лезность любого допустимого плана относительно критерия K_i характеризуется степенью достижения максимума K_i^* этого критерия, оцененной по линейной шкале на отрезке [0, 1].

Взаимнооднозначное соответствие между значениями критерия K_i и точками отрезка [0, 1] можно установить, использовав следующий факт. Если критерий $K_i(x)$ определяет некоторое упорядочение множества допустимых планов $x \in v$ по степени их предпочтения, то критерий $Q_i(x)=p_iK_i(x)+q_i$, где $p_i>0$ и q_i являются константами, дает то же упорядочение. Пусть точке 0 отрезка [0, 1] соответствует минимальное значение критерия $Q_i(x)$, $Q_{i*}=p_iK_{i*}+q_i$, а точке 1 — максимальное значение этого критерия. Таким образом, p_i и q_i можно определить, решая систему уравнений: $p_iK_{i*}+q_i=0$, $p_iK_i^*+q_i=1$, где $K_{i*}=\min\limits_{x \in v} K_i(x)$, откуда $p_i=$ $=1/(K_i^*-K_{i*})>0$.

В этом случае весовые коэффициенты определяются равенствами

$$l_i=1/(K_i^*-K_{i*}), \quad i=1,\ldots,s.$$

Последняя задача системы (1) будет

$$\min_{x \in v} y, \quad \frac{K_i^*-K_i(x)}{K_i^*-K_{i*}} \leqq y, \quad i=1,\ldots,s, \tag{2}$$

а первые s задач имеют более сложный вид

$$\max_{x \in v}[\pm K_i(x)]=\begin{cases} K_i^* \\ -K_{i*} \end{cases} \quad i=1,\ldots,s.$$

При линейности частных критериев $K_i(x)$ и ограничений указанные экстремальные задачи являются задачами линейного программирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Saska J.* Linearni multiprogramovani.— Ekonomicko-matematicky obzor, 1968, № 3.
2. *Тамм М. И.* Компромиссное решение задачи линейного программирования с несколькими целевыми функциями.— Экономика и матем. методы, 1973, т. IX, вып. 2.

Поступила в редакцию
3 II 1978

О ПОСТРОЕНИИ ПРАВИЛЬНЫХ ОТСЕЧЕНИЙ В ВЫПУКЛОМ ЦЕЛОЧИСЛЕННОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ

ПОТЕМКИНА А. В., ШЕВЧЕНКО В. Н.

(Горький)

1. Многие проблемы планирования и управления народным хозяйством связаны с необходимостью решать задачи дискретной оптимизации, или, иначе, целочисленного программирования. Обычно рассматриваются задачи линейного целочисленного программирования с линейной целевой функцией и линейными ограничениями. В то же время многие постановки являются по существу нелинейными и требуют разработки специальных методов решения. Ниже предлагается обобщение известных алгоритмов отсечения на случай выпуклого целочисленного программирования.

Введем следующие обозначения. Пусть D – поле вещественных чисел; Z – кольцо целых чисел; $[\alpha]$, $\alpha \in D$ – наибольшее число, не превосходящее α; D^m – m-мерное евклидово пространство над D; Z^m и R^m – подмножества векторов из D^m с целочисленными и рациональными компонентами соответственно; $u \in D^m$, u – вектор-столбец; (b, u) – скалярное произведение векторов b и u из D^m; u^T – вектор-строка; e_i – вектор из D^m, i-я компонента которого равна единице, $i=1,\ldots,m$, а остальные компоненты равны нулю; $\Gamma(S)$ – граница выпуклого замкнутого множества S из D^m; ri S-относительная внутренность множества S;

$$K(a_1,\ldots,a_l)=\left\{ a \in D^m \,|\, a=\sum_{i=1}^{m} a_i\lambda_i,\ \lambda_i \geqslant 0,\ i=1,\ldots,l \right\}.$$

– выпуклый конус, порожденный векторами $a_1, \ldots, a_l$; $u \in D^m$; $F(u)$ – вогнутая непрерывно дифференцируемая функция; $f_j(u)$ – выпуклая непрерывно дифференцируемая функция, $g_j(u) = \operatorname{grad} f_j(u)$, $\alpha_j \in D$, $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Рассмотрим множество $S = \{u \in D^m | f_j(u) \leqslant \alpha_j,\ j=1, \ldots, n\}$. Известно (см., например, [1]), что если $S \neq \varnothing$, то S – выпуклое и замкнутое множество.

Рассмотрим задачу выпуклого целочисленного программирования (ЗВЦП): найти $\sup F(u)$, если $u \in S \cap Z^m$ и $S \cap Z^m \neq \varnothing$, или доказать, что

$$S \cap Z^m = \varnothing. \tag{1}$$

С (1) связана задача выпуклого программирования (ЗВП): найти

$$\sup F(u) \quad \text{при } u \in S. \tag{2}$$

Для решения (1) в случае линейных $F(u)$ и $f_j(u)$, $j=1, \ldots, n$, разработаны способы, базирующиеся на построении правильных отсечений. Конечный алгоритм описан в [2] для линейных $f_j(u)$, $j=1, \ldots, n$, и вогнутой функции $F(u)$. Далее будет рассмотрена ситуация, когда целевая функция линейна, т. е. $F(u) = (d, u)$.

Задача такого типа, а именно: найти $\max(c, u)$ при $(a_j, u) = b_j$, $j=1, \ldots, n$, $(l_i, u) \geqslant 0$, $i=1, \ldots, m$, $c \in Z^m$ и $u \in S \cap Z^m$, где S – ограниченное подмножество из D^m, была исследована в [3].

Нетрудно, следуя [3], распространить идею третьего (полностью целочисленного) алгоритма Гомори на случай, когда среди ограничений, описывающих множество S, содержатся такие линейные неравенства $(c_j, u) \leqslant \gamma_j$, $j=1, \ldots, m$, что векторы $c_1, \ldots, c_m$ линейно независимы и $d \in K$, $c_1, \ldots, c_m$.

Здесь предлагается способ получения таких неравенств. Заметим, что в отличие от [3] доказательство конечности, основанное на этом способе алгоритма (теорема 3), не требует ограниченности множества S. Кроме того, этот метод позволяет использовать информацию о решении u^0 ЗВП (2) и начинать с двойственно допустимой точки $v \in Z^m$, в некотором смысле близкой к u^0 (ср. с [4]).

Определение. Неравенство $(c, u) \leqslant \gamma$ назовем правильным отсечением точки v от множества $S \cap Z^m$, если $(c, v) > \gamma$ и $(c, u) \leqslant \gamma$ для всех $u \in S \cap Z^m$.

Легко привести пример того, что правильное отсечение не существует, хотя $v \in \Gamma(S)$, поэтому нельзя воспользоваться теоремой о разделяющей гиперплоскости (ср. с [3]).

2. Для $v \in \Gamma(S)$ найдем выпуклый конус $K_v = K(\{g_j(v) | f_j(v) = \alpha_j\})$. Пусть $v \notin Z^m$, а $a \in Z^m$, $(a, v) \notin Z$ и $b \in K_v \setminus \{0\}$. Рассмотрим множества $S_{-1} = \{u \in S | (a, u) \leqslant [(a, v)]\}$ и $S_1 = \{u \in S | (a, u) \geqslant [(a, v)] + 1\}$ и числа $\beta_i = \sup\limits_{u \in S_i} (b, u)$, $i = 1, -1$.

Теорема 1. *Правильным отсечением точки v от множества $S \cap Z^m$ являются:*

а) *если $S_i = \varnothing$, $i=1, -1$, то $i(a, u) \leqslant i[(a, v)] + \min\{0; i\}$;*

б) *если $\beta_i < (b, v)$; $i=1, -1$, то $(b, u) \leqslant \max\{\beta_1, \beta_{-1}\}$;*

в) *если $\beta_i = (b, v)$, $\beta_{-i} < (b, v)$, $i=1, -1$, то $(\beta_{-1} - \beta_1) \times (a, u) + (b, u) \leqslant (\beta_{-1} - \beta_1)([(a, v)] + \max\{0; i\}) + (b, v)$, $i=1, -1$.*

Утверждения а), б) очевидны, для доказательства в) потребуется следующая лемма.

Лемма 1. *Если* а) *S – выпуклое замкнутое множество,* б) *$x \in D^m$, $y \in D^m$, $\delta \in D$ и при $u \in \{u \in S | (x, u) = \delta\}$* $\sup(b, u) = \mu < \infty$, в) *для некоторого $\tilde{v} \in S$ $(x, \tilde{v}) > \delta$, то для всех $u \in \{u \in S | (x, u) \leqslant \delta\}$ и всех $\eta > \max\{0; (y, \tilde{v}) - \mu\}$ справедливо неравенство*

$$((x, \tilde{v}) - \delta)(y, u) + (\mu + \eta - (y, \tilde{v}))(x, u) \leqslant ((x, \tilde{v}) - \delta) \times ((y, \tilde{v}) - \eta) + (\mu + \eta - (y, \tilde{v}))(x, \tilde{v}). \tag{3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $u \in S$ и $(x, u) = \delta$, то легко показать, что (3) верно. Пусть теперь $u \in S$ и $(x, u) < \delta$. Предположим, что нашлась такая точка $w \in S$, что $(x, w) < \delta$, а (3) не верно. Положим $\lambda = ((x, \tilde{v}) - \delta) : (x, \tilde{v} - w)$ и $t = \lambda w + (1 - \lambda)\tilde{v}$. Нетрудно проверить, что $0 < \lambda < 1$, $t \in S$, $(x, t) = \delta$ и t не удовлетворяет (3). Но по доказанному ранее t должно удовлетворять (3). Лемма доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о у т в е р ж д е н и я в) т е о р е м ы 1. Пусть, например, $i = -1$. Нетрудно проверить, что все $u \in S_{-1}$ удовлетворяют требуемому неравенству, а точка v – нет. Если в лемме 1 положить $x = -a$, $y = b$, $\delta = -[(a, v)] - 1$, тогда $\mu = \beta_1$. Поскольку $\beta_{-1} = (b, v)$, то найдется такая точка $v_0 \in S$, что $(b, v) = (b, v_0)$ и $(a, v_0) = [(a, v)]$. Пусть $\tilde{v} = v_0$, тогда из леммы 1 следует выполнение неравенства для всех $u \in S_1$. Так как $S \cap Z^m \subset S_1 \cup S_{-1}$, утверждение доказано.

Таким образом, если с помощью лишь теоремы 1 можно строить на каждом шаге правильное отсечение, то нетрудно распространить первый алгоритм Гомори на случай выпуклых множеств. Однако этот процесс может быть бесконечным. Кроме того, легко построить пример, в котором возможность правильного отсечения крайней точки v проблематична. При выступающей точке (определение см. ниже) отсечение всегда можно построить, что и будет доказано ниже.

3. Определение. Назовем v выступающей точкой выпуклого замкнутого множества S, если найдется такой вектор b из D^m, что $(b, u)<(b, v)$ для всех $u\in S\setminus\{v\}$. Вектор b в этом случае назовем строго максимизирующим на v. Легко доказывается следующая лемма.

Лемма 2. *Если v – выступающая точка S и $c\in \operatorname{ri} K_v$, то c – строго максимизирующий на v вектор.*

Следствие 1. Если v – выступающая точка S, $v\notin Z^m$, $b\in \operatorname{ri} K_v$, то для всякого $a\in Z^m$, $(a, v)\notin Z$ $(b, u)\leqslant\max\{\beta_1, \beta_{-1}\}$ – правильное отсечение точки v от $S\cap Z^m$.

Далее получим такие неравенства $(c_i, u)\leqslant\gamma_i$, $i=1,\ldots, m$, что $c_1,\ldots, c_m$ – базис в D^m, $d\in \operatorname{ri} K$, $c_1,\ldots, c_m$, и $(c_i, u)\leqslant\gamma_i$ – правильное отсечение, $i=1,\ldots, m-1$.

Теорема 2. *Если v – выступающая точка замкнутого выпуклого множества S, $v\notin Z^m$, $d\in K_v\cap Z^m$, $d\neq 0$ и множество $\{u\in S\mid (d, u-v)=0\}$ ограничено, то можно построить такой базис $c_1,\ldots, c_m$ в D^m и такие числа $\gamma_1,\ldots, \gamma_m$, что выполняются утверждения: 1) $(c_i, v)>\gamma_i$, $i=1,\ldots, m-1$; 2) $(c_i, u)\leqslant\gamma_i$ для всех $u\in S\cap Z^m$, $i=1,\ldots, m$; 3) $d\in \operatorname{ri} K\,(c_1,\ldots, c_m)$.*

Доказательство. Если ранг K_v равен 1, то d – строго максимизирующий на v вектор. Пусть d не является строго максимизирующим на v вектором, тогда ранг K_v не меньше 2 и можно выбрать $b\in \operatorname{ri} K_v$ так, чтобы b и d были линейно независимыми. Строим сначала вектор c_m и число γ_m. Рассмотрим множества $S(i)=\{u\in S\mid (d, u)=[(d, v)]-i\}$, $i=0, 1$. Положим $\eta_i=\sup\limits_{u\in S_i}(d-b, u)$, $i=0, 1$, выберем $\eta>\max\{0; \eta_0-\eta_1\}$ и положим $c_m=d-b+(\eta_0-\eta_1+\eta)d$ и $\gamma_m=\eta_0+(\eta_0-\eta_1+\eta)[(d, v)]$. Из ограниченности множества $\{u\in S\mid (d, u-v)=0\}$ следует ограниченность $S(i)$ ([5, стр. 81]) и конечность чисел η_i, $i=0, 1$. Нетрудно проверить, что для всех $u\in S(0)$ $(c_m, u)\leqslant\gamma_m$. Пусть $(d, u)\leqslant[(d, v)]-1$ и $u\in S$, тогда из леммы 1 вытекает, что $(c_m, u)\leqslant\gamma_m$, поэтому $(c_m, u)\leqslant\gamma_m$ для всех $u\in S\cap Z^m$. Найдем наименьшее k так, чтобы $(e_k, v)\notin Z$. Если $m=2$, то $c_1=b$, $a=e_k$ и $\gamma_1=\max\{\beta_1, \beta_{-1}\}$. Если $m\geqslant 3$ или $d\notin \operatorname{ri} K_v$, то $\tilde a_i=e_i$ при $(e_i, v)\notin Z$ и $\tilde a_i=e_i+e_k$, если $(e_i, v)\in Z$, $i=1,\ldots,m$. Если $d\in \operatorname{ri} K_v$, то $b=d$ и найдем наименьшее l так, чтобы система векторов $\{b, a_i, i\neq l\}$ являлась базисом; положим $a_i=\tilde a_i$, $i\leqslant l-1$, $a_i=\tilde a_{i+1}$, $l\leqslant i\leqslant m-1$, $a_m=-\sum\limits_{i=1}^{m-1} a_i$, если $\sum\limits_{i=1}^{m-1}(a_i, v)\notin Z$ и $a_m=-\sum\limits_{i=1}^{m-1} a_i-a_1$ – в противном случае. Если $d\notin \operatorname{ri} K_v$, то ищем наименьшие l и p так, чтобы система векторов $\{c_m, b, \tilde a_i, i\neq l, i\neq p\}$ была базисом. Полагаем $a_i=\tilde a_i$, $i\leqslant l-1$, $a_i=a_{i+1}$, $l\leqslant i\leqslant p-2$, $a_i=\tilde a_{i+2}$, $p-1\leqslant i\leqslant m-2$, $a_{m-1}=-\sum\limits_{i=1}^{m-2} a_i$, если $\sum\limits_{i=1}^{m-2}(a_i, v)\notin Z$ и $a_{m-1}=-\sum\limits_{i=1}^{m-2} a_i-a_1$ – в противном случае. Для $a=\tilde a_i$ вычислим $\beta^i=\max\{\beta_1{}^i, \beta_{-1}{}^i\}$; положим $c_i=((b, v)-\beta^i)a_i+b$, $\gamma_i=(b, v)+((b, v)-\beta^i)[(a_i, v)]$, где $i=1,\ldots, m$, если $d\in ri\, K_v$, и $i=1,\ldots, m-1$, если $d\notin \operatorname{ri} K_v$.

Линейная независимость векторов $c_1,\ldots, c_m$ следует из линейной независимости системы $\{c_m, b, a_1,\ldots, a_{m-2}\}$ (системы $\{d, a_1,\ldots, a_{m-1}\}$ для $d\in \operatorname{ri} K_v$) и условия $\beta^i<(b, v)$ для всех i. Утверждение 1) легко проверяется; утверждение 2) получается, если сначала в лемме 1 положить для каждого i $x=a_i$, $y=b$, $\delta=[(a_i, v)]$, а затем $x=-a_i$, $y=b$, $\delta=-[(a_i, v)]-1$. Доказательство утверждения 3) в случае, например, когда $a_m=-\sum\limits_{i=1}^{m-1} a_i$, достигается суммированием по i от 1 до m предварительно умноженных на число $((b, v)-\beta^m)/((b, v)-\beta^i)$ равенств $b=c_i-((b, v)-\beta^i)a_i$. Так как все $(b, v)-\beta^i>0$, то $d\in \operatorname{ri} K\,(c_1,\ldots, c_m)$.

Замечание. Если $d\in \operatorname{ri} K_v$, то и вектор c_m и число γ_m удовлетворяют условию $(c_m, v)<\gamma_m$.

Следствие 2. Если выполнены условия теоремы 2, то можно построить базис $a_1,\ldots, a_m$ в Z^m и целые числа $\alpha_1,\ldots, \alpha_m$, удовлетворяющие утверждениям теоремы 2.

Пусть векторы $c_1,\ldots, c_m$ и числа $\gamma_1,\ldots, \gamma_m$ получены по теореме 2. Опишем построение вектора a_p, $p\leqslant m$, при условии, что предыдущие векторы $a_1,\ldots, a_{p-1}$ уже найдены так, что $(a_i, u)\leqslant\alpha_i$, $i=1,\ldots, p-1$, – правильное отсечение точки v от $S\cap Z^m$, система $\{a_1, \ldots, a_{p-1}, c_p, \ldots, c_m\}$ – базис в D^m и $\mu_i^{p-1} > 0$, $i=1, \ldots, m$ – коэффициенты разложения вектора d по нему. Пусть A_{p-1} – матрица перехода от исходного базиса к построенному, $\Delta_{p-1} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (y_i, y_i)}$, где y_i–i-я строка матрицы A_{p-1}^{-1}. Положим $\nu_i = \mu_i^{p-1}/2\mu_p{}^p$, $i=1, \ldots, m$, и $\nu = \min_i \nu_i$, если $(c_m, v) - \gamma_m \geqslant 0$ или $p=m$ и

$$\nu = \min\left\{\sum_{i=1}^{p} \nu_i \frac{(a_i, v) - \alpha_i}{|(c_m, v) - \gamma_m|} + \sum_{i=p}^{m} \nu_i \frac{(c_i, v) - \gamma_i}{|(c_m, v) - \gamma_m|},\ \nu_1; \ldots; \nu_m\right\}$$

$\nu_m = \nu$, если $(c_m, v) < \gamma_m$, $p < m$; положим $\varepsilon_p' = (m\Delta_{p-1} + \nu)/\nu$, $\varepsilon_i' = \nu_i \varepsilon_p'$, $i \neq p$. Пусть $Q_p = \{\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)^T \in D^m | \varepsilon_p > 0,\ 0 < \varepsilon_i < 2\nu_i \varepsilon_p\}$. Легко видеть, что $\varepsilon' \in Q_p$ вместе со своей шаровой окрестностью радиуса $\sqrt{m}\,\Delta_{p-1}$, отсюда следует, что

$a_p = \sum_{i=1}^{m} [(A_{p-1}\varepsilon', e_i)]$, $e_i \in A_{p-1} Q_p$, и, следовательно, $a_1, \ldots, a_p, c_{p+1}, \ldots, c_m$ – базис, $\mu_i{}^p > 0$, $i=1, \ldots, m$ – коэффициенты разложения вектора d по нему. Оставшиеся утверждения теоремы легко проверяются.

4. Пусть S и d таковы, что $\sup_{u \in S} (d, u) = (d, u^0)$, u^0 – выступающая точка.

Алгоритм A_1. Если $u^0 \in Z^m$, то u^0 – решение (1), в противном случае по следствию 2 получаем векторы $a_1, \ldots, a_m$ и числа $\alpha, \ldots, \alpha_m$. Полагаем $L_j = L_0 = \{u \in D^m | (a_i, u) \leqslant d_i,\ i=1, m\}$, если S неограничено; если S ограничено, то в L_0 добавляются еще условия $(d, u) \geqslant \inf_{u \in S} (d, u)$. По первому алгоритму Гомори находим $v^j = v^0 \triangleq \arg(\text{lex}, \max(d, u), u \in L \cap Z^m)$ и такой базис $b_1{}^j, \ldots, b_m{}^j$ из Z^m, чтобы выполнялись условия: $d \in K(b_1{}^j, \ldots, b_m{}^j)$, $(b_i{}^j, u) \leqslant (b_i{}^j, v^j)$ для всех $u \in L_j \cap Z^m$. Если $v^j \in S$, то v^j – решение (1), если нет, полагаем $L_{j+1} = \left\{u \in L_j \,\middle|\, \sum_{i=1}^{m} (b_i{}^j, u) \leqslant \sum_{i=1}^{m} (b_i{}^j, v) - 1,\right.$ $(b_i{}^j, u) \leqslant (b_i{}^j, v)$, $i=1, \ldots, m\}$ и снова переходим к решению задачи ЦЛП.

Алгоритм A_2. Так же как в A_1, получаем линейную целочисленную задачу и решаем ее. Если точка $v^j \notin S$, то полагаем $S_k = \{u \in S_{k-1} | (b_i{}^j, u) \leqslant (b_i{}^j, v),\ i=1, \ldots, m;$ $\left(\sum_{i=1}^{m} b_i{}^j, u\right) \leqslant \sum_{i=1}^{m} (b_i{}^j, v) - 1\}$ и решаем ЗВП, заменив S на S_k. Если $S_k \neq \varnothing$, то получаем оптимальную выступающую точку u^k. Если $u^k \in Z^m$, то u^k — решение (1), если нет, то строим правильное отсечение $(t^k, u) \leqslant \varepsilon^k$ точки u^k от $S_k \cap Z^m$ и полагаем $L_{j+1} = \{u \in L_j | (t^k, u) \leqslant \varepsilon^k, \sum_{i=1}^{m} (b_i{}^j, u - v^j) \leqslant -1,\ (b_i{}^j, u - v^j) \leqslant 0\ (i=1, \ldots, m)\}$ и переходим к решению задачи ЦЛП.

Теорема 3. *Если* а) S – *выпуклое замкнутое множество* S *или ограничено, или* $S \cap Z^m \neq \varnothing$, б) $F(u) = (d, u)$, $d \in Z^m$, в) u^0 – *выступающая точка* S, $\sup_{u \in S} (d, u) = (d, u^0)$ *и множество* $\{u \in S | (d, u - u^0) = 0\}$ *ограничено, то алгоритм* A_1 *конечен.*

Конечность алгоритма следует из конечности алгоритма решения задачи ЦЛП и ограниченности множества $\{u \in S | (d, u - u^0) = 0\}$.

Следствие 3. Если выполнены условия теоремы 3 и все крайние точки множества S выступающие, то алгоритм A_2 конечен.

Замечание. Для решения задач ЦЛП можно использовать любой метод, гарантирующий конечность и дающий неравенства – отсечения, определяющие целочисленную точку.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зойтендейк Г.* Методы возможных направлений. М.: Изд-во иностр. лит., 1963.
2. *Червак Ю. Ю.* Метод лексикографического поиска решений для дискретных задач выпуклого программирования.– Укр. матем. ж., 1975, т. 26, вып. 2.

3. *Корбут А. А., Финкельштейн Ю. Ю.* Дискретное программирование. М.: Наука, 1969.
4. *Шевченко В. Н.* Об одной модификации третьего алгоритма Гомори. В сб. Тезисы докладов на 3-й Всесоюзной конференции по теоретической кибернетике. Новосибирск: 1974.
5. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.

Поступила в редакцию
19 X 1976

МОДЕЛЬ РАВНОВЕСИЯ С УЧЕТОМ НАЛОГОВ НА ОБМЕН

ЕФИМОВ Б. А., ШАПОВАЛОВ А. С.

(Москва)

В ряде работ, например в [1–3], налог в моделях экономического равновесия интерпретируется как отчисление доли дохода участника экономической системы в пользу планирующего органа или государства. Как правило, участники могут свободно обмениваться товарами, не затрачивая ничего на обмен [4]. Интересно выяснить, как влияют дополнительные затраты (налог за обмен) на поведение участников обмена. Часто в качестве дополнительного участника вводилось «государство» или некоторый центральный орган с собственным предпочтением, а налоги использовались для производства общественных благ. Попытаемся рассмотреть вопрос о затратах с другой стороны. При установлении обычного равновесия, в случае когда модель удовлетворяет всем стандартным требованиям, каждый участник получает в обмен на свои начальные запасы набор равновесных благ. Предполагается, что он должен обладать полной информацией обо всем происходящем на рынке и возможностями осуществлять любые сделки с другими партнерами без ограничений. Если число участников велико, то удовлетворение потребностей любого отдельного ее участника без учета ограничений возможно в силу того, что его спрос не сравним с суммарными ресурсами экономики. В любом случае участники ничего дополнительно не затрачивают при получении равновесных наборов. Это не совсем реалистичное предположение.

Рассмотрим модель, в которой налоги зависят от объема сделок и от выбора всеми участниками своих равновесных наборов. Экономический смысл налогов может быть совершенно различным в зависимости от интерпретации модели. Затраты участников, необходимые для осуществления сделки, можно интерпретировать как плату за информацию о наличии и дефиците благ, о возможности заключения сделки; как транспортные расходы, связанные с доставкой товаров от одного потребителя к другому, как натуральные налоги – доли отчислений от общего количества продукта, взимаемые за право заключения сделки и т. д. Естественным выглядит предположение, что если участник i выберет в качестве равновесного набора свой начальный запас ω_i, то ему ничего не надо будет платить. Если же выбран вектор x_i, меньший, чем ω_i, то затраты, возможно, неизбежны (например, на то, чтобы избавиться от части своих запасов). Предположение, что при выборе ω_i участнику ничего не надо платить, обеспечит непустоту бюджетных множеств нашей модели. Будем считать, что если участник i выбрал больший набор товаров, то и заплатить ему надо больше.

Допустим, кроме того, что как полезность участника i, так и величина налога на обмен его набора товаров зависят от выбора других участников. От этого выбора будет зависеть и бюджетное множество участника i, представляющее множество наборов, стоимость которых плюс величина налога на их обмен не превосходит стоимости начального набора. Под равновесием будем понимать равновесную цену и такой набор векторов из бюджетных множеств участников (при равновесных ценах), которые максимизируют их функции полезности на этих множествах.

Цель данной работы состоит в построении равновесной модели обмена с учетом налогов, независимых от цены.

Введем обозначения: $N=\{1,\ldots,n\}$ – множество участников; X_i – непустой выпуклый компакт в R_+^l (потребительское множество участника i), $i\in N$, где R^l – пространство товаров (l – их число); $X=\prod_{i=1}^{n} X_i$ – произведение X_i, являющееся рыночным товарным пространством; $u_i: X\to R_+$ – непрерывная на X, вогнутая, монотонная на X_i функция полезности участника i; $\omega_i\in\operatorname{int} X_i$ – начальный запас участника i,