

3. Корбут А. А., Финкельштейн Ю. Ю. Дискретное программирование. М.: Наука, 1969.
4. Шевченко В. Н. Об одной модификации третьего алгоритма Гомори. В сб. Тезисы докладов на 3-й Всесоюзной конференции по теоретической кибернетике. Новосибирск: 1974.
5. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.

Поступила в редакцию
19 X 1976

МОДЕЛЬ РАВНОВЕСИЯ С УЧЕТОМ НАЛОГОВ НА ОБМЕН

ЕФИМОВ Б. А., ШАПОВАЛОВ А. С.

(Москва)

В ряде работ, например в [1–3], налог в моделях экономического равновесия интерпретируется как отчисление доли дохода участника экономической системы в пользу планирующего органа или государства. Как правило, участники могут свободно обмениваться товарами, не затрачивая ничего на обмен [4]. Интересно выяснить, как влияют дополнительные затраты (налог за обмен) на поведение участников обмена. Часто в качестве дополнительного участника вводилось «государство» или некоторый центральный орган с собственным предпочтением, а налоги использовались для производства общественных благ. Попытаемся рассмотреть вопрос о затратах с другой стороны. При установлении обычного равновесия, в случае когда модель удовлетворяет всем стандартным требованиям, каждый участник получает в обмен на свои начальные запасы набор равновесных благ. Предполагается, что он должен обладать полной информацией обо всем происходящем на рынке и возможностями осуществлять любые сделки с другими партнерами без ограничений. Если число участников велико, то удовлетворение потребностей любого отдельного ее участника без учета ограничений возможно в силу того, что его спрос не сравним с суммарными ресурсами экономики. В любом случае участники ничего дополнительно не затрачивают при получении равновесных наборов. Это не совсем реалистичное предположение.

Рассмотрим модель, в которой налоги зависят от объема сделок и от выбора всеми участниками своих равновесных наборов. Экономический смысл налогов может быть совершенно различным в зависимости от интерпретации модели. Затраты участников, необходимые для осуществления сделки, можно интерпретировать как плату за информацию о наличии и дефиците благ, о возможности заключения сделки; как транспортные расходы, связанные с доставкой товаров от одного потребителя к другому, как натуральные налоги — доли отчислений от общего количества продукта, взимаемые за право заключения сделки и т. д. Естественным выглядит предположение, что если участник i выберет в качестве равновесного набора свой начальный запас ω_i , то ему ничего не надо будет платить. Если же выбран вектор x_i , меньший, чем ω_i , то затраты, возможно, неизбежны (например, на то, чтобы избавиться от части своих запасов). Предположение, что при выборе ω_i участнику ничего не надо платить, обеспечит непустоту бюджетных множеств нашей модели. Будем считать, что если участник i выбрал больший набор товаров, то и заплатить ему надо больше.

Допустим, кроме того, что как полезность участника i , так и величина налога на обмен его набора товаров зависят от выбора других участников. От этого выбора будет зависеть и бюджетное множество участника i , представляющее множество наборов, стоимость которых плюс величина налога на их обмен не превосходит стоимости начального набора. Под равновесием будем понимать равновесную цену и такой набор векторов из бюджетных множеств участников (при равновесных ценах), которые максимизируют их функции полезности на этих множествах.

Цель данной работы состоит в построении равновесной модели обмена с учетом налогов, независимых от цены.

Введем обозначения: $N = \{1, \dots, n\}$ — множество участников; X_i — непустой выпуклый компакт в R_+^l (потребительское множество участника i), $i \in N$, где R^l — про-

странство товаров (l — их число); $X = \prod_{i=1}^n X_i$ — произведение X_i , являющееся ры-

ночным товарным пространством; $u_i: X \rightarrow R_+$ — непрерывная на X , вогнутая, монотонная на X_i функция полезности участника i ; $\omega_i \in \text{int } X_i$ — начальный запас участника i ,

$\Delta = \{p \in R^l : p_i \geq 0, \sum_{i=1}^n p_i = 1\}$ — симплекс цен; $s_i: X \rightarrow R_+^1$ непрерывная на X , вы-

пуклая функция. Значение функции $s_i(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$ есть величина налога на обмен набора x_i при выборе остальными участниками наборов $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$. Предполагаем, что $s_i(x_1, \dots, \omega_i, \dots, x_n) = 0$ для любых $x_j \in X_j, j \neq i$.

Определение 1. Рынком $\mathcal{E}$ с налогом на обмен будем называть

$$\mathcal{E} = \{N, \{X_i\}_{i \in N}, \{u_i\}_{i \in N}, \{\omega_i\}_{i \in N}, \{s_i\}_{i \in N}\}.$$

Определение 2. Бюджетным множеством в модели служит

$$B_i(x, p) = \{x_i \in X_i : px_i + s_i(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \leq p\omega_i\}.$$

Предполагается, что $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ фиксированы, а x_i пробегает потребительское множество X_i .

Определение 3. Набор $(\bar{x}, \bar{p})$, где $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$, $\bar{x}_i \in X_i$, $\bar{p} \in \Delta$, называется равновесием для рынка $\mathcal{E}$, если: 1) $\bar{x}_i \in B_i(\bar{x}, \bar{p})$, 2) $u_i(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = \max \{u_i(\bar{x}_1, \dots, x_i, \dots,$

$$\dots, \bar{x}_n) : x_i \in B_i(\bar{x}, \bar{p})\}, 3) \sum_{i=1}^n \bar{x}_i \leq \sum_{i=1}^n \omega_i.$$

Заметим, что при $s_i(x) = 0$ для любых $x \in X, i \in N$, модель становится обычной моделью равновесия.

Теорема 1. Рынок $\mathcal{E}$ имеет равновесие.

Для доказательства сопоставим рынку $\mathcal{E}$ обобщенную игру Г. Напомним (см. [5]), что обобщенной игрой N лиц называется $\Gamma = \{T, Y_i, A_i, P_i\}$, где $T = \{1, \dots, t\}$ —

множество участников; $Y_i \subset R_+^l$ — множество стратегий участника i ; $Y = \prod_{i=1}^t Y_i$ — множество ситуаций игры; $A_i: Y \rightarrow 2^{Y_i}$ — отображение ограничения; $P_i: Y \rightarrow 2^{Y_i}$ — отображение предпочтения.

Определение 4. Вектор $\bar{y} \in Y$ называется равновесием для игры Г, если: $\bar{y}_i \in A_i(\bar{y})$, $P_i(\bar{y}) \cap A_i(\bar{y}) = \emptyset$ для всех $i \in T$.

Для обобщенных игр имеет место следующая теорема.

Теорема 2. (см. [5]). Пусть: 1) $Y_i \subset R^l$ — непустой выпуклый компакт; 2) отображение A_i полунепрерывно сверху, причем $A_i(y)$ непустой выпуклый компакт для всех $y \in Y$; 3) отображение P_i имеет открытый график в $Y \times Y_i$; 4) для каждого $y \in Y$ его i -я координата y_i не принадлежит $\text{Co } P_i(y)$, где $\text{Co } P_i(y)$ — выпуклая оболочка множества $P_i(y)$. Тогда игра Г имеет равновесие.

Сопоставим нашему рынку $\mathcal{E}$ обобщенную игру $\Gamma(\mathcal{E})$ следующим образом. Положим

$$T = \{1, \dots, n, n+1\}, \quad Y_i = X_i, \quad i=1, \dots, n, \quad Y_{n+1} = \Delta, \\ P_i(x_1, \dots, x_n, p) = \{z_i \in X_i : u_i(x_1, \dots, z_i, \dots, x_n) > u_i(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)\},$$

$$P_{n+1}(x_1, \dots, x_n, p) = \left\{ p' \in \Delta : p' \left(\sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n \omega_i \right) > \right. \\ \left. > p \left(\sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n \omega_i \right) \right\}, \quad i=1, \dots, n.$$

Заметим, что $P_i, i=1, \dots, n$ от p фактически не зависит, в то время как P_{n+1} зависит от p

$$A_i(x_1, \dots, x_n, p) = B_i(x, p), \quad i=1, \dots, n,$$

$$A_{n+1}(x_1, \dots, x_n, p) = \Delta \quad \text{при всех } x \in X.$$

Лемма. Если $(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_{n+1})$ — равновесие для игры $\Gamma(\mathcal{E})$, то соответствующий ему набор $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \bar{p})$, $\bar{x}_i = \bar{y}_i, i=1, \dots, n, \bar{p} = \bar{y}_{n+1}$, — равновесие для рынка $\mathcal{E}$.

Доказательство. Пусть $(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_{n+1})$ — равновесие в $\Gamma(\mathcal{E})$. Тогда условие 1) определения 3

$$\bar{x}_i \in B_i(\bar{x}, \bar{p}), \quad \bar{p} \in \Delta,$$

выполняется по определению $A_i(y)$.

Условие 2) определения 3 выполняется в силу того, что если существует $z_i \in \bar{B}_i(\bar{x}, \bar{p})$ такое, что $u_i(\bar{x}_1, \dots, z_i, \dots, x_n) > u_i(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$, то $z_i \in P_i(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_{n+1})$ и $P_i(\bar{y}) \cap A_i(\bar{y}) \neq \emptyset$, т. е. получается противоречие с определением 4.

Проверим условие 3) определения 3. Пусть $\sum_{i=1}^n \bar{x}_i \leq \sum_{i=1}^n \omega_i$ неверно. Тогда су-

ществует j такое, что $\sum_{i=1}^n x_i^j - \sum_{i=1}^n \omega_i^j > 0$. Возьмем $p' \in \Delta$ вида $p' = (0, \dots, 1, \dots, 0)$

(единица стоит на j -м месте). Тогда $p' \left(\sum_{i=1}^n \bar{x}_i - \sum_{i=1}^n \omega_i \right) > 0$, в то время как

$$\bar{p} \left(\sum_{i=1}^n \bar{x}_i - \sum_{i=1}^n \omega_i \right) = - \sum_{i=1}^n s_i(\bar{x}) \leq 0. \quad \text{Таким образом, имеем } P_{n+1}(\bar{x}, \bar{p}) \cap \Delta \neq \emptyset,$$

чего быть не может.

Докажем теперь следующую теорему.

Теорема 3. *Игра $\Gamma(\mathcal{E})$ имеет равновесие.*

Доказательство. Проверим выполнение для игры $\Gamma(\mathcal{E})$ условий 1)–4) теоремы 2. То, что Y_i — непустой выпуклый компакт, выполняется из определения X_i и Δ . Имеем $A_{n+1}(y) = \Delta$ для всех $y \in Y$. Ясно, что это отображение удовлетворяет всем требованиям условия 2. Пусть $1 \leq i \leq n$. Имеем

$$A_i(x, p) = \bar{B}_i(x, p) = \{x_i \in X_i : p x_i + s_i(x) \leq p \omega_i\}.$$

Установим замкнутость этого отображения. Тогда по теореме [4, стр. 95] оно будет в силу компактности X полунепрерывно сверху. Обозначим $\varphi_i(x, z_i) = p(z_i - \omega_i) + s_i(x_1, \dots, z_i, \dots, x_n)$, тогда A_i — множество таких точек $z_i \in X_i$, что $\varphi_i(x, z_i) \leq 0$. Так как φ_i — непрерывная функция, то из условий $x_v \rightarrow x$, $x_v \in X$, $y_v \in A_i(x_v) \subset X_i$, $y_v \rightarrow y$, $x \in X$, $y \in X_i$ следует, что $y \in A_i(x)$ (из $x_v \rightarrow x$, $y_v \rightarrow y$, $\varphi(x_v, y_v) \leq 0$ следует $\varphi(x, y) \leq 0$). Полунепрерывность сверху доказана. Непустота $A_i(x)$ при всех x выводится из того, что $\omega_i \in \bar{B}_i(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n, p)$ при всех $x \in X$. Компактность $A_i(x)$ предусматривается компактностью X_i и замкнутостью A_i в силу непрерывности φ_i . Выпуклость A_i следует из выпуклости φ_i , которая есть сумма двух выпуклых функций.

Проверим свойство 3. Пусть график G_{p_i} не является открытым множеством. Тогда существует точка $(y, z_i) \in G_{p_i}$ такая, что в любой ее окрестности U содержатся точки $(y_v, z_{i_v}) \notin G_{p_i}$. Выберем последовательность таких точек, сходящуюся к (y, z_i) . Тогда

$$(y_v, z_{i_v}) \notin G_{p_i} \Rightarrow u_i(y_{1_v}, \dots, z_{i_v}, \dots, y_{n_v}) \leq u_i(y_{1_v}, \dots, y_{i_v}, \dots, y_{n_v}).$$

Но в силу непрерывности u_i на X мы имели бы

$$u_i(y_1, \dots, z_i, \dots, y_n) \leq u_i(y_1, \dots, y_i, \dots, y_n),$$

т. е. $(y, z_i) \in G_{p_i}$, чего быть не может. Следовательно, все точки G_{p_i} внутренние.

Проверим свойство 4. Множество $P_i(y)$ выпукло при любом $y \in Y$ в силу вогнутости $U_i(y)$ и $u_i \in P_i(y)$ по определению. Итак, игра $\Gamma(\mathcal{E})$ имеет равновесие. Теорема доказана.

Доказательство основной теоремы 1 следует из комбинации леммы и теоремы 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. Fourgeaud C. Contribution à l'étude du rôle des administrations dans la théorie mathématique de l'équilibre et l'optimum. — *Econometrica*, 1969, v. 37, № 2.
2. Булонь П., Ефимов В. А. Существование равновесия в модели Фуржо с континуумом потребителей. — В кн. Моделирование экономических процессов. М.: Изд-во МГУ, 1977.
3. Полтерович В. М. Модели экономического равновесия как инструмент оптимального планирования. В кн. Моделирование внутренних и внешних связей отраслевых систем. Новосибирск: Наука, 1978.
4. Никайдо Х. Выпуклые структуры и математическая экономика. М.: Мнр, 1972.
5. Shafer W., Sonnenschein H. Equilibrium in Abstract Economics without Ordered Preferences. — *J. Math. Econ.*, 1975, v. 2.

Поступила в редакцию
2 II 1978