ЭКОНОМИКА
И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

1981
том XVII, вып. 4

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

ОПТИМАЛЬНОСТЬ ПЛАНОВ, МИНИМИЗИРУЮЩИХ ПРИВЕДЕННЫЕ ЗАТРАТЫ

Мовшович С. М.

(Москва)

1. Исчисление и сравнение приведенных затрат принадлежат к наиболее распространенным формам плановых экономических расчетов. Область их применения простирается от оценки эффективности отдельных хозяйственных мероприятий до составления отраслевых планов и ограничивается лишь требованием тождественности результатов сопоставляемых вариантов. Известны различные методы подсчета затрат и подходы к их обоснованию [1]. Наиболее разработанный предлагается теорией оптимального планирования [2, 3]. Он базируется на следующих постулатах.

Первое, основное предположение заключается в том, что затраты подсчитываются в оптимальных ценах. В этом случае выбор варианта, минимизирующего приведенные затраты, обеспечивает экстремальное значение критерия оптимальности, т. е. наилучшим образом способствует достижению целей народнохозяйственного плана.

Оптимальные цены рассчитываются только вместе с оптимальным планом. Согласно второму допущению, последующее их применение в плановых расчетах возможно, если процесс составления плана подразделяется на два этапа. На первом строится оптимальный план и соответствующая ему система цен; он не является исчерпывающим, но включает все крупные, существенные мероприятия, а остальные рассматриваются на втором этапе независимо друг от друга. Решение об их введении в план принимается по результатам сравнения затрат.

Наконец, согласно третьей гипотезе каждое оцениваемое мероприятие считается «малым», т. е. не оказывает заметного влияния на сложившиеся оптимальные цены и тем самым на оценку и выбор других мероприятий. Если мероприятие не «малое», то его включение в план изменяет оптимальные цены, а поскольку цены на втором этапе планирования не пересматриваются, основная гипотеза в этом случае неверна, так что дальнейшие расчеты эффективности проводятся при произвольных, вообще говоря, ценах, не обладающих с точки зрения принятого критерия оптимальности какими-либо стимулирующими свойствами.

Таким образом, гипотеза «малости» мероприятий становится существенной при обосновании методов оценки эффективности с помощью теории оптимального планирования. Вместе с тем в ряде случаев справедливость этой гипотезы сомнительна. Рассмотрим некоторые из них. Приведенные затраты используются в качестве критерия при отраслевом планировании, например в задачах развития и размещения производства [4]. Едва ли комплекс мероприятий, включаемых в план в итоге решения подобной задачи, можно считать малым. Далее, расчеты эффективности при выборе отдельных хозяйственных мероприятий являются массовыми, и, если влиянием отдельного мероприятия на цены можно пренебречь, этого нельзя сделать относительно их совокупности. Неправомерно считать, что вследствие независимости мероприятий, разнообразия присущих им затрат и выпусков их воздействие на цены взаимно компенсируется и потому совместное влияние мало. В самом деле, суммарный эффект всех вошедших в план мероприятий весьма значителен (в противном случае экономическая роль расчетов эффективности невелика), в частности высока общая дополнительная прибыль от их внедрения. Существенность прибыли, с точки зрения теории оптимального планирования, означает, что планируемая совокупность мероприятий влечет заметное изменение сложившихся ранее оптимальных цен*. Приведенные затраты подсчитываются также в ситуациях, когда предположение об оптимальности цен, очевидно, не выполняется, например при предплановом отборе проектов.

Выбор вариантов по минимуму приведенных затрат во всех названных случаях, с точки зрения теории оптимального планирования, оказывается, строго говоря, необоснованным. Применение теории было бы последовательным при итерационном процессе пересмотра плановых наметок и цен. Моделью такого процесса служит, например, метод последовательного улучшения плана в линейном программировании, который можно схематично представить в виде

$$\to \left(\underline{| \to \text{ПП}(\text{Ц}) \to \text{ЦО} \to |} \right)^s \to \text{П} \to, \qquad (1)$$

где ПП — этап выработки плановых предложений, зависящих от цен Ц; ЦО — выработка наметок цен; s — число итераций согласования плана и цен, приводящих к установлению оптимального плана и стимулирующих его цен; П — окончательный вариант плана. Процесс (1) периодически повторяется. Подобные схемы планирования иногда называют процессами с нащупыванием.

Более близкой практике, в частности применительно к упомянутым примерам планирования по критерию минимума приведенных затрат, является схема

$$\to \text{ПП}(\text{Ц}) \equiv \text{П} \to \text{ЦО} \to. \qquad (2)$$

При планировании по (2) (процесс без нащупывания) вопрос о сути и целесообразности подсчета приведенных затрат остается открытым.

В настоящей статье изучается динамика цен и структуры производственных мощностей при некоторых реализациях схемы (2), охватывающих упомянутые выше типичные случаи плановых расчетов эффективности. Показывается устойчивость последовательности цен и асимптотическая оптимальность структуры мощностей и тем самым обосновывается целесообразность минимизации приведенных затрат. Попутно проводится сравнительный анализ ценообразования по среднеотраслевым и замыкающим затратам.

Существенную роль в дальнейшем играют процессы трех типов: планирования, формирования производственных мощностей и ценообразования.

2. Рассматривается составление годового народнохозяйственного плана. Ежегодно разрабатываются два плана: текущего производства и капитального строительства. Центральный планирующий орган формирует и выдает отраслям задания по годовому выпуску продукции. Отрасль к началу года располагает производственными мощностями двух типов. К пер-

* При оптимальных ценах и полном учете всех компонент затрат оценка выпуска в оптимальном плане равна затратам. Если хозяйственные мероприятия приводят к определенному снижению затрат при неизменном выпуске, то требуемое теорией равенство затрат и результатов возможно лишь при изменении оптимальных цен.

вому относятся мощности «на ходу», т. е. использовавшиеся либо введенные в действие в предыдущем периоде, ко второму — простаивавшие резервные мощности. Ввод в действие этих мощностей может потребовать определенных инвестиционных затрат. Руководствуясь заданным выпуском и наличием мощностей, отрасль создает годовой план производства по критерию минимизации приведенных затрат.

План капитального строительства составляется также на двух уровнях: центральном и отраслевом. Отрасль готовит план, минимизирующий приведенные затраты и обеспечивающий заданный центром прирост выпуска, величина которого формируется таким образом, чтобы обеспечить удовлетворение возрастающих потребностей в продукции в будущем. Последние определяются заданным извне приростом потребностей в продукции непроизводственного назначения и прогнозом роста инвестиций. План прироста выпуска формируется в процессе итерационного обмена информацией между центром и отраслями.

План капитального строительства намечает будущий прирост мощностей, который зависит от сроков строительства, а также от характера выбытия мощностей вследствие износа и от политики в отношении неиспользованных мощностей. Для упрощения анализа принято, что срок строительства равен году, физическим выбытием действующих мощностей можно пренебречь, поскольку текущие производственные затраты включают реновационный компонент. Простаивающие производственные фонды с течением времени частично или полностью приходят в негодность и списываются с баланса отрасли. Возобновление их использования возможно при осуществлении капитальных вложений для восстановления выбывшей части.

Последний этап процесса (2) — ценообразование. При назначении цен приходится одновременно заботиться о различных целях: стимулировании эффективности производства и распределения с помощью отражения в цене общественно необходимых затрат производителя и полезного эффекта у потребителя, рациональном использовании дефицитных ресурсов, балансе спроса и предложения. Эти функции осуществляются оптимальными ценами, поэтому желательна близость действующих цен к оптимальным. Для приближения цен к оптимальным можно пользоваться при ценообразовании свойствами последних. Так, нарушение баланса спроса и предложения или неравенство цены необходимым затратам свидетельствует об отклонении действующих цен от оптимальных, о целесообразности регулирования цен.

В плановой экономике, где значительная часть спроса и почти все предложение задаются в плане, отклонение цен от оптимальных не обязательно сопровождается нарушением баланса. В условиях плановой сбалансированности основой ценообразования является установление цен на уровне общественно необходимых затрат. Теория оптимального планирования опирается на их однозначное количественное определение. Кроме того, для ценообразования разработаны различные методы и схемы их подсчета [5]. На практике в настоящее время широко применяется схема цены производства, составляющие которой рассчитываются исходя из среднеотраслевых затрат. Такая схема принята и в данной работе, поскольку цель этой статьи — выяснить сущность метода минимизации приведенных затрат в форме, применяющейся в практических расчетах. В конце для сравнения рассматривается ценообразование на базе замыкающих затрат.

Схема цены производства модифицируется следующим образом. Во-первых, фондовая составляющая цены исчисляется с коэффициентом пропорциональности, равным нормативу эффективности. Таким образом, цена определяется приведенными затратами. Во-вторых, поскольку сформированные цены предназначены для использования в будущем, при ценообразовании учитываются не только текущие затраты на действующих мощностях, но и затратные характеристики реализуемых проектов (см. [6]).

3. Перейдем к формальному описанию модели производства, процессов планирования и ценообразования. Счет времени в модели дискретный, $t=0, 1, \ldots$. Длительность периода t, т. е. $(t, t+1)$, отождествляется обычно с годом, но может быть произвольной. В модели различаются n продуктов и n отраслей, каждая из которых изготовляет один продукт. Различные отрасли производят разные продукты. Технологические возможности отрасли задаются неизменным во времени конечным набором технологических способов $I(i)$, $i=1, \ldots, n$. Способ j характеризуется удельными затратами продуктов a_{ij}, труда l_j, измеренными в единицах заработной платы, и используемыми основными и оборотными фондами b_{ij}, $i=1, \ldots, n$, $j\in\bigcup_i I(i)=\{1, \ldots, K\}$, приходящимися на единицу выпуска продукции в течение периода t. Хотя здесь принято, что l_j — затраты труда, все сказанное действительно, если l_j включает также и затраты природных ресурсов в денежном выражении. Затраты пропорциональны выпуску. Выпускаемая в течение года продукция идет на покрытие материальных производственных и инвестиционных затрат в этом же периоде.

Производственные возможности отрасли i в период t определяются наличием мощностей M_j^t, $j\in I(i)$, в его начале. Наличные мощности подразделяются на две части: m_j^t — использованные или введенные в действие в предыдущем периоде (будем называть их действующими); Δm_j^t — не использованные в этом периоде времени (простаивающие). Можно было бы различать их по времени простоя и соответственно степени выбытия, при этом все дальнейшие результаты остаются в силе. Для упрощения обозначений принято, что степень выбытия не зависит от времени простоя. Капитальные вложения в новые мощности $(b_{1j}, \ldots, b_{nj})z_j^t$ и полное их освоение осуществляются в течение года, срок службы действующих мощностей практически бесконечен.

При простое мощностей вследствие неэффективности их применения принято, что выбывает одна и та же доля α всех компонент фондов. В соответствии с этим вовлечение простаивающих мощностей в производство требует капитальных вложений $\alpha(b_{1j}, \ldots, b_{nj})$ на единицу мощности, $0\leqslant\alpha\leqslant1$ *. Срок восстановления дееспособности этих мощностей считается пренебрежимо малым в сравнении с годом.

В реальной экономике расширение производственных мощностей отрасли достигается зачастую путем одновременного строительства ряда предприятий. Их технологические характеристики могут значительно различаться, особенно в добывающих отраслях, когда приходится идти на освоение малоэффективных природных ресурсов из-за ограниченности более эффективных. Чтобы отразить это важное для дальнейшего анализа явление, в модели производства принято, что годовой объем строительства мощностей каждого вида z_j^t ограничен сверху, причем верхняя граница r_j^t зависит от технологического способа и времени. Границы r_j^t учитывают в неявной форме необходимость использования ограниченных ресурсов разной природы.

Введем обозначения: I — $n\times K$-матрица удельных выпусков, ее элемент $I_{ij}=1$, если $j\in I(i)$, и 0 в остальных случаях, $A=(a_{ij})$; $B=(b_{ij})$ — $n\times K$-матрицы удельных прямых затрат и фондоемкостей; A_j, B_j — столбцы A

---

* Практически важный случай, когда ввод в действие резервных мощностей не требует инвестиционных затрат, отражается в модели при $\alpha=0$.

и B, $l=(l_j)$, $p^t=(p_1{}^t, \ldots, p_n{}^t)$ — вектор цен в период t. Пусть также R — норматив эффективности капитальных вложений, $S=A+RB$; $v_j(p)=pS_j+l_j$ — годовые (удельные) приведенные затраты при введении в действие способа j; $w_j(p)=pA_j+l_j$ — текущие годовые затраты, $\omega_j(p)=RpB_j$ — приведенные капитальные вложения.

В формулах приведенных затрат для упрощения записи капитальные вложения считаются единовременными, а не распределенными в течение срока строительства.

Составление годового производственного плана отрасли i, $i=1, \ldots, n$, на год t моделируется решением задачи

$$\sum_{j\in I(i)} (w_j(p^t)y_j+(w_j(p^t)+\alpha\omega_j(p^t))u_j) \to \min \tag{3}$$

при условиях

$$\beta m_j{}^t \leqslant y_j \leqslant m_j{}^t, \quad 0\leqslant u_j \leqslant \Delta m_j{}^t, \quad j\in I(i), \quad \sum_{j\in I(i)} (y_j+u_j)=x_i{}^t, \tag{4}$$

где $x_i{}^t$ — установленный центральным планирующим органом объем годового выпуска продукции; y_j — плановый объем выпуска с действующих мощностей вида j; u_j — плановый объем загрузки ранее простаивавших мощностей; β — установленная нижняя граница использования мощностей. При $\beta=1$ и $\Delta m_j{}^0=0$ все наличные мощности действуют полностью.

Годовой план капитальных вложений моделируется решением задачи

$$\sum_{j\in I(i)} v_j(p^t)z_j \to \min \tag{5}$$

при условиях

$$0\leqslant z_j \leqslant r_j{}^t, \quad \sum_{j\in I(i)} z_j=\Delta x_i{}^t. \tag{6}$$

Здесь $\Delta x_i{}^t$ — заданный центром прирост выпуска в году $t+1$ в сравнении с годом t; z_j — плановый объем ввода новых мощностей вида j в году t. Задача (5) — (6) планирования капитальных вложений рассматривалась в [3].

Пару задач планирования (3) — (6) назовем П.1.

Обозначим через $y(p, x)=(y_j(p, x))_{j=1}^K$ и соответственно $u(p, x)$, $z(p, \Delta x)$ компоненты решения задач П.1 при заданных ценах p и выпусках $x=(x_1, \ldots, x_n)$ и $\Delta x=(\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)$. Положим также $y^t=y(p^t, x^t)$ и т. п. Опишем процесс формирования заданий по выпуску продукции. Пусть $c^t=(c_1{}^t, \ldots, c_n{}^t)$ — годовая потребность в продукции непроизводственного назначения, направляемой на удовлетворение личных и общественных нужд. План обеспечивает удовлетворение потребностей c^t лишь с некоторой точностью, т. е. наряду с c^t будем рассматривать $c_ф{}^t$ — вектор фактических объемов продукции непроизводственного назначения, $c_ф{}^t=x^t-A(y^t+u^t)-Bz^t$. Положим $\Delta c^t=c^{t+1}-c_ф{}^t$ — плановый прирост непроизводственных потребностей; $\bar{z}^{t+1}$ — прогноз плана капитального строительства на период $t+1$, вырабатываемый в году t (необходимость прогноза связана с известной проблемой учета влияния потребностей развития в послеплановом периоде). В этих обозначениях прирост потребностей в конечном продукте от t к $t+1$ равен, очевидно, $\Delta c^t+B(\bar{z}^{t+1}-z^t)$. Тогда прирост валового выпуска Δx должен удовлетворять системе уравнений

$$\Delta x=\Delta c^t+Az^t+B(\bar{z}^{t+1}-z^t). \tag{7}$$

Ее решение обозначим через $\Delta x^t = \Delta x(p^t, \Delta c^t)$. Будем считать, что прогноз $\bar{z}^{t+1}$ вырабатывается одновременно с планом z^t, причем $\bar{z}^{t+1} = (E+\Lambda(t))z^t$, где E — единичная, а $\Lambda(t)$ — заданная неотрицательная $K \times K$-матрицы. Построение плана капитальных вложений $(\Delta x^t, z^t)$ производится, например, методом перезаказов

$$\Delta x^{(0)} = \Delta c, \quad \Delta x^{(s+1)} = \Delta c + (A + B\Lambda(t))z(p, \Delta x^{(s)}). \tag{8}$$

Ниже будет показано, при каких условиях последовательность $\Delta x^{(s)}$ сходится к решению Δx^t системы (7). После расчета прироста Δx^t устанавливаются задания по выпуску продукции

$$x^{t+1} = x^t + \Delta x^t \tag{9}$$

на следующий год. Из (4), (6), (7), (9) и определения Δc^t легко видеть, что $x^{t+1} = c^{t+1} + A(y^t + u^t + z^t) + B\bar{z}^{t+1}$, т. е. совпадение $\bar{z}^{t+1}$ с z^{t+1} и полное использование в $t+1$ действующих мощностей обеспечили бы равенство планируемого и фактического непроизводственного потребления. Погрешности прогнозирования капитальных вложений и перестройки производства в соответствии с (3) порождают отклонения $c_{\text{ф}}^t$ от c^t.

Выбор последовательности c^t не является, очевидно, произвольным. С одной стороны, он должен приводить к удовлетворению платежеспособного спроса, с другой — к реализуемости, т. е. существованию решений задач П.1 и обеспеченности плана трудовыми ресурсами. Минимизация приведенных затрат, включающих оплату труда, обусловливает экономное расходование трудовых ресурсов, но сама по себе не гарантирует баланса рабочей силы. Эти балансы должны учитываться при формировании планов потребления c^t. Построение последовательности $\{c^t\}$ здесь не рассматривается, она считается заданной и в этом смысле описываемый процесс планирования не замкнут.

Поскольку не делается различия между планом и его реализацией, решение П.1 определяет наличные, действующие и простаивающие мощности к началу года $t+1$. Из принятых допущений о сроках строительства и службы следует

$$M_j^{t+1} = M_j^t + z_j^t, \quad m_j^{t+1} = y_j^t + u_j^t + z_j^t \quad \forall j, t, \tag{10}$$

а также

$$\Delta m_j^{t+1} = m_j^t - y_j^t + \Delta m_j^t - u_j^t \quad \forall j, t. \tag{11}$$

Мощности и задания по валовому выпуску связаны вытекающими из (4), (6) и (9) соотношениями

$$\sum_{j \in I(i)} m_j^{t+1} = \sum_{j \in I(i)} (y_j^t + u_j^t + z_j^t) = x_i^{t+1}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{12}$$

т. е. задание по выпуску продукции может быть выполнено за счет действующих (функционировавших в предыдущем периоде) и вновь вводимых в строй мощностей.

Принято, что цена включает среднеотраслевую себестоимость и прибыль, пропорциональную фондам отрасли. Обе компоненты формируются с учетом как фактической структуры производства, так и приращения затрат, фондов и выпуска, связанных с освоением осуществленных капитальных вложений. В момент $t+1$ (начало года $t+1$) среднеотраслевая себестоимость включает фактические затраты года t и будущие затраты на новых мощностях, приходящиеся на единицу выпуска. Фонды отрасли равны сумме наличных фондов заканчивающегося года и вновь освоенных. Фонды отрасли оцениваются по восстановительной стоимости в действующих ценах. Таким образом, цена в году $t+1$ равна

$$p_i^{t+1} = \frac{1}{x_i^{t+1}} \sum_{j \in I(i)} (w_j(p^t)(y_j^t + u_j^t + z_j^t) +$$

$$+ \omega_j(p^t) m_j^{t+1} + (1-\alpha)\omega_j(p^t)\Delta m_j^{t+1}). \quad (13)$$

Пусть E^s — s-мерное евклидово пространство; E_+^s — его неотрицательный ортант, $Z = \left\{ z \in E_+^K : \sum_{j \in I(i)} z_j > 0 \ \forall i \right\}$, $\Omega = \{z \in Z$: для каждого i ровно одна компонента $z_j = 1$, $j \in I(i)$, остальные — нули$\}$.

Положим $A_i(z) = \sum_{j \in I(i)} A_j z_j \Big/ \sum_{j \in I(i)} z_j$ и аналогично определим $l_i(z)$, $z \in Z$. Если z_j — интенсивности использования, а Δm_j — объемы простаивающих мощностей, то состав фондов отрасли

$$B_i(z, \Delta m) = \left(\sum_{j \in I(i)} B_j (z_j + (1-\alpha)\Delta m_j) \right) \Big/ \sum_{j \in I(i)} z_j.$$

Положим также $S_i(z, \Delta m) = A_i(z) + RB_i(z, \Delta m)$, $B_i(z) = B_i(z, 0)$ и аналогично $S_i(z)$. Определим матрицы $S(z) = (S_1(z), \dots, S_n(z))$, а также $S(z, \Delta m)$, $A(z)$ и т. д. Пусть $S^t = S(y^t + u^t + z^t, \Delta m^{t+1})$, $l^t = l(y^t + u^t + z^t)$. Тогда из (13)

$$p^{t+1} = p^t S^t + l^t. \quad (14)$$

Соотношения (3) — (14), описывающие планирование, динамику мощностей и ценообразование, задают преобразование, переводящее кортеж $(M^t, m^t, p^t, c^t, c^{t+1})$ в кортеж $(M^{t+1}, m^{t+1}, p^{t+1})$.

При заданных p^0, M^0, m^0 и $\{c^t\}$ это преобразование порождает последовательность $\{M^t, m^t, p^t\}$, формирование которой назовем процессом 1.

4. Нам понадобятся следующие предположения.

Предположение Г.1. Все матрицы $S(z)$, $z \in \Omega$, продуктивны.

Предположение Г.2. Последовательность $\{c^t\}$ такова, что при заданных m^0, M^0 и p^0: 1) $x^{t+1} > x^t$ $\forall t$ (рост валового выпуска);

2) $\Delta x_i^t \leqslant \sum_{j \in I(i)} r_j^t t \forall i$,

3) $\beta \sum_{j \in I(i)} m_j^0 \leqslant x_i^0 \leqslant \sum_{j \in I(i)} m_j^0 \forall i$

(условия 2) и 3) необходимы и достаточны для разрешимости пары задач П.1 $\forall t$; иногда вместо условия 1) будем использовать более сильное предположение);

4) $\exists \lambda > 0$: $x^{t+1} > (1+\lambda) x^t$ $\forall t$.

Вектор σ^t с компонентами $\sigma_j^t = m_j^t / x_i^t$, $j \in I(i)$ $\forall i$, называется производственной структурой года t. Процесс 1 называется квазистационарным, если

$$r_j^t \geqslant m_j^t \frac{\Delta x_i^t}{x_i^t}, \quad j \in I(i) \ \forall i, t. \quad (15)$$

Условия (15) гарантируют возможность сохранения производственной структуры при переходе от t к $t+1$.

Предположение Г.3. Процесс 1 квазистационарен.

Пусть $\|x\|_1$ — l_1-норма вектора $x \in E^n$, т. е. $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$. Согласованная с ней норма неотрицательной матрицы $\|S\| = \max_j \sum_{i=1}^{n} s_{ij}$. В свою очередь в $(E^n)^*$ с ней согласована норма l_∞, т. е. $\|p\|_\infty = \max_i |p_i|$ для $p \in (E^n)^*$.

Предположение Г.4. Матрицы $A+B\Lambda(t)$ неотрицательны и $\|A+B\Lambda(t)\| \leqslant \rho_0 < 1$ $\forall t$.

Элементы затрат $s_{ij} = a_{ij} + Rb_{ij}$ можно измерять, например, в денежной форме в некоторой базисной системе цен. Если элементы S измерены в базисных ценах, то переход к новым базисным ценам $p > 0$ порождает преобразование матрицы затрат $S'(z) = PS(z)P^{-1}$ $\forall z \in \Omega$, где P — диагональная матрица с элементами $p_1, \ldots, p_n$. Заметим, что при выборе новых измерителей преобразуются не только коэффициенты затрат, но и цены, а также трудоемкости и объемы выпусков

$$l'(z) = l(z)P^{-1}, \quad p'^t = p^t P^{-1}, \quad z_j' = p_i z_j \quad \forall j \in I(i) \ \forall i.$$

Лемма 1. *В условиях* Г.1 *существует* $p > 0$ *такой, что*

$$\|PS(z)P^{-1}\| \leqslant \rho_1 < 1 \quad \forall \bar{z} \in Z. \tag{16}$$

Доказательство. Для двойственной пары систем

$$p \geqslant 0, \ p(I-S) \geqslant 0 \quad \text{и} \quad z \geqslant 0, \ (I-S)z \leqslant 0$$

существует решение либо первой системы $\bar{p} \geqslant 0$ такое, что $\bar{p}(I-S) > 0$, либо второй $\bar{z} \geqslant 0$ [7, с. 135]. В первом случае $\bar{p}(E - S(\omega)) > 0$ $\forall \omega \in \Omega$ и поскольку $(E - S(\omega))^{-1} \geqslant 0$, то $\bar{p} > 0$. Положим $\rho_j = \bar{p}_i - \bar{p}S_j$, $j \in I(i)$. Так как $\rho_j > 0$, то

$$\| PS(\omega)P^{-1} \| = \max_{j \in I(i) \, \forall i} \frac{1}{\bar{p}_i} \bar{p} S_j = \max \left(1 - \frac{\rho_j}{\bar{p}_i}\right) \equiv \rho < 1,$$

т. е. (16) справедливо.

Второй случай невозможен. Предположим, от противного, он имеет место, тогда $\bar{z} \geqslant 0$ и

$$0 \geqslant (I-S)\bar{z} = \sum_{i=1}^{n} \Bigg(e_i - \sum_{j \in I(i)} \frac{\bar{z}_j}{\sum_{j \in I(i)} \bar{z}_j} S_j \Bigg) \sum_{j \in I(i)} \bar{z}_j = (E - S)(\bar{z}))z^0,$$

где $z^0 = \left(\sum_{j \in I(i)} \bar{z}_j\right) \in E_+^n$ (e_i — единичный вектор с единицей на i-м месте).

Если $S(\bar{z})$ продуктивна, то последнее неравенство невозможно, так как $z^0 \neq 0$ и $(E - S(\bar{z}))^{-1} \geqslant 0$. Установим продуктивность $S(\alpha) = \left(\sum_{j \in I(i)} \alpha_{ij} S_j\right)$, $\alpha_{ij} \geqslant 0$, $\sum_{j \in I(i)} \alpha_{ij} = 1$ $\forall i$. Доказательство проводится за n однотипных шагов. Опишем один из них. Пусть продуктивны матрицы $S(j) = (S_j, S_2', \ldots$

$\ldots, S_n')$, $j\in I(1)$, а S_k' равно либо S_j, $j\in I(k)$, либо $\sum_{j\in I(k)} \alpha_{kj}S_j$. Тогда $S(\alpha_1)=(S_1',\ldots,S_n')$, где $S_1'=\sum_{j\in I(1)}\alpha_{1j}S_j$ также продуктивна. Действительно, пусть $z(j)$ — решение системы $(E-S(j))z=c>0$; так как $z(j)>0\ \forall j$, то

$$e_1-\sum_{j\in I(1)}\alpha_{1j}S_j+\sum_{i=2}^{n}(e_i-S_i')\sum_{j\in I(i)}\alpha_{1j}\frac{z_{ij}}{z_1(j)}=\sum_{j\in I(1)}\frac{\alpha_{1j}}{z_1(j)}c=c(\alpha_1),$$

т. е. система $(E-S(\alpha_1))z=c(\alpha_1)>0$ имеет положительное решение. Лемма доказана.

Таким образом, не уменьшая общности в силу Г.1, будем считать в дальнейшем, что $\|S_j\|\leqslant\rho_1<1$, $j=1,\ldots,K$.

Назовем $f_i^t=\sum_{j\in I(i)}(y_j^t+u_j^t)\Big/\sum_{j\in I(i)}M_j^t$ коэффициентом использования мощностей. Этот коэффициент не должен быть слишком низким: если постоянно простаивает существенная часть наличных мощностей, процесс производства может стать непродуктивным при фиксированном значении норматива R, причем цены будут расти. Невозможность обеспечения уровня рентабельности R означает, что норматив R должен быть снижен.

Предположение Г.5. $f_i^t>1/(1+a)\ \forall i,t$, где $a=(1-\rho_1)/(1-\alpha)\rho_2$, $\rho_2=\max_j R\|B_j\|$.

Из Г.1 и Г.5 следует, что $\|S^t\|<\rho<1$. Действительно, по определению

$$S_i^t=\frac{1}{x_i^{t+1}}\sum_{j\in I(i)}((y_j^t+u_j^t+z_j^t)S_j+(1-\alpha)\Delta m_j^{t+1}RB_j),$$

т. е.

$$\|S_i^t\|\leqslant\rho_1+(1-\alpha)\rho_2\sum_{j\in I(i)}\Delta m_j^{t+1}/x_i^{t+1}.$$

Но последний сомножитель равен $1/f_i^t-1<a$. Чтобы прокомментировать ограничение, налагаемое на модель условием Г.5, заметим, что при $\rho_1=0{,}95$, $\rho_2=0{,}5$ и $\alpha=0$ коэффициент использования должен быть не меньше 0,91.

Решение задач П.1 сводится к упорядочению способов по величине затрат. В (3) и (4) это упорядочение сквозное. Каждый способ представлен дважды: затратами w_j и $w_j+\alpha\omega_j$. Лексикографически упорядоченным называется решение (3), (4), удовлетворяющее условиям: при равных затратах сначала загружаются действующие мощности, затем простаивающие (например, $w_j=w_k+\alpha\omega_k$, $u_k>0\Rightarrow y_j=m_j$ и т. п.); при равных затратах сначала используется способ с меньшим номером ($w_j=w_k$, $j<k$, $y_k>0\Rightarrow y_j=m_j$). Аналогично определяется лексикографически упорядоченное решение (5), (6).

Утверждение 1. *Лексикографически упорядоченные решения* (3), (4) *и* (5), (6) *монотонны по x и Δx соответственно. Если $z(p,\Delta x)$ — лексикографически упорядоченное решение, то в условиях* Г.4, Г.2.2 *система* (7) *разрешима, процесс* (8) *приводит к ее решению со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем ρ_0.*

Доказательство. Первая часть утверждения очевидна. Из нее и (8)

$$\Delta x^{(s+1)} \geqslant \Delta x^{(s)} \Rightarrow z(p, \Delta x^{(s+1)}) \geqslant z(p, \Delta x^{(s)}),$$

т. е. $\Delta x^{(s+2)} \geqslant \Delta x^{(s+1)}$. Так как $\Delta x^{(1)} \geqslant \Delta x^{(0)}$, то $\Delta x^{(s)}$ монотонно возрастает по s. Из (8), (6) и Г.4 вытекает, что $\|\Delta x^{(s+1)}\| \leqslant \|\Delta c\| + \rho_0 \|\Delta x^{(s)}\|$, т. е. $\|\Delta x^{(s)}\| \leqslant (1/(1-\rho_0)) \|\Delta c\|$ и $\Delta x^{(s)} \to \Delta x(p, \Delta c)$, т. е. к решению (7). Из (7), (8) и монотонности $\Delta x^{(s)}$ следует, что

$$\|\Delta x(p, \Delta c) - \Delta x^{(s+1)}\| \leqslant \rho_0 \|\Delta x(p, \Delta c) - \Delta x^{(s)}\|.$$

Утверждение доказано.

Лемма 2. *Если в процессе 1 выполняется условие*

$$p^t S^t + l^t \leqslant p^t S^{t-1} + l^{t-1} \quad \forall t \tag{17}$$

и справедливы Г.1, Г.5, *то последовательность* p^t *сходится к некоторому* $\bar{p}$, *т. е. если переход от плана* $t-1$ *к плану* t *не приводит к росту средних затрат, подсчитанных в ценах* p^t, *то последовательность цен устойчива.*

Доказательство. Так как $p^{t+1} = p^t S^t + l^t$, то из (17) следует, что $p^{t+1} - p^t \leqslant (p^t - p^{t-1}) S^{t-1}$. Отсюда и из $S^t \geqslant 0$ вытекает, что $p^{t+1} - p^t \leqslant \leqslant (p^1 - p^0) S^1 \ldots S^{t-1}$. Любой элемент матрицы $S^1 \ldots S^{t-1}$ неотрицателен и не превосходит ρ^{t-1}, поскольку $\|S^t\| < \rho$. Следовательно, $p^{t+1} - p^t \leqslant a_1 \rho^t e$, где $e = (1, \ldots, 1) \in (E^n)^*$, a_1 — константа, не зависящая от t. Складывая T последовательных неравенств, получим $p^{t+T} - p^t \leqslant a_2 \rho^t e \ \forall T \geqslant 1$. Здесь a_2 не зависит от t, T, например $a_2 = a_1/(1-\rho)$. Предположим теперь от противного, что последовательность p^t не сходится. Она ограничена, так как $0 \leqslant p^{t+T} \leqslant \leqslant p^t + a_2 \rho^t e \ \forall T$ и некоторого t. Пусть $p' \neq p''$ — ее предельные точки, $p_i' = = p_i'' + \gamma$, $\gamma > 0$. Найдется такое t_0, что $\|p^{t_0} - p''\| < \gamma/3$, $a_2 \rho^{t_0} < \gamma/3$. Тогда $p_i^{t_0+T} \leqslant p_i^{t_0} + a_2 \rho^{t_0} \leqslant p_i'' + \dfrac{2}{3}\gamma \ \forall T$, что противоречит предположению о том, что p' — предельная точка. Лемма доказана.

Утверждение 2. *Пусть справедливы* Г.1 – Г.3 (*без* Г.2.4) и Г.5. *Тогда в процессе* 1 *выполняется* (17), *т. е.* $p^t \to p$.

Доказательство. Из (13), (10) и определения S^t и v_j следует

$$p_i^{t+1} = p^t S_i^t + l_i^t = \frac{1}{x_i^{t+1}} \sum_{j \in I(i)} (v_j(p^t)(y_j^t + u_j^t + z_j^t) + (1-\alpha)\omega_j(p^t)\Delta m_j^{t+1}), \tag{18}$$

$$p^t S_i^{t-1} + l_i^{t-1} = \frac{1}{x_i^t} \sum_{j \in I(i)} (v_j(p^t)(y_j^{t-1} + u_j^{t-1} + z_j^{t-1}) + (1-\alpha)\omega_j(p^t)\Delta m_j^t). \tag{19}$$

Воспользовавшись (11), из (18) получим

$$p_i^{t+1} = \frac{1}{x_i^{t+1}} \sum_{j \in I(i)} (w_j(p^t) y_j^t + (w_j(p^t) + \alpha\omega_j(p^t)) u_j^t + v_j(p^t) z_j^t +$$

$$+ \omega_j(p^t) m_j^t - \alpha\omega_j(p^t)(m_j^t - y_j^t) + (1-\alpha)\omega_j(p^t)\Delta m_j^t).$$

Наряду с решениями П.1 рассмотрим планы $y_j(1) = m_j^t$, $u_j(1) = 0$ задачи (3), (4) и $z_j(1) = m_j^t \Delta x_i^t / x_i^t$ задачи (5), (6). Так как при переходе от решений к этим планам значения критериев (3) и (5) не возрастают, то

$$p_i^{t+1} \leqslant \frac{1}{x_i^{t+1}} \sum_{j \in I(i)} \left(v_j(p^t) m_j^t + (1-\alpha)\omega_j(p^t)\Delta m_j^t + \frac{\Delta x_i^t}{x_i^t} v_j(p^t) m_j^t \right).$$

Отсюда с учетом (19) и (10), (13) и (14) получим

$$p_i^{t+1} \leqslant \frac{x_i^t}{x_i^{t+1}}(p^t S_i^{t-1} + l_i^{t-1}) + \frac{x_i^{t+1} - x_i^t}{x_i^t} \sum_{j \in I(i)} v_j(p^t) m_j^t \leqslant p^t S_i^{t-1} + l_i^{t-1}. \quad (20)$$

Утверждение доказано.

Предположим, что приведенные капитальные вложения ограничены снизу, т. е.

$$\omega_j(\bar{p}) \geqslant \gamma > 0 \quad \forall j. \quad (21)$$

Утверждение 3. *Пусть выполняются* Г.1—Г.3 *и* Г.5. *Если справедливо* (21), *то коэффициенты использования мощностей* $f_i^t \to 1$ *при* $t \to \infty$ $\forall i$.

Доказательство. Поскольку $\{S^t\}$ и $\{l^t\}$ — ограниченные последовательности, можно выбрать $\{t_k\}$ так, чтобы $S^{t_k-1} \to \bar{S}$ и $l^{t_k-1} \to \bar{l}$ при $k \to \infty$. Так как $p^t \to \bar{p}$, то

$$p^{t_{k+1}} = p^{t_k} S^{t_k} + l^{t_k} \leqslant p^{t_k} S^{t_k-1} + l^{t_k-1} \to \bar{p}\bar{S} + \bar{l} = \bar{p}.$$

В силу Г.2.4 $\Delta x_i^t / x_i^t \geqslant \lambda > 0$, поэтому из (20) следует $(1/x_i^t) \sum_{j \in I(i)} v_j(p^t) \times m_j^t \to \bar{p}_i$. Отсюда и из (19) вытекает $((1-\alpha)/x_i^t) \sum_{j \in I(i)} \omega_j(p^t) \Delta m_j^t \to 0$, т. е. $(1/x_i^t) \sum_{j \in I(i)} \Delta m_j^t \to 0$ согласно (21). Так как последнее выражение равно $(1/f_i^t) - 1$, то утверждение доказано.

Назовем величину $(\|\bar{z}^t - z^t\|)/\|z^t\|$ относительной ошибкой прогноза.

Утверждение 4. *Пусть выполняются* Г.1—Г.5, *а также* (21). *Если* $\|c^t\| \geqslant \|\Delta c^t\|$ *для всех* t, *и относительная ошибка прогноза стремится к нулю, то* $\|c^t - c_\Phi^t\| / \|c^t\| \to 0$, *т. е. относительное суммарное отклонение фактически произведенной продукции непроизводственного назначения от плановой с течением времени стремится к нулю.*

Доказательство. Поскольку $x^t = c^t + Am^t + B\bar{z}^t$ и, кроме этого,

$$x^t = c_\Phi^t + A(y^t + u^t) + Bz^t,$$

то $c_\Phi^t - c^t = A(m^t - y^t - u^t) + B(\bar{z}^t - z^t)$, т. е. $d^t \| c_\Phi^t - c^t \| \leqslant d^t \| A \| \times \sum_{j=1}^{K} | m_j^t - y_j^t - u_j^t | + d^t \| B \| \sum_{j=1}^{K} | \bar{z}_j^t - z_j^t |$, где $d^t = 1 \Big/ \sum_{j=1}^{K} M_j^t$. В силу утверждения 3 $d^t \sum_{j=1}^{K} (m_j^t + \Delta m_j^t - y_j^t - u_j^t) \to 0$. Отсюда с учетом (4) $d^t (m_j^t - y_j^t) \to 0$, $d^t (\Delta m_j^t - u_j^t) \to 0$ $\forall j$. Так как $\sum_{j=1}^{K} M_j^t \geqslant \sum_{i=1}^{n} x_i^t$, то снова используя утверждение 3, получим $d^t \sum_{j=1}^{K} \Delta m_j^t \to 0$ и $d^t \sum_{j=1}^{K} u_j^t \to 0$. Таким образом, для завершения доказательства достаточно показать, что $\exists \lambda_1 < \infty$, $\lambda_2 > 0$, T такие, что: 1) $d^t \|z^t\| < \lambda_1$, 2) $d^t \|c^t\| > \lambda_2 \forall t > T$.

Из (21), Г.4 и неотрицательности матриц A, $\Lambda(t)$ следует $\|\Lambda(t)\| \|B\| \leqslant \|A + B\Lambda(t)\| \leqslant \rho_0$. Поэтому $\|\bar{z}^{t+1}\| \leqslant \|E + \Lambda(t)\| \|z^t\| \leqslant \lambda_3 \|z^t\|$, где $\lambda_3 > 1 + \rho_0 / \|B\|$.

Положим $\varepsilon(t) = 1 - \|\bar{z}^t\| / \|z^t\|$. Тогда $\|z^t\| \leqslant \lambda_3 \|z^{t-1}\| + \varepsilon(t) \|z^t\|$ и $\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i^t \leqslant$

$\leqslant (\lambda_3/(1-\varepsilon(t))) \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta x_i^{t-1}$, $t > T$. Отсюда $\sum\limits_{i=1}^{n} \Delta x_i{}^t \leqslant (\lambda_3/(1-\varepsilon(t))) \sum\limits_{i=1}^{n} x_i{}^t$.

Далее, $d^t \| z^t \| = d^t \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta x_i{}^t \leqslant \lambda_3/(1-\varepsilon(t)) < 2\lambda_3 = \lambda_1$ при $t > T$, поскольку $\varepsilon(t) \to 0$ вследствие стремления к нулю относительной ошибки прогноза.

Из утверждения 3 $d^t \sum\limits_{i=1}^{n} x_i{}^t \to 1$, т.е. $d^t \|c^t\| \geqslant (1-\varepsilon) \left(\|c^t\| \Big/ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i{}^t\right)$ при $t > T(\varepsilon)$, $0 < \varepsilon < 1$. В свою очередь $\|c^t\| \Big/ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i{}^t \geqslant \lambda \| c^t \| \Big/ \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta x_i{}^t \geqslant$

$\geqslant \lambda \| \Delta c^t \| \Big/ \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta x_i{}^t \geqslant \lambda (1-\rho_0)$. Первое неравенство выполняется в силу Г.2.4, последнее вытекает из Г.4 и (7). Таким образом $d^t \| c^t \| > \lambda (1-\varepsilon) \times \times (1-\rho_0)$ при $t > T(\varepsilon)$. Утверждение доказано.

5. Пусть $\theta = \{t_1, t_2, \ldots\}$ — такая подпоследовательность, что $z_j{}^{t_k}/\Delta x_i{}^{t_k} \to \to z_j(\theta)$, $r_j{}^{t_k}/\Delta x_i{}^{t_k} \to r_j(\theta)$, причем, быть может, некоторые $r_j(\theta) = \infty$, $j \in I(i)$, $i = 1, \ldots, n$. Пусть Θ — множество подобных подпоследовательностей. Обозначим через $Z_i(\theta) = \{z : 0 \leqslant z_j \leqslant r_j(\theta), \sum\limits_{j \in I(i)} z_j = 1\}$ и $Z_i(\bar{p}) = \cup_{\theta \in \Theta} Z_i(\theta)$.

Рассмотрим семейство задач

$$\sum_{j \in I(i)} v_j(\bar{p}) z_j \to \min \text{ при условиях } z \in Z_i(\theta),\ i = 1, \ldots, n, \tag{22}$$

где $\theta \in \Theta$.

Лемма 3. *Пусть выполнены условия утверждения 3. Тогда:* 1) $z(i, \theta) = (z_j(\theta), j \in I(i))$ — *решение* (22),

$$2) \quad \min_{z \in Z_i(\theta)} \sum_{j \in I(i)} v_j(\bar{p}) z_j = \bar{p}_i. \tag{23}$$

Доказательство. 1. Очевидно $z(i, \theta) \in Z_i(\theta)$. Пусть $z(i)$ — решение (22). Если $\sum\limits_{j \in I(i)} \bar{z}_j(i) = \sum\limits_{j \in I(i)} r_j(\theta)$, то $\bar{z}(i) = z(i, \theta)$. В остальных случаях $\sum\limits_{j \in I(i)} \bar{z}_j(i) < \sum\limits_{j \in I(i)} r_j(\theta)$ и существует последовательность $\{\bar{z}^{t_k}\}$ такая, что

$$\bar{z}^{t_k} \to \bar{z}(i), \quad \sum_{j \in I(i)} \bar{z}_j{}^{t_k} = 1, \quad \bar{z}_j{}^{t_k} \leqslant r_j{}^{t_k}/\Delta x_i{}^{t_k}.$$

Так как

$$1/\Delta x_i{}^{t_k} \sum_{j \in I(i)} v_j(p^{t_k}) z_j{}^{t_k} \leqslant \sum_{j \in I(i)} v_j(p^{t_k}) \bar{z}_j{}^{t_k},$$

функции $v_j(p)$ непрерывны, то $z(i, \theta)$ — решение (22).

2. Из (18) и утверждения 3 следует

$$p_i^{t+1} = \frac{x_i^t}{x_i^{t+1}} \frac{\sum\limits_{j\in I(i)} v_j(p^t) m_j^t}{x_i^t} + \frac{\Delta x_i^t}{x_i^{t+1}} \frac{\sum\limits_{j\in I(i)} v_j(p^t) z_j^t}{\Delta x_i^t} + \varepsilon_i(t), \quad \varepsilon_i(t) \to 0,$$

при $t\to\infty$. Как было установлено в доказательстве утверждения 3, второй сомножитель первого слагаемого стремится к $\bar{p}_i$, т.е. $(1/\Delta x_i^t) \sum\limits_{j\in I(i)} v_j(p^t) z_j^t \to \bar{p}_i$ согласно Г.2.4. Отсюда сразу вытекает $\sum\limits_{j\in I(i)} v_j(\bar{p}) z_j(\theta) = \bar{p}_i$ для всех $z(i, \theta)$. Таким образом, $\min\limits_{z\in Z_i(\theta)} \sum\limits_{j\in I(i)} v_j(\bar{p}) z_j = \bar{p}_i$ $\forall \theta\in\Theta$, т. е. выполняется (23). Лемма доказана.

Все полученные выше результаты, очевидно, останутся в силе, если вместо процесса 1 рассматривать процесс планирования не по конечному продукту, а по валовому. В таком процессе, назовем его процессом 2, исходной является последовательность заданий по приросту валовых выпусков $\{\Delta x^t\}$, а соотношения (7) и (8) опускаются.

Утверждение 5. *Пусть заданы последовательности* $\{r^t\}$ *и* $\{\Delta x^t\}$ *и выполняются условия леммы* 3. *Тогда цены* $\bar{p}$ *определены однозначно.*

Доказательство. Предположим от противного, что $p(1) \neq p(2)$ — пределы последовательностей цен в двух реализациях процесса 2 с различными значениями α, β, m^0, Δm^0 и p^0. Обозначим через $\theta(\xi)$, $\xi = 1, 2$, множества подпоследовательностей, для которых сходятся $r_j^{t_k}/\Delta x_i^{t_k}$ и $z_j^{t_k}(\xi)/\Delta x_i^{t_k}$, $j\in I(i)$ для ξ-й реализации процесса 2. Здесь $z^t(\xi)$ — решение (5), (6) при ξ-й реализации процесса. Пусть $\theta(1)\in\Theta(1)$. Очевидно, $\exists \theta \subset \theta(1)$, т. е. подпоследовательность из $\theta(1)$ такая, что $\theta\in\Theta(2)$. Так как $r(\theta) = r(\theta(1))$, то, в силу определения, $Z_i(\theta) = Z_i(\theta(1))$ $\forall i$. Таким образом, $Z_i(p(1)) \subset Z_i(p(2))$ $\forall i$. Поскольку обратное также верно, $Z_i(p(1)) = Z_i(p(2))$. Отсюда и из (23) следует $\sum\limits_{j\in I(i)} v_j(1) z_j(1) = p_i(1) \leqslant \sum\limits_{j\in I(i)} v_j(1) z_j(2)$, где $v_j(\xi) = v_j(p(\xi))$. Аналогично $\sum\limits_{j\in I(i)} v_j(2) z_j(2) = p_i(2) \leqslant \sum\limits_{j\in I(i)} v_j(2) z_j(1)$. Так как $v_j(\xi) = p(\xi) S_j + l_j$, то, полагая $S_i(\xi) = \sum\limits_{j\in I(i)} z_j(\xi) S_j$ и $S(\xi) = (S_1(\xi), \ldots, S_n(\xi))$, после простых преобразований получим $(p(1) - p(2)) S(1) \leqslant p(1) - p(2) \leqslant (p(1) - p(2)) S(2)$. Поскольку $\sum\limits_{j\in I(i)} z_j(\xi) = 1$, то $\|S(\xi)\| \leqslant \rho < 1$, т. е. матрицы $E - S(\xi)$ неотрицательно обратимы. Отсюда $p(1) = p(2)$. Утверждение доказано.

Для упрощения обозначений будем считать далее, что способы отрасли i перенумерованы в порядке возрастания величины $v_j(\bar{p})$, т. е. $v_1(\bar{p}) \leqslant v_2(p)$, и т. д. Эти номера, так же как и вводимые ниже множества $I_0, I_1, \ldots$, зависят от номера отрасли i. Будем иногда для простоты опускать аргумент i. Положим

$$v(i, p, \theta) = \max_{k\in I(i): z_k(\theta)>0} v_k(p), \quad v(i, p) = \min_{\theta\in\Theta} v(i, p, \theta), \quad p\in (E^n)_+.$$

Последнее определение корректно, так как $v(i, p, \theta)$ при любом фиксированном p может принимать лишь конечное число значений. Факторизуем множество способов отрасли, объединяя в один способы j, для которых $v_j(\bar{p}) = v(i, \bar{p})$. Их множество обозначим через I_0 и положим $r_0{}^t = \sum_{j \in I_0} r_j{}^t$ и т. п. Пусть $k \in I_0$ — минимальный номер из I_0.

Утверждение 6. *Пусть справедливы* Г.1—Г.5. *Тогда годовая производственная (факторизованная) структура отрасли* σ^t *стабилизируется, причем начиная с некоторого* T, $\sigma_j{}^t \uparrow \sigma_j$, $j<k$, $\sigma_0{}^t \uparrow \sigma_0$, $\sigma_0 + \sum_{j=1}^{k-1} \sigma_j = 1$.

Доказательство. Пусть $I_1 = \{j \in I(i) : v_j(\bar{p}) = v_1(\bar{p})\}$. Факторизуем способы множества I_1. Очевидно, $\exists T_0 > 0$ такое, что $v_1(p^t) < v_j(p^t)$ для всех $t > T_0$ и $j \notin I_1$. Положим $\bar{\sigma}_1{}^t = \sum_{j \in I_1} \sigma_j{}^t$, $\bar{r}_1{}^t = \sum_{j \in I_1} r_j{}^t / \Delta x_i{}^t$. Для $t > T_0$ выполняется равенство $\bar{z}_1{}^t \equiv \sum_{j \in I_1} z_j{}^t = \min\{1, \bar{r}_1{}^t\} \Delta x_i{}^t$. Учитывая Г.3 и Г.2, получим отсюда $\bar{\sigma}_1^{t+1} \geqslant \bar{\sigma}_1{}^t$. Так как $\sigma_1{}^t \leqslant 1$, то $\bar{\sigma}_1{}^t \uparrow \bar{\sigma}_1$. Если $\bar{\sigma}_1 = 1$, то $v(i, \bar{p}) = v_1(\bar{p})$, т. е. $1 \in I_0$. Доказательство закончено, $\sigma_0 = \bar{\sigma}_1$. Пусть теперь $I_1 \neq I_0$. Тогда $\bar{\sigma}_1 < 1$ и $\exists \varepsilon > 0$ такое, что

$$\bar{r}_1{}^t < \bar{\sigma}_1 + \varepsilon < 1 \text{ для } t \geqslant T_1(\varepsilon). \tag{24}$$

Действительно, пусть $T_1 > T_0$, $T_1(\varepsilon)$ таково, что $\bar{\sigma}_1{}^t > \bar{\sigma}_1 - \varepsilon\lambda/2$, $\bar{r}_1{}^t = \bar{\sigma}_1 + \varepsilon$ для некоторого $t > T_1$ (λ определено в Г.2.4). Тогда

$$\bar{\sigma}_1{}^{t+1} = \frac{\overline{m}_1{}^{t+1}}{x_i^{t+1}} = \frac{\overline{m}_1{}^t + \bar{r}_1{}^t \Delta x_i{}^t}{x_i{}^t + \Delta x_i{}^t} \geqslant \frac{\left(\bar{\sigma}_1 - \dfrac{\varepsilon\lambda}{2}\right) x_i{}^t + (\bar{\sigma}_1 + \varepsilon)\lambda x_i{}^t}{(1+\lambda) x_i{}^t} > \bar{\sigma}_1.$$

Это противоречие доказывает (24). Поскольку $\bar{r}_1{}^t < 1$ $\forall t > T_1$, то $z_j{}^t = r_j{}^t$, $j \in I_1$. Снова учитывая Г.3, получим $\sigma_j{}^t \uparrow \sigma_j$ при $t > T_1$, $j \in I_1$. Построим теперь I_2. Если $s-1$ — максимальный номер в I_1, то $I_2 = \{j \in I(i) : v_j(\bar{p}) = v_s(\bar{p})\}$. Дословно повторяя рассуждения, имеем $\bar{\sigma}_2{}^t \uparrow \bar{\sigma}_2$ при $t > T_2 \geqslant T_1$ и либо $\bar{\sigma}_2 = 1 - \bar{\sigma}_1$ (тогда $I_2 = I_0$), либо $\bar{\sigma}_2 < 1 - \bar{\sigma}_1$ (тогда $\sigma_j{}^t \uparrow \sigma_j$, $j \in I_2$). Конечное число повторений подобных шагов завершает доказательство.

Следствие 1. $r_j(\theta) = r_j$ $\forall_j < k$,

$$\sum_{j \in I_0} r_j(\theta) \geqslant 1 - \sum_{j=1}^{k-1} r_j \quad \forall \theta \in \Theta.$$

Доказательство. Так же как при доказательстве (24), устанавливается $\sigma_j - \varepsilon < r_j{}^t / \Delta x_i{}^t < \sigma_j + \varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$ и $t > T_j(\varepsilon)$. Аналогично доказывается и справедливость оценки снизу для $\sum_{j \in I_0} r_j(\theta)$.

6. Перейдем к изучению структуры вновь вводимых мощностей. Рассмотрим задачу

$$\begin{gathered} lz \to \min \text{ при } Iz - Az \geqslant \Delta c^t + B\Delta z^t, \\ 0 \leqslant z \leqslant r^t, \quad \bar{p}Bz \leqslant \bar{p}Bz^t. \end{gathered} \tag{25}$$

и дополнительных условиях

$$Iz \geqslant \Delta x^t. \tag{26}$$

Это — задача (назовем ее П.2) централизованного планирования капитального строительства, обеспечивающего заданный прирост конечного продукта при минимуме затрат труда. Она включает ограничения на капитальные вложения в размере, соответствующем плану (6)—(7), а также условия (26) на объемы вводимых мощностей. Прирост конечного продукта складывается из заданного прироста непроизводственного потребления Δc^t и прироста инвестиций $B\Delta z^t$, где либо $\Delta z^t = \bar{z}^{t+1} - z^t$, т. е. прирост определен планом (6)—(7), либо $\Delta z^t = \Lambda(t) z$, где $\Lambda(t)$ — диагональная матрица, $\lambda_{jj}(t) = \lambda(t)$ $\forall j$. Отметим, что капитальные вложения измеряются в ценах $\bar{p}$.

Будем говорить, что структура вновь вводимых мощностей z^t слабо оптимальна при лимите капитальных вложений $\bar{p}Bz^t$, если z^t — решение П.2. Она оптимальна, если z^t — решение (25).

Утверждение 7. *Пусть выполняются условия* Г.1—Г.5, *а также* $\lambda(t) < R$. *В процессе* 1 z^t — *решение* П.2 *для всех достаточно больших* t.

Доказательство. Покажем сначала, что z^t — план П.2. Так как $Iz^t = \Delta x^t$ согласно (6), то первая группа ограничений (25) следует из (7). Из (6) вытекает также $0 \leqslant z^t \leqslant r^t$. Для доказательства оптимальности плана z^t при t, бо́льших некоторого T, рассмотрим сначала случай $\Delta z^t = \bar{z}^{t+1} - z^t$. Положим

$$v^t(i,p) = \max_{j \in I(i): z^t_j > 0} v_j(p), \qquad j(t,i) = \max_{j \in I(i): z^t_j > 0} j.$$

Поскольку $z_j^t = r_j^t$ при $j < k \in I_0$, то $v^t(i,\bar{p}) \geqslant v(i,\bar{p})$ при $t > T$. Положим далее $\pi_i^t = v^t(i,\bar{p}) - \bar{p}_i$ и $\lambda_j^t = v^t(i,p) - v_j(\bar{p})$ для $j \in I(i)$, $j < j(t,i)$, $\lambda_j^t = 0$ для $j \in I(i)$, $j \geqslant j(t,i)$. Установим теперь, что векторы $(\bar{p}, \lambda^t, R, \pi^t)$ в качестве оценок ограничений П.2 удовлетворяют совместно с z^t соотношениям двойственности. Во-первых, очевидно, $\bar{p} \geqslant 0$, $\lambda^t \geqslant 0$. Далее, в силу (23) $\bar{p}_i \leqslant v(i,\bar{p})$, т. е. $\pi_i^t \geqslant 0$. Во-вторых, для

$$\bar{p}_i - \bar{p}A_j - \lambda_j^t - R\bar{p}B_j + \pi_i^t \begin{cases} = l_j & \text{для } j \leqslant j(t,i), \\ \leqslant l_j & \text{для } j > j(t,i). \end{cases} \tag{27}$$

Для доказательства достаточно заметить, что выражение слева равно $v^t(i,\bar{p}) - \bar{p}S_j - \lambda_j^t$. Поэтому равенства (27) при $j < j(t,i)$ следуют из определения λ_j и $v_j(\bar{p})$, а при $j = j(t,i)$ соответственно $v^t(i,\bar{p}) = \bar{p}S_j + l_j$, $j = j(t,i)$. Неравенства имеют место потому, что $v_j(\bar{p}) \geqslant v^t(i,\bar{p})$ при $j > j(t,i)$, $j \in I(i)$.

В случае $\Delta z^t = \Lambda(t) z$ доказательство аналогично, если в качестве оценки последнего ограничения (25) вместо R принять величину $R - \lambda(t)$. Утверждение доказано.

Тот факт, что z^t — решение П.2, характеризует его оптимизационные свойства. При изучении эквивалентности различных методов составления плана в году t вместо П.2 более естественно рассматривать задачу с ограничениями $p^tBz \leqslant p^tBz^t$, заменяющими последнее ограничение (25). Назовем ее П.3. План z^t не является, вообще говоря, оптимальным для П.3. Будем называть его ε-оптимальным, если

$$\frac{lz^t}{\|\Delta x^t\|} \leqslant \frac{\min\{lz: \text{П.3}\}}{\|\Delta x^t\|} + \varepsilon(t), \qquad \varepsilon(t) \to 0 \text{ при } t \to \infty. \tag{28}$$

Утверждение 8. 1. *Если* $v_{1(i)}(\bar{p}) < v(i,\bar{p})$ *для всех* i, *то* z^t — *оптимальный план* П.3 *для достаточно больших* t, *где* $1(i)$ — *обозначение номера первого способа отрасли* i. 2. *Если* $l > 0$, *то* z^t — ε-*оптимальный план.*

Доказательство. 1. Примем в качестве оценок ограничений П.3

векторы $(p^t, \lambda^t, R, \pi^t)$, где $\lambda_j^t = v^t(i, p^t) - v_j(p^t)$ для $j \in I(i)$, $j < j(t, i)$, $\pi_i^t = v^t(i, p^t) - p_i^t$. Очевидно, $\lambda_j^t \geqslant 0$. Согласно следствию 1 и лемме 3, $\bar{p}_i \leqslant v_{1(i)}(\bar{p}) \sum_{j \in I_1(i)} r_j + v(i, \bar{p}) \left(1 - \sum_{j \in I_1(i)} r_j\right)$ (множество $I_1(i)$ определено в доказательстве утверждения 6), причем $\sum_{j \in I_1(i)} r_j > 0$ $\forall i$. Поэтому найдется $\delta > 0$ такое, что $\bar{p}_i < v(i, \bar{p}) - \delta$. Так как $v^t(i, p^t) \geqslant v(i, p^t)$ для достаточно больших t, а $|v(i, p^t) - v(i, \bar{p})| < \delta/2$ и $|p_i^t - \bar{p}_i| < \delta/2$, то $\pi_i^t \geqslant 0$. Отсюда вытекает, что при замене $\bar{p}$ на p^t соотношения (27) остаются справедливыми.

2. Рассмотрим подпоследовательность моментов времени θ такую, что $\bar{z}^t \equiv z^t / \|\Delta x^t\| \to \xi$, $r^t / \|\Delta x^t\| \to \rho$ (компоненты ρ могут быть равны ∞). Пусть Θ_1 — множество таких подпоследовательностей. Так как $\Delta c^t + B \Delta z^t = I z^t - A z^t$, то $(\Delta c^t + B \Delta z^t) / \|\Delta x^t\| \to d(\theta)$. Положим также $K(\theta) = \bar{p} B \xi$ и $I\xi = \Delta(\theta)$. Рассмотрим задачу, предельную по отношению к П.2

$$l\zeta \to \min \text{ при } I\zeta - A\zeta \geqslant d(\theta), \quad \bar{p} B \zeta \leqslant K(\theta), \quad I\zeta \geqslant \Delta(\theta) \text{ и } 0 \leqslant \zeta \leqslant \rho. \quad (29)$$

Очевидно, ξ — план этой задачи. Обозначим через $k_0(i)$ максимальный номер способа, принадлежащего $I_0(i)$. В силу следствия 1 $z_j^t / \|\Delta x_i^t\| \to 0$ при $j \in I(i)$, $j > k_0(i)$. Поэтому $\xi_j = 0$, $j \in I(i)$, $j > k_0(i)$. Полагая $\pi_i = v(i, \bar{p}) - \bar{p}_i$ и $\lambda_j = v(i, \bar{p}) - v_j(\bar{p})$, $j \in I(i)$, $j \leqslant k_0(i)$, установим, что векторы $(\bar{p}, R, \pi, \lambda)$ — оценки ограничений (29) и выполняются соотношения двойственности (27), т. е. ξ — оптимальный план (29).

Обозначим через $z(t)$ решение П.3 при заданном t с минимальной l_1-нормой, $\bar{z}(t) = z(t) / \|\Delta x^t\|$. Так как $l > 0$ и z^t — план П.3, то $\bar{z}(t)$ ограничены в совокупности. Пусть η — произвольная предельная точка $\bar{z}(t)$ на подпоследовательности θ. Очевидно, η — план (29), т. е. $l\xi \leqslant l\eta$. Отсюда сразу следует, что для $\forall \varepsilon > 0$ и достаточно больших t из θ выполняется цепочка неравенств

$$l\bar{z} \leqslant l\xi + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant l\eta + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant l\bar{z}(t) + \varepsilon. \quad (30)$$

Далее, если (28) неверно, то существуют $\varepsilon > 0$ и подпоследовательность θ_1 такая, что $l\bar{z}^t > l\bar{z}(t) + \varepsilon$ для всех $t \in \theta_1$. Поскольку из θ_1 можно выбрать подпоследовательность θ_2, $\theta_2 \in \Theta_1$ и для θ_2 справедливо (30), получается противоречие. Утверждение доказано.

Еще одна задача планирования капитальных вложений рассматривалась в [8]. Она заключается в минимизации прироста текущих затрат на вновь вводимых мощностях при заданных приросте выпуска и лимите капитальных вложений (предполагается, что наличные мощности полностью используются), т. е. $\sum_{j \in I(i)} w_j(p^t) z_j \to \min$ при условиях $0 \leqslant z_j \leqslant r_j^t$, $\sum_{j \in I(i)} z_j = \Delta x_i^t$, $p^t B z \leqslant K_t \equiv p^t B z^t$. Очевидно, z^t — ε-решение этой задачи, а при $v_{1(i)}(\bar{p}) < v(i, \bar{p})$ $\forall i$, z^t — ее решение для достаточно больших t.

Известно, что при оптимальных ценах среди решений задач А. Л. Лурье и В. В. Новожилова содержатся оптимальные. Как показано выше, при ценообразовании на основе среднеотраслевых затрат решения этих задач оказываются слабо оптимальными.

7. В описанных процессах планирования — ценообразования выбор планов исходя из минимизации приведенных затрат приводит с течением

времени к слабой оптимальности структуры вновь вводимых мощностей. Поэтому возникает проблема совершенствования какого-либо этапа процесса с целью достижения асимптотической оптимальности. Планирование выполняется в соответствии с рекомендациями теории оптимального планирования, и не видно путей его улучшения при неизменности используемой в расчетах информации. Иное дело ценообразование. Согласно этой теории, цены должны строиться на базе предельных (замыкающих) затрат. Эта общая рекомендация оставляет открытым вопрос о том, как и на каком множестве рассчитывать замыкающие затраты. Подсчитывать ли их по всем способам, включенным в план, или только по множеству «новых», зависит от того, как устанавливается доля прибыли в удельных затратах, т. е. от оценки фондов и планируемой рентабельности. Если фонды оцениваются по восстановительной стоимости, то едва ли целесообразно ожидать от устаревших фондов такой же рентабельности, как и от новых. Можно либо удовлетвориться более низкой (но положительной) рентабельностью, либо переоценить устаревшие фонды таким образом, чтобы обеспечить требуемый единый уровень рентабельности. И в том и в другом случае цена определяется замыкающими затратами на множестве вновь вводимых мощностей, стоимость которых оценивается по фактическим затратам.

Реализация принципа ценообразования на основе замыкающих затрат приводит, таким образом, к следующим формулам для расчета цены

$$p_i^{t+1}=\max_{j\in I(i):z_j^t>0} v_j(p^t),\quad i=1,\dots,n\ \forall t. \tag{31}$$

Планирование — ценообразование (3)—(8), (31) назовем процессом 3. Ограничимся для простоты случаем $\beta=1$, т. е. предположением о полном использовании наличных мощностей. Для обоснования сходимости последовательности цен, порождаемой процессом 3, нужна модификация гипотезы о квазистационарности.

Предположение Г.3.1.

$$r_j^t\geqslant z_j^{t-1}\Delta x_i^t/\Delta x_i^{t-1},\quad j\in I(i)\ \forall i,t\geqslant 1.$$

Лемма 4. *В условиях* Г.3.1

$$\max_{j\in I(i):z_j^t>0} v_j(p^t)\leqslant \max_{j\in I(i):z_j^{t-1}>0} v_j(p^t). \tag{32}$$

Доказательство. Предположим от противного, что (32) не имеет места. Пусть снова $j(t,i)$ — номер способа отрасли i, на котором достигается максимум слева в (32). Тогда $v_j(p^t)<v_{j(t,i)}(p^t)$ для $\forall j\in I(i):\ z_j^{t-1}>0$. Согласно Г.3.1, $\{\tilde z_j^t=z_j^{t-1}\Delta x_i^t/\Delta x_i^{t-1},\quad j\in I(i)\}$ — план (5), (6) и, следовательно, либо $\tilde z_j^t=z_j^t$, $j\in I(i)$, т. е. (32) справедливо, либо существует номер $j_0=j_0(t,i)$ такой, что $\tilde z_{j_0}^t>z_{j_0}^t$. В этом случае положим

$$\hat z_j^t=\begin{cases} z_j^t+\alpha(\tilde z_{j_0}^t-z_{j_0}^t), & j=j_0(t,i),\\ z_j^t-\alpha(\tilde z_{j_0}^t-z_{j_0}^t), & j=j(t,i),\\ z_j^t \text{ для остальных } & j\in I(i),\end{cases}$$

где $0\leqslant\alpha\leqslant 1$ выбирается из условия неотрицательности $\hat z^t$. Очевидно, $\hat z^t$ — план (5), (6) и $\sum\limits_{j\in I(i)} v_j(p^t)\hat z_j^t<\sum\limits_{j\in I(i)} v_j(p^t)z_j^t$, что противоречит оптимальности z^t. Лемма доказана.

Утверждение 9. *Если выполняются предположения* Г.1—Г.3.1, *то в процессе* 3 p^t *сходится к некоторому* $\hat{p}$.

Доказательство. Положим $k=j(t-1, i)$. Так как $p_i^{t+1}=v_{j(t,i)}(p^t)$, то $p_i^{t+1}-p_i^t=v_{j(t,i)}(p^t)-v_k(p^{t-1})\leqslant p^tS_k+l_k-(p^{t-1}S_k+l_k)=(p^t-p^{t-1})S_k$. Дальнейшие рассуждения повторяют доказательство леммы 2.

Утверждение 10. *В процессе* 3 *структура вновь вводимых мощностей оптимальна при достаточно больших* t.

Доказательство. Очевидно, z^t — план (25). Заменим в доказательстве утверждения 7 $\bar{p}$ на $\hat{p}$ и заметим, что $v^t(i,\hat{p})=\hat{p}_i$ для достаточно больших t. Действительно, так как $p^t\to\hat{p}$, то, начиная с некоторого t, величина $v^t(i,\hat{p})$ реализуется на способах, входящих в множество I_0, а для них $v_j(\hat{p})=\hat{p}_i$, $j\in I(i)\cap I_0$. Отсюда следует, что $\pi_i^t=0$ для таких t, а (27) остаются справедливыми. Утверждение доказано.

8. Остановимся на важном частном случае, когда все $r_j^t=\infty$. Определим цены p^* условием

$$p^*=p^*S(z^*)+l(z^*)\leqslant p^*S(z)+l(z)\quad \forall z\in\Omega,\quad z^*\in Z. \tag{33}$$

Условия существования и свойства цен p^* изучались в [9]. Там, в частности, показано, что при $r_j^t=\infty$ $\forall j$, t в процессе 3 $p^t\to p^*$. В силу Г.1 цены p^* определены однозначно.

Утверждение 11. *Если справедливы* Г.1, Г.2 *и* Г.5, *то в процессе* 1 $p^t\to p^*$.

Доказательство. Сходимость p^t к $\bar{p}$ следует из утверждения 2, поскольку для $r_j^t=\infty$ условие Г.3 справедливо. Пусть $k=k(i)=j(t,i)$ и $z_k^t=$ $=\Delta x_i^t$. Тогда $p_i^{t+1}\leqslant(x_i^t/x_i^{t+1})(p_iS_i^{t-1}+l_i^{t-1})+(\Delta x_i^t/x_i^{t+1})(p^tS_k+l_k)$. Перейдем в этом неравенстве к пределу, при необходимости по подпоследовательности t_s. Получим $\bar{p}_i\leqslant(1-\alpha_i)\bar{p}_i+\alpha_i(\bar{p}S_k+l_k)$, где $k=k(i)$ — номер способа, на котором достигается отраслевой минимум приведенных затрат при ценах $\bar{p}$, $\alpha_i\geqslant\lambda>0$, согласно Г.2.4. Отсюда следует, что $\bar{p}$ и $\bar{z}\in Z: z_j=0$ при $j\neq k(i)$, $i=1,\ldots,n$, удовлетворяют (33), т. е. $\bar{p}=p^*$. Утверждение доказано.

В заключение еще раз остановимся на интерпретации основных предположений и полученных результатов. Рассматривались взаимосвязанные экономические процессы трех типов: текущего планирования и производства, планирования капитального строительства и ввода новых производственных мощностей, ценообразования. Отраслевые планы строились по критерию минимизации приведенных затрат при заданных объемах выпуска, цены регулярно пересматривались и формировались на основе среднеотраслевых затрат, причем норматив рентабельности был принят равным единому по народному хозяйству нормативу эффективности капитальных вложений. Эти процессы при неизменности технологических возможностей, произвольной динамике структуры и объемов конечного продукта непроизводственного назначения, начальных ценах и отраслевой структуре мощностей приводят с течением времени к стабильным ценам, к полному использованию мощностей, при малых ошибках прогноза будущих инвестиционных потребностей — к практическому совпадению планируемого и фактического непроизводственного потребления, к стабилизации структуры мощностей и ее оптимальности. Последнее означает, что начиная с некоторого момента времени при ограниченных фондах капитальных вложений и дополнительных ограничениях по объемам валовых выпусков строятся такие новые мощности, которые обеспечивают выпуск заданного конечного продукта непроизводственного назначения при минимально возможных затратах труда (и природных ресурсов). Избавиться от дополнительных ограничений, т. е., вообще говоря, снизить необходимые для выполнения планов затраты труда, можно, переходя от ценообразования по среднеотраслевым затратам к формированию цен на базе замыкающих затрат.

Несмотря на определенную степень идеализации описанных моделей, полученные выводы являются доводом в пользу целесообразности практического применения критерия минимизации приведенных затрат и регулярного пересмотра цен.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лившиц В. Н.* Выбор оптимальных решений в технико-экономических расчетах. М.: Экономика, 1971.
2. *Канторович Л. В., Макаров В. Л.* Оптимальные модели перспективного планирования.— В кн.: Применение математики в экономических исследованиях. Т. 3. М.: Мысль, 1965.
3. *Лурье А. Л.* Экономический анализ моделей планирования социалистического хозяйства. М.: Наука, 1973.
4. Основные методические положения оптимизации развития и размещения производства. М.: Наука, 1978.
5. *Немчинов В. С.* Общественная стоимость и плановая цена. М.: Наука, 1970.
6. *Белкин В. Д.* Цены единого уровня и экономические измерения на их основе. М.: Экономиздат, 1963.
7. Линейные неравенства и смежные вопросы. М.: Изд-во иностр. лит., 1959.
8. *Новожилов В. В.* Проблемы измерения затрат и результатов при оптимальном планировании. М.: Экономика, 1967.
9. *Моришима М.* Равновесие, устойчивость, рост. М.: Наука, 1972.

Поступила в редакцию
29 IV 1980