

ЭКОНОМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ЭКСПЛУАТИРУЕМЫМИ ПОПУЛЯЦИЯМИ

Суровцов Л. К., Шалабин Г. В.

(Ленинград)

Биологические ресурсы приобретают все большее значение в удовлетворении разнообразных производственных и непроизводственных потребностей общества, в повышении продовольственного и сырьевого потенциала страны. Научно обоснованный подход к охране, воспроизводству и рациональному использованию биологических ресурсов предполагает разработку и широкое использование в планировании и управлении народным хозяйством моделей для разных уровней организации жизни — организма, популяции, экологической системы в целом. Такие модели прежде всего необходимы для прогноза и всесторонней оценки состояния биологических систем и определения долгосрочной экологической стратегии управления как научной основы текущей хозяйственной политики охраны и рационального использования биологических ресурсов. В данной статье рассмотрены вопросы, связанные с построением и практической реализацией моделей управления биосистемами на уровне популяции и сообществ популяций (биоценозов). В отличие от предшествующих исследований (см., например, [1—3]) упор сделан на разработку эффективных алгоритмов решения соответствующих задач, обоснование основных направлений их практического использования, на доказательство существования и исследование свойств предельных равновесных (стационарных) состояний рассматриваемых биосистем.

Изложенные в статье задачи и алгоритмы их решения, начиная с 1970 г., прошли широкую экспериментальную проверку в Лаборатории экономикоматематических расчетов ЛГУ им. А. А. Жданова. Некоторые результаты практических расчетов анализируются в заключительной части статьи.

1. ИСХОДНАЯ МОДЕЛЬ

Научной основой моделей управления биосистемами является учение о биосфере В. И. Вернадского и теория биогеоценозов В. П. Сукачева. Конечная цель биогеоценологии — вскрытие важнейших закономерностей процессов превращения вещества и энергии в биогеоценозах и между ними в целях управления этими процессами в интересах человека [4, с. 35]. Разнообразие биосистем делает невозможным использование единой, универсальной модели таких систем. В конечном счете выбор модели, ее структура и параметры, степень агрегированности определяются целью исследования. Значительный теоретический и практический интерес приобретают модели управления биосистемами с целью максимизации их продуктивности (выраженной в натуральных — биомасса — или стоимостных показателях) при соблюдении условий воспроизводства соответствующих биоресурсов. Сформулируем одну из таких моделей применительно к условиям

отдельной популяции (растительной или животной) и сообществ подобных популяций.

Пусть t — порядковый номер временного интервала ($t=0, \dots, T$, T — плановый период *); I — вид используемой популяции (производственное назначение животных, хозяйственная — типы леса — в лесном хозяйстве, пол и т. п.), $I=1, \dots, m$; θ — порядковый номер возрастного интервала, или класса возраста ($\theta=1, \dots, \tau_I$, τ_I — максимально возможный возраст, или срок использования, особей популяции вида I). Нетрудно видеть, что тройка (I, θ, t) однозначно определяет рассматриваемые группы особей используемых популяций. Поэтому в дальнейшем для краткости записи вместо слов «особи популяций вида I , возраст которых в момент t находится в промежутке $(\theta, \theta+1)$ » будем говорить «популяция группы (I, θ, t) ». Введем далее следующие обозначения: $X_{\theta t}^I$ — количество особей группы (I, θ, t) : $X_{\theta 0}^I$ — заданные числа; $Y_{\theta t}^I$ — количество особей группы (I, θ, t) , реализованных в момент $t+1$; $P_{\theta t}^I$ — коэффициенты дожития особей группы (I, θ, t) до момента $t+1$; $0 < P_{\theta t}^I \leq 1$; $s_{\theta t}^{Ij}$ — удельные затраты ресурсов вида j , $j=1, \dots, p$, на содержание особей группы (I, θ, t) в течение периода $(t, t+1)$; $\hat{s}_{\theta t}^{Ij}$ — удельные затраты ресурсов вида j , необходимые для реализации особей группы (I, θ, t) в момент $t+1$; $V_{\theta t}^I$ — удельный чистый доход от эксплуатации особей группы (I, θ, t) в момент времени $t+1$; $\hat{V}_{\theta t}^I$ — удельный чистый доход от реализации особей группы (I, θ, t) в интервале $(t, t+1)$.

Задача об оптимальном составе эксплуатируемой популяции состоит в отыскании неотрицательных чисел $X_{\theta t}^I$, $Y_{\theta t}^I$, $I=1, \dots, m$, $\theta=1, \dots, \tau_I$, $t=0, \dots, T$, таких, что

$$X_{\theta+1, t+1}^I = X_{\theta t}^I P_{\theta t}^I - Y_{\theta t}^I, \quad \theta=1, \dots, \tau_I, \quad I=1, \dots, m, \quad t=0, \dots, T, \quad (1)$$

$$X_{t+1}^I \in D(X_{\theta t}^I, Y_{\theta t}^I), \quad (2)$$

$$\sum_{I=1}^m \sum_{\theta=1}^{\tau_I} (X_{\theta t}^I s_{\theta t}^{Ij} + Y_{\theta t}^I \hat{s}_{\theta t}^{Ij}) \leq S_t^j, \quad t=0, \dots, T, \quad j=1, \dots, p, \quad (3)$$

$$X_{\theta t}^I \geq 0, \quad Y_{\theta t}^I \geq 0, \quad \theta=1, \dots, \tau_I, \quad I=1, \dots, m, \quad t=0, \dots, T, \quad (4)$$

$$\sum_{t=1}^T \sum_{I=1}^m \sum_{\theta=1}^{\tau_I} (V_{\theta t}^I X_{\theta t}^I + \hat{V}_{\theta t}^I Y_{\theta t}^I) = \max. \quad (5)$$

Поясним экономический смысл ограничений. Уравнения (1) — математическая запись баланса численности (плотности) особей популяции вида I для двух смежных возрастных интервалов в последовательные моменты времени. Соотношения (2) — совокупность специальных условий, определяющих воспроизводство особей популяций самых младших возрастных групп. Формальная запись этих условий зависит от конкретного вида рассматриваемой популяции. Приведем два примера.

При изучении динамики половой и возрастной структуры популяций двуполовых организмов условия (2) можно записать

$$X_{t+1}^I = \alpha_I \sum_{\theta=1}^{\theta=\tau_I} X_{\theta t}^I \mu_{\theta t},$$

где $I=1$ — индекс особей женского, $I=2$ — мужского пола; $\mu_{\theta t}$ — коэффициент плодовитости самок в возрасте из интервала $(\theta, \theta+1)$; α_I — вероятность рождения особи пола I .

* О продолжительности планового периода T см. разд. 3.

Модель динамики лесного фонда (совокупности лесных биогеоценозов) [5, с. 27–41] включает условие (2) в виде

$$X_{t+1}^I = \sum_{j=1}^m \sum_{\theta=1}^{\tau_I} a^{Ij} Y_{\theta t}^j, \quad I=1, \dots, m,$$

где a^{Ij} — коэффициент матрицы воспроизводства, равный площади, переходящей в начальный класс возраста хозсекции I , если рубки были проведены на единице хозсекции j .

Условие (3) представляет математическую запись лимитов на использование различных видов ограниченных ресурсов (кормов, удобрений, производственных площадей и т. д.). Смысл условий (4) очевиден. В частности, требование неотрицательности переменных $Y_{\theta t}^I$ означает, что поступление новых особей со стороны возможно разве что в наименьших возрастных группах ($\theta=1$). В этом случае ограничения, описывающие множество $D(X_{\theta t}^I, Y_{\theta t}^I)$, должны задаваться в форме неравенств. В дальнейшем будем предполагать, что множества $D(x_{\theta t}^I, y_{\theta t}^I)$ заданы для каждого I и t в виде одного линейного ограничения. Целевая функция (5) — максимизируемый суммарный чистый доход (прибыль) от эксплуатации и реализации особей используемых популяций.

Модели, аналогичные (1)–(5), содержатся в [1, 2]. Теперь перейдем к рассмотрению вопросов, которые не исследовались в [1, 2].

2. ОБ АЛГОРИТМЕ РАСЧЕТОВ ПО МОДЕЛИ

Задача (1)–(5) включает большое число переменных и ограничений. При реальных значениях параметров m , p , τ_I и T решение задачи стандартными методами математического программирования наталкивается на принципиальные трудности.

Однако специфика ограничений (1) позволяет свести решение задачи (1)–(5) к эквивалентной ей задаче линейного программирования, содержащей существенно меньше ограничений и в два раза меньше переменных.

Идея предлагаемого способа сведения исходной задачи к задаче меньшей размерности заключается в следующем [4]. Решим разностные уравнения (1) относительно переменных $X_{\theta t}^I$. Находим значения величин $X_{\theta t}^I$ для $1 \leq \theta \leq \tau_I$, $1 \leq t \leq T$, через их значения при $\theta=1$ или $T=0$ и значения $Y_{\theta t}^I$, $\theta=1, \dots, \tau_I$, $t=0, \dots, T$, $I=1, \dots, m$. Полученные формулы подставляем в ограничения (2)–(5) и определяем коэффициенты, с которыми в результате таких преобразований будут входить в (2)–(5) переменные X_{it}^I , $Y_{\theta t}^I$. В силу неотрицательности величин $Y_{\theta t}^I$ и $P_{\theta t}^I$ для того, чтобы обеспечить неотрицательность переменных $X_{\theta t}^I$ для всех значений $\theta=1, \dots, \tau_I$, $I=1, \dots, m$, $t=0, \dots, T$, достаточно проверить их неотрицательность в граничных точках области изменения θ и t . Получаемая таким образом задача линейного программирования относительно переменных $Y_{\theta t}^I$ и X_{it}^I , $I=1, \dots, m$, $t=0, \dots, T$, $\theta=1, \dots, \tau_I$, имеет существенно меньшую размерность по сравнению с исходной задачей, так как не содержит ограничений (1).

3. МОДЕЛЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ СОСТАВОМ ЭКСПЛУАТИРУЕМОЙ ПОПУЛЯЦИИ

Во многих экономических приложениях нормативы затрат ресурсов и продуктивность особей популяции, а также общие затраты ресурсов, обеспечивающих функционирование системы, можно считать периодическими функциями времени с периодом h (часто h равно одному году) или, в частности, неизменяющимися во времени. В таких случаях полезным

бывает отыскание политики управления (как периодической функции времени) популяцией.

Обозначим через $W(T)$ общий доход от эксплуатации популяции в течение периода T . Значение $W(T)$ совпадает с оптимальным значением целевой функции задачи (1)–(5), решаемой для периода T .

Пусть далее $\hat{X}_{\theta t}^I$, $\hat{Y}_{\theta t}^I$, $I=1, \dots, m$, $\theta=1, \dots, \tau_I$, $t=0, \dots, T$, — решение задачи (1)–(5) для периода $(0, T)$, $T=nh$, где n — целое.

Обозначим через $\bar{X}_{\theta \tau}^I$ и $\bar{Y}_{\theta \tau}^I$, $\theta=1, \dots, \tau_I$, $\tau=0, \dots, h$, $I=1, \dots, m$, параметры, определяемые по формулам

$$\bar{X}_{\theta \tau}^I = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{h-n-1} \hat{X}_{\theta, \tau+kh}^I, \quad \bar{Y}_{\theta \tau}^I = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{h-n-1} \hat{Y}_{\theta, \tau+kh}^I. \quad (6)$$

Предположим далее, что общие лимиты и удельные затраты ресурсов, обеспечивающих функционирование рассматриваемой биосистемы, а также показатели продуктивности особей популяции периодически изменяются во времени с периодом h .

Используя (6), нетрудно убедиться, что

$$X_{\theta 0}^I - X_{\theta h}^I = \frac{1}{n} (\hat{X}_{\theta, nh}^I - X_{\theta 0}^I).$$

Просуммируем теперь левые и правые части ограничений (2)–(4) при $t=r, r+h, \dots, r+(n-1)h$, $r=1, \dots, h$, и разделим на n . Получим, что переменные $\bar{X}_{\theta \tau}^I$, $\bar{Y}_{\theta \tau}^I$ представляют собой допустимый план следующей задачи линейного программирования: найти $X_{\theta \tau}^I$, $Y_{\theta \tau}^I$, $I=1, \dots, m$, $\theta=1, \dots, \tau_I$, $\tau=0, \dots, h$, такие, что

$$X_{\theta+1, \tau+1}^I = X_{\theta \tau}^I P_{\theta \tau}^I - Y_{\theta \tau}^I, \quad I=1, \dots, m, \quad \theta=1, \dots, \tau_I, \quad \tau=0, \dots, h-1, \quad (7)$$

$$X_{1, \tau+1}^I \in D(X_{\theta \tau}^I, Y_{\theta \tau}^I), \quad I=1, \dots, m, \quad \tau=0, \dots, h-1, \quad (8)$$

$$X_{\theta 0}^I = X_{\theta h}^I + \frac{1}{n} (\hat{X}_{\theta 0}^I - \hat{X}_{\theta, nh}^I), \quad I=1, \dots, m, \quad \theta=1, \dots, \tau_I, \quad (9)$$

$$\sum_{I=1}^m \sum_{\theta=1}^{\tau_I} (X_{\theta \tau}^I s_{\theta \tau}^{Ij} + \hat{s}_{\theta 0}^{Ij} Y_{\theta \tau}^I) \leq S_{\tau}^j, \quad \tau=0, \dots, h, \quad j=1, \dots, P, \quad (10)$$

$$X_{\theta \tau}^I \geq 0, \quad Y_{\theta \tau}^I \geq 0, \quad I=1, \dots, m, \quad \theta=1, \dots, \tau_I, \quad \tau=0, \dots, h, \quad (11)$$

$$\sum_{\tau=0}^h \sum_{I=1}^m \sum_{\theta=1}^{\tau_I} (V_{\theta \tau}^I X_{\theta \tau}^I + \hat{V}_{\theta \tau}^I Y_{\theta \tau}^I) = \max. \quad (12)$$

Обозначим оптимальные значения функционала задачи (7)–(12) через $V(n)$. Значение функционала (12) при $X_{\theta t}^I = \bar{X}_{\theta t}^I$, $Y_{\theta t}^I = \bar{Y}_{\theta t}^I$ равно $W(nh)/n$, поэтому

$$V(n) \geq \frac{W(nh)}{n}. \quad (13)$$

При $n \rightarrow \infty$ перейдем к пределу в (9) и (13). Тогда справедливо следующее утверждение.

Утверждение. Если задача (1)–(5) имеет решение для любых T и мно-

жество ее оптимальных планов равномерно ограничено для $1 \leq T < \infty$, то

$$\lim \frac{W(T)}{T} \leq \frac{V}{h}, \quad (14)$$

где V — оптимальное значение функционала следующей задачи: найти $X_{\theta\tau}^I, Y_{\theta\tau}^I, I=1, \dots, m, \theta=1, \dots, \tau_I, \tau=0, \dots, h$, такие, что

$$X_{\theta+1}^I = X_{\theta\tau}^I P_{\theta\tau}^I - Y_{\theta\tau}^I, \quad I=1, \dots, m, \quad \theta=1, \dots, \tau_I, \quad \tau=0, \dots, h-1, \quad (15)$$

$$X_{\theta\tau+1}^I \in D(X_{\theta\tau}^I, Y_{\theta\tau}^I), \quad I=1, \dots, m, \quad \tau=0, \dots, h-1, \quad (16)$$

$$X_{\theta 0}^I = X_{\theta h}^I, \quad I=1, \dots, m, \quad \theta=1, \dots, \tau_I, \quad (17)$$

$$\sum_{I=1}^m \sum_{\theta=1}^{\tau_I} (X_{\theta\tau}^I s_{\theta\tau}^{ij} + \hat{s}_{\theta\tau}^{ij} Y_{\theta\tau}^I) \leq S^j, \quad \tau=0, \dots, h, \quad j=1, \dots, P, \quad (18)$$

$$X_{\theta\tau}^I \geq 0, \quad Y_{\theta\tau}^I \geq 0, \quad I=1, \dots, m, \quad \theta=1, \dots, \tau_I, \quad \tau=0, \dots, h, \quad (19)$$

$$\sum_{\tau=1}^h \sum_{I=1}^m \sum_{\theta=1}^{\tau_I} (V_{\theta\tau}^I X_{\theta\tau}^I + \hat{V}_{\theta\tau}^I Y_{\theta\tau}^I) = \max. \quad (20)$$

Пользуясь этим утверждением, можно, в частности, сформулировать следующее правило нахождения оптимальной политики управления составом популяции для больших плановых периодов. Сначала определяется состав популяции, обеспечивающий максимальную продуктивность за время, равное периоду изменения нормативов затрат и лимитов ресурсов и показателей удельной продуктивности. Если фактический состав популяции совпадает с найденным оптимальным, то следует придерживаться политики реализации особей при условии поддержания оптимального состава. В противном случае необходимо решить задачу о сведении фактического состава к оптимальному составу популяции за минимальное время. Сформулированное выше утверждение справедливо для случая, когда $h=1$. При этом в обозначении переменных можно опустить индекс времени и задача (15)–(20) принимает простой вид: найти $X_{\theta}^I, Y_{\theta}^I, I=1, \dots, m, \theta=1, \dots, \tau_I$, такие, что

$$X_{\theta+1}^I = X_{\theta}^I P_{\theta}^I - Y_{\theta}^I, \quad I=1, \dots, m, \quad \theta=1, \dots, \tau_I, \quad (21)$$

$$X_1^I \in D(X_{\theta}^I, Y_{\theta}^I), \quad I=1, \dots, m, \quad (22)$$

$$\sum_{I=1}^m \sum_{\theta=1}^{\tau_I} (X_{\theta}^I s_{\theta}^{ij} + \hat{s}_{\theta}^{ij} Y_{\theta}^I) \leq S^j, \quad j=1, \dots, P, \quad (23)$$

$$X_{\theta}^I \geq 0, \quad Y_{\theta}^I \geq 0, \quad I=1, \dots, m, \quad \theta=1, \dots, \tau_I, \quad (24)$$

$$\sum_{I=1}^m \sum_{\theta=1}^{\tau_I} (V_{\theta}^I X_{\theta}^I + \hat{V}_{\theta}^I Y_{\theta}^I) = \max. \quad (25)$$

Для решения задачи (21)–(25) может быть использован подход, аналогичный примененному для (1)–(5), а именно, с помощью равенства (21), выразим переменные $X_{\theta}^I, I=1, \dots, m, \theta=1, \dots, \tau_I$, через X_1^I и $Y_{\theta}^I, I=1, \dots, m, \theta=1, \dots, \tau_I$, и подставим полученные выражения в (22)–(25). Затем определим коэффициенты при переменных $X_1^{(I)}$ и $Y_{\theta}^I, I=1, \dots, m, \theta=1, \dots, \tau_I$, в (22)–(25). В результате получили задачу линейного программирования с переменными X_1^I и Y_{θ}^I , которая по сравнению с исходной имеет существенно меньшую размерность.

4. ОБЛАСТЬ ПРИМЕНЕНИЯ МОДЕЛЕЙ. РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ РАСЧЕТОВ

Рассмотренные динамические и статические модели управления популяциями и их сообществами (биоценозами) могут быть использованы для решения различных задач. Применение динамических моделей целесообразно и необходимо при планировании на период, по длительности меньший или сравнимый с возрастом естественного старения особей популяций, так как в этом случае важно учесть начальное состояние биоценоза. В частности, при моделировании динамики состава биологических популяций со сроком естественного старения более 10 лет динамические модели могут быть использованы в целях получения долгосрочного прогноза. Например, в демографии для прогноза численности и половозрастного состава населения широко используется метод повозрастных передвижек, который является частным случаем модели (1)–(2). Динамическая модель планирования состава биоценозов необходима также для получения математически корректной постановки задачи в статическом варианте. Как было показано выше, результаты расчетов по статическим моделям (15)–(20) или (24)–(25) позволяют определить усредненную во времени динамику состава биоценоза на промежутке длины h и соответствующую этому составу политику управления (изъятие особей). Тем самым обеспечивается практическая целесообразность применения статических моделей в следующих задачах: 1) оптимизация технологических решений в отраслях народного хозяйства, использующих продукты жизнедеятельности биологических сообществ; 2) планирование в этих отраслях производства на длительную перспективу; 3) научно обоснованное определение директивных показателей производства не по достигнутому уровню, а путем балансирования производственных заданий и величины ресурсов с использованием удельных нормативов расходования.

Например, при планировании производства на животноводческих предприятиях промышленного типа (птицефабрики, откормочные комплексы и т. д.) можно выделить следующие задачи, при решении которых полезно применение моделей описываемого вида: 1) выбор оптимальных технологий производства на этапе проектирования предприятий; 2) разработка плана организационно-хозяйственных мероприятий предприятий на перспективу более 5 лет; 3) составление перспективного плана производства на предприятии; 4) составление годового производственно-финансового плана; 5) расчет технологических планов-графиков движения поголовья по цехам и участкам предприятия. При этом для первой, второй и третьей задач достаточно применить статические модели, а для четвертой и пятой необходимы динамические. Однако в двух последних случаях результаты предварительного расчета по статическим моделям чрезвычайно полезны, так как они позволяют определить оптимальные для данного предприятия сроки использования животных разного производственного назначения; такие сроки являются исходными данными при практическом расчете технологических планов-графиков движения поголовья. Перейдем теперь к изложению результатов некоторых экспериментальных расчетов.

Для решения задачи (24)–(25) авторами настоящей работы была составлена программа на языке АЛГОЛ-60 и проведены расчеты оптимальных поголовья птицы и его возрастной структуры на бройлерной птицефабрике. Программа позволяет при известных удельных нормативах сохранности, продуктивности птицы и затрат ресурсов на ее содержание рассчитывать оптимальные сроки выращивания бройлеров, сроки использования кур-несушек родительского стада и соответствующую этим срокам структуру поголовья, а также максимальный выход продукции птицефабрики и потребность в средствах производства.

Анализ изменений абсолютных значений показателей выхода мяса и прибыли для разных вариантов расчета, отличающихся соотношениями объемов ресурсов, планируемых для содержания птицы, показывает, что выбор оптимальных поголовья птицы и его возрастной структуры позволяет увеличить выпуск продукции на действующих птицефабриках приблизительно на 5–10%. Для бройлерной птицефабрики с объемом производства в 6 млн. бройлеров в год это обеспечивает увеличение прибыли на 0,5–1 млн. руб. и выхода мяса на 400–800 т.

С учетом специфических особенностей лесных биогеоценозов была разработана и реализована модель динамики лесного фонда, аналогичная (1)–(5). С помощью модели доказано существование предельных равновесных состояний лесного фонда, определяемых условиями воспроизводства, способами рубки, объемами лесохозяйственных мероприятий и не зависящих от начального состояния лесного биогеоценоза. Такие равновесные состояния называются состояниями нормального леса*. С формальной точки зрения все равновесные состояния представляют собой допустимые планы задачи (21)–(25). Ее оптимальное решение определяет среди возможных вариантов нормального леса наилучший в смысле критерия (25) (в качестве критерия можно, например, использовать выход деловой древесины). Такое состояние было названо лесом максимальной производительности [5, с. 46–50; 6, с. 907–913]. Таким образом, лес максимальной производительности есть лес с нормальной структурой, которой соответствует наивысшая продуктивность, выраженная в натуральных или стоимостных (денежных) показателях.

Структура леса максимальной производительности прежде всего необходима для анализа последствий проведения той или иной хозяйственной политики лесопользования для больших плановых периодов. Кроме того, нахождение наилучшей политики сведения начального распределения лесного фонда к лесу максимальной производительности является, на наш взгляд, весьма перспективным подходом к решению реальных проблем определения размера лесопользования в условиях лесодефицитного района. Такой вывод хорошо согласуется с результатами экспериментального расчета (выполненного В. К. Нигголем) на материалах Ленинградской области.

ЛИТЕРАТУРА

1. Брежнев А. И., Гинзбург Л. Р., Полуэктов Р. А. Оптимизация половозрастной структуры популяций. — Экономика и матем. методы, 1974, т. X, вып. 4.
2. Динамическая теория биологических популяций. М.: Наука, 1974.
3. Суровцов Л. К. Математическая модель управления животноводческой фермой. — В кн.: Применение математики в экономике. Вып. 8. Л.: Изд-во ЛГУ, 1973.
4. Основы лесной биогеоценологии. М.: Наука, 1964.
5. Шалабин Г. В. Оптимизация долгосрочного плана группы взаимосвязанных отраслей экономического района. Л.: Изд-во ЛГУ, 1975.
6. Шалабин Г. В., Нигголь В. К. Элементы системы оптимизации плана развития лесохозяйственного района. — Экономика и матем. методы, 1975, т. XI, вып. 5.

Поступила в редакцию
15 VI 1979

* Существует обширная специальная отечественная и зарубежная литература, посвященная теории нормального леса. Однако в ней мы не обнаружили ни однозначного формального определения нормального леса, ни строгого математического доказательства существования такого состояния при тех или иных предположениях. Поэтому термин «нормальный лес» здесь употребляется в соответствии с определением, содержащимся в [5, с. 35–39, 46–50].