение (4) задает множество G_f неявно. Под анализом потенциальных возможностей экономической системы будем понимать построение G_f в явном виде и его исследование *.

Соотношения (1)–(3) задают многогранное множество Y в E^{r+m}–$r+m$-мерном пространстве, являющемся декартовым произведением пространств E^r и E^m

$$Y=\{\{u,f\}:f=Fu,\ A_1u\leqq b_1,\ A_2u=b_2\}, \tag{5}$$

где $\{u,f\}$ – элемент E^{r+m}. По определению G_f состоит из тех и только тех точек $f^*\in E^m$, для которых найдется по крайней мере одна точка $u^*\in E^r$, такая, что

$$\{u^*,f^*\}\in Y. \tag{6}$$

---

* В последнее время множества потенциальных возможностей получили и другое наименование – обобщенные множества достижимости.

Таким образом, G_f – ортогональная проекция Y в пространство показателей E^m, и для построения G_f в явном виде достаточно уметь строить ортогональную проекцию многогранного множества.

Известные методы построения проекций многогранных множеств [3] дают возможность решать эту задачу при малом числе переменных (1), (2). Модификации, использующие отбрасывание несущественных и малосущественных ограничений системы линейных неравенств [4, 5], позволяют эффективно строить проекции для достаточно больших моделей типа (1)–(3) (порядка нескольких десятков переменных, ограничений и показателей). Следовательно, проблема построения G_f для моделей типа (1)–(3) во многих случаях практически разрешима, и это множество может быть представлено явно

$$G_f=\{f: Df\leqq d\}. \tag{7}$$

Характерный вид G_f в двумерном случае приведен на рис. 1 и 2. Часть границы G_f, находящаяся между точками A и B, является множеством эффективных (неулучшаемых) значений показателей (оптимальных по Парето относительно критерия $f=(f_1, f_2)$). Когда критериев больше двух, на плоскости (в том числе на экране терминального устройства ЭВМ) могут быть двумерные сечения G_f и его проекции

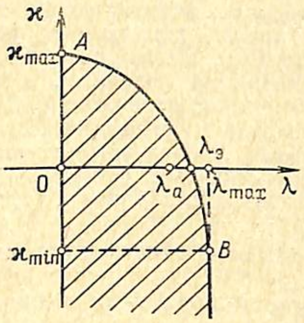

Рис. 1

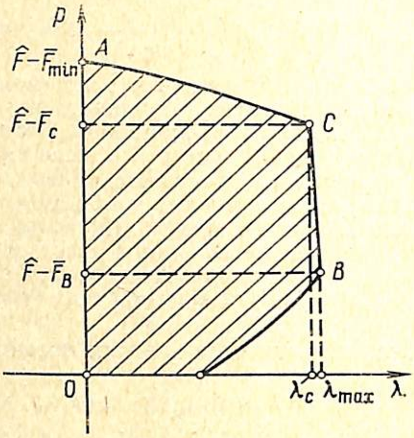

Рис. 2

на двумерные подпространства показателей. Таким образом, предлагаемый подход дает возможность графически изобразить множество всех допустимых значений показателей и, что особенно важно, получить более наглядные результаты, чем при использовании обычных методов многокритериальной оптимизации, с помощью которых строятся отдельные эффективные точки в пространстве показателей и управлений, поскольку даже в линейном случае множество эффективных значений (кривая AB) не выпукло и плохо представимо на основе отдельных точек.

В качестве примера рассмотрим результаты изучения роли внешней торговли в повышении конечного потребления, а также связи между потреблением и характеристиками чистоты окружающей среды. Это исследование осуществлялось с применением линейной модели, описанной в [6]. На рис. 1 изображено множество возможных значений показателей: λ – уровень потребления; $\varkappa$ – сальдо внешней торговли; $\varkappa_{max}$ – максимально возможное сальдо внешней торговли, кривая эффективных вариантов этих показателей AB; λ_{max}, получаемое при минимальном разумном сальдо $\varkappa_{min}$; λ_a – максимальный уровень потребления при отсутствии внешней торговли.

На рис. 2 приведено множество возможных значений показателей потребления λ и чистоты окружающей среды $p=\hat{F}-\bar{F}$, где $\bar{F}$ – загрязнение; $\hat{F}$ – ограничение на него сверху. Интересно отметить, что λ_{max} достигается при сильно загрязненной окружающей среде $\bar{F}_B$, в то время как при мало отличающемся от λ_{max} уровне потребления λ_c загрязнение окружающей среды $\bar{F}_c$ значительно меньше.

Проекции и сечения множества потенциальных возможностей, аналогичные рис. 1 и 2, могут быть использованы для лучшего понимания свойств изучаемых систем.

2. АНАЛИЗ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ВОЗМОЖНОСТЕЙ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ В ДИНАМИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

Пусть изменение вектора состояний изучаемой экономической системы описывается системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x}=A(t)x+B(t)u+a(t), \tag{8}$$

где $x \in E^n$ – вектор состояния системы; $y \in E^r$ – вектор управлений; элементы матриц $A(t)$ и $B(t)$, а также вектор $a(t)$ – заданные функции времени. На состояние и управление в каждый момент времени наложено ограничение

$$\{x(t),\ u(t)\} \in Y(t), \tag{9}$$

где $Y(t)$ – выпуклое, зависящее от времени множество пространства E^{n+r}. Начальное состояние системы $x(0)$ принадлежит некоторому выпуклому множеству $\Gamma(0) \subset E^n$, т. е.

$$x(0) \in \Gamma(0). \tag{10}$$

Рассмотрим специальный класс показателей для (8) – (10), а именно

$$f=x(T), \tag{11}$$

где T – некоторый момент времени, $T>0$. Множество их возможных значений в теории управления принято называть множеством достижимости. Обозначим его через $\Gamma(T)$.

В случае, когда $\Gamma(T)$ уже построено, можно приближенно получить множество потенциальных возможностей G_f для системы произвольных линейных показателей, на которые влияет состояние системы (8) – (10) в момент времени T

$$f=Fx(T). \tag{12}$$

Для этого заметим, что G_f неявно представимо в виде

$$G_f=\{f: f=Fx(T),\ \ x(T) \in \Gamma(T)\}. \tag{13}$$

Множество достижимости $\Gamma(T)$ для выражений (8) – (10), как очевидно, – выпуклое, поэтому его можно аппроксимировать некоторым многогранным множеством $\tilde{\Gamma}$. Заменив в (13) выпуклое множество $\Gamma(T)$ на многогранное $\tilde{\Gamma}$, придем к соотношению, аналогичному (4), и с помощью методов, описанных в предыдущем разделе, получим аппроксимацию множества G_f в явном виде.

Замечание. Если один или несколько линейных показателей, интересующих нас при исследовании системы (8) – (10), являются интегральными, например,

$$f_i=\int\limits_0^T [(k_1(t), x(t))+(k_2(t), u(t))]\,dt,$$

где $k_1(t)$ и $k_2(t)$ – заданные вектор-функции времени, то к виду (12) такой показатель можно свести, введя фазовую переменную x_{n+1}, удовлетворяющую соотношениям: $\dot{x}_{n+1}=(k_1(t), x(t))+(k_2(t), u(t))$, $x_{n+1}(0)=0$. Тогда $f_i=x_{n+1}(T)$.

Таким образом, вопрос о построении множества потенциальных возможностей линейной динамической системы типа (8) – (10) может быть разрешен тремя следующими операциями: построением множества достижимости $\Gamma(T)$, аппроксимацией его многогранным множеством $\tilde{\Gamma}$ и нахождением ортогональной проекции. Методы нахождения проекции описаны в предыдущем разделе, первые же две операции предлагается осуществлять так.

Заменим (8) одной из многошаговых систем следующего класса

$$x_i=x_{i-1}+\tau(\alpha \overset{(1)}{A_i} x_{i-1}+(1-\alpha)\overset{(2)}{A_i} x_i)+\tau B_i u_i+\tau a_i, \tag{14}$$

где $i=1, \ldots, N$; $N=T/\tau$; $\overset{(1)}{A_i}$ $\overset{(2)}{A_i}$, B_i, a_i – некоторые аппроксимации $A(t)$, $B(t)$ и $a(t)$ на отрезке $(i-1)\tau \leqslant t \leqslant i\tau$; число $\alpha \in [0, 1]$ – параметр класса многошаговых систем. Соотношение (9) заменим

$$\{\beta x_{i-1}+(1-\beta)x_i,\ \ u_i\} \in Y_i, \tag{15}$$

где Y_i – многогранное множество, аппроксимирующее $Y(t)$ на отрезке $(i-1)\tau \leqslant t \leqslant i\tau$, $\beta \in [0, 1]$ – параметр. Начальное условие (10) заменим

$$x_0 \in \Gamma_0, \tag{16}$$

где Γ_0 – многогранное множество, аппроксимирующее $\Gamma(0)$.

Можно показать, что множество достижимости для (14)–(16), которое обозначим Γ_N и определим как множество всех точек, в которые можно перевести (14)–(16) за N шагов, является многогранным. В [7] для частного, а затем в [8] для общего случая многошаговых систем типа (14)–(16) показано, что при выполнении некоторых условий, естественных для экономических моделей, Γ_N аппроксимируют $\Gamma(T)$ при стремящихся к нулю значениях величины τ и других параметров аппроксимации. В [9] показано, что при ограниченном множестве $\Gamma(0)$ сходимость Γ_N к $\Gamma(T)$ имеет равномерный характер.

Следовательно, Γ_N аппроксимирует $\Gamma(T)$ и может быть использовано в качестве $\tilde{\Gamma}$, так что вопрос свелся к проблеме построения множеств достижимости для систем типа (14)–(16). Обратим внимание на то, что экономическая модель часто может быть с самого начала построена в виде (14)–(16), и тогда Γ_N будет уже не аппроксимацией, а точным множеством достижимости для изучаемой системы. Методы построения множеств достижимости для многошаговых систем типа (14)–(16) впервые были описаны в [7, 10]. Близкий по идее алгоритм указан в [11], а альтернативный – в [12]. В [5] описан метод приближенного построения множеств достижимости для экономических систем.

Предлагаемые в [7, 10, 11] подходы основываются на пошаговом построении множеств достижимости для систем типа (14)–(16). Пусть уже построено множество достижимости на шаге k; обозначим его через Γ_k. Тогда (14) и (15) при $i=k+1$, а также $x_k\in\Gamma_k$ задают многогранное множество V_k в $2n+r$-мерном пространстве $\{x_{k+1}, x_k, u_k\}$. Множество достижимости Γ_{k+1}, как легко понять,– ортогональная проекция V_k в пространстве состояний $\{x_{k+1}\}$. Таким образом, алгоритмы проектирования многогранных множеств, о которых говорилось выше, являются средством построения множеств достижимости для многошаговых систем. В случае необходимости используются методы приближенного проектирования [5]. Итак, можно считать, что вопрос о построении множеств достижимости для линейных динамических моделей небольшой размерности ($n\leqslant 10$) по крайней мере в принципе решен. Подчеркнем, что он по своей сложности превосходит задачу оптимизации.

Как уже говорилось, после аппроксимации $\Gamma(T)$ проблема приближенного построения множества потенциальных возможностей G_f для $f=x(T)$ оказывается решенной, а для произвольных линейных показателей типа $f=Fx(T)$ используется проектирование многогранника $\{\{f, x(T)\}: f=Fx(T), x(T)\in\Gamma_N\}$ в пространство показателей. В качестве примера кратко опишем изложенную в [5] схему выбора вариантов программ для отраслей непроизводственной сферы в программно-целевом подходе к планированию народного хозяйства. Основная идея этого подхода (см., например, [13]) состоит в планировании народного хозяйства от конечных целей развития страны, которые реализуются при помощи программ отраслей, производящих предметы и услуги непроизводственного характера. Остальные отрасли служат для обеспечения непроизводственной сферы. Для каждой отрасли непроизводственной сферы можно сформулировать много вариантов целей, но не все совокупности программ могут быть осуществлены за некоторый конечный срок (в 15–20 лет) из-за ограниченности ресурсов. Выбор реализуемых совокупностей целей – важнейший этап программно-целевого подхода к планированию народного хозяйства. Для того чтобы сделать этот выбор более наглядным и отсеять нереализуемые совокупности конечных целей и соответствующих программ, предлагается процедура, основанная на приближенной оценке потребностей программ в ресурсах в укрупненной номенклатуре и выявлении потенциальных возможностей производства по обеспечению этих потребностей.

Для оценки потребностей программ используется их представление в виде графа работ [14], потенциальные возможности производственной сферы характеризуются балансовой динамической моделью [15]. В качестве ее фазовых координат принимаются мощности ξ отраслей производства и суммарное потребление q продуктов отраслей и трудовых ресурсов вне производственной сферы. Множество достижимости для этих фазовых координат Γ_T проектируется в пространство суммарных потреблений $\{q(T)\}$. В результате получается $G_{q(T)}$ – множество потенциальных возможностей производства по выделению ресурсов для непроизводственной сферы. С помощью $G_{q(T)}$, описываемого как пересечение полупространств, можно оценить возможность реализации большого числа сочетаний вариантов отраслевых программ непроизводственной сферы.

Этот подход был реализован на модельном примере с условной информацией [5] (шесть отраслей производственной сферы, пять шагов по времени – период в 15 лет разбит на пять трехлетий, четыре отрасли непроизводственной сферы, шесть вариантов программ для каждой отрасли). Общее число вариантов совокупностей программ для данного примера – 1296. Множество достижимости строилось приближенно, с заданным количеством ограничивающих его плоскостей – 25. Алгоритм приближенного построения множеств достижимости был сконструирован так, чтобы «точное» множество достижимости принадлежало приближенному. Оценки потребностей программ давались по минимуму. Применение БЭСМ-6 позволило построить Γ_T за 1 ч машинного времени.

Проектируя множество достижимости в пространство $\{q(T)\}$, из 1296 исходных удалось выделить 216 реализуемых совокупностей. Надо подчеркнуть, что такая проверка не является достаточной, так как, во-первых, ресурсные возможности оценивались сверху, а потребности программ – снизу и, во-вторых, реализуемость «в целом» за весь период не означает еще, что потребности совокупности программ могут быть удовлетворены в каждый конкретный момент. Тем не менее оценка дала возможность отбросить значительную часть нереализуемых совокупностей.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лотов А. В.* Один подход к перспективному планированию экономики в условиях отсутствия критерия.– Тр. конференции «Системный анализ и перспективное планирование». Москва, 1972, М.: ВЦ АН СССР, 1973.
2. *Лотов А. В.* Исследование экономических систем с помощью множеств достижимости.– Тр. междунар. конференции «Моделирование экономических процессов». Ереван, 1974. М.: ВЦ АН СССР, 1975.
3. *Черников С. Н.* Линейные неравенства. М.: Наука, 1968.
4. *Бушенков В. А., Лотов А. В.* Методы и алгоритмы анализа линейных систем на основе построения обобщенных множеств достижимости.– Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 1980, т. 20, № 5.
5. *Лотов А. В., Огнивцев С. Б.* О предварительном распределении ресурсов между программами в программно-целевом подходе к планированию народного хозяйства. М.: ВЦ АН СССР, 1980.
6. *Гранберг А. Г., Рубинштейн А. Г.* Модификация межрегиональной межотраслевой модели мировой экономики.– Экономика и матем. методы, 1979, т. XV, вып. 2.
7. *Лотов А. В.* Численный метод построения множеств достижимости для линейных управляемых систем с фазовыми ограничениями.– Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 1975, т. 15, № 1.
8. *Лотов А. В.* О сходимости методов численной аппроксимации множеств достижимости для линейных дифференциальных систем с выпуклыми фазовыми ограничениями.– Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 1979, т. 19, № 1.
9. *Лотов А. В.* О равномерной аппроксимации множества достижимости для дифференциальной системы множествами достижимости для ее многошаговых аналогов.– Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 1978, т. 18, № 1.
10. *Лотов А. В.* Построение областей достижимости для линейной дискретной системы с ограничениями типа узких мест.– Тр. Моск. физ.-техн. ин-та. Серия аэрофизики и прикл. матем., М., 1971.
11. *Огнивцев С. Б.* Метод построения множеств достижимости для линейных управляемых систем с фазовыми ограничениями.– Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 1977, т. 17, № 5.
12. *Лебедев В. Ю., Огнивцев С. Б.* Об одном приближенном методе построения множеств достижимости для экономических систем.– В кн. [2].
13. *Поспелов Г. С., Ириков В. А.* Программно-целевое планирование и управление. М.: Сов. радио, 1976.
14. *Иванилов Ю. П., Моисеев Н. Н., Петров А. А.* Некоторые математические вопросы программного управления экономической системой.– В кн.: Кибернетику — на службу коммунизму. Вып. 6. М.: Энергия, 1971.
15. *Иванилов Ю. П., Петров А. А.* Динамическая модель расширения и перестройки производства (π-модель).– В кн. [14].

Поступила в редакцию
27 IV 1979