

О ПРИНЦИПЕ СТИМУЛЯЦИИ В АРБИТРАЖНОЙ СХЕМЕ

Ротарь В. И.

(Москва)

Настоящая статья посвящена принципам определения арбитражного решения или арбитражной схемы (АС) в кооперативной игре двух или нескольких лиц, т. е. правила, по которому из множества всевозможных исходов или платежей неантагонистической игры участники (или арбитр) выбирают один «справедливый» исход (или платеж), носящий обычно компромиссный характер. Указанной тематике посвящено большое количество публикаций (см., например, [1], соответствующие разделы в [2, 3], обзорную работу [4], аннотированную библиографию (до 1968 г.) в [5]).

Предлагаемый в данной статье подход к АС основан на следующем. Допустим, что на самом деле рассматриваемая игра содержится в классе игр для одних и тех же участников, причем последние, по крайней мере, теоретически могут переходить от одной игры к другой. Так, переговорное множество может зависеть от первоначальных вложений участников в игру», и они сами решают вопрос о размере своих вложений. Предположим далее, что хотя бы между некоторыми играми этого класса можно установить отношения предпочтения, одинаковые для всех участников, скажем, указать игры, в которых при наличии «доброго согласия между игроками» последним выгоднее всего участвовать. Тогда естественно искать решение каждой игры в форме правила, которое, во-первых, было бы единым для всех игр исследуемого класса, а во-вторых, стимулировало бы участников к переходу к наиболее предпочтительной игре.

Формально высказанные соображения приводят к так называемой аксиоме монотонности, которая требует, чтобы при расширении переговорного множества (например, при увеличении вложений хотя бы одним игроком) новое решение не ухудшало бы положения ни одного из игроков. Вообще говоря, монотонные АС рассматривались и ранее (см., например, [6–11], обзорную работу [12]), но с существенно иных позиций. Одно из отличий подхода настоящей статьи от предшествующих состоит в том, что ниже, формируя АС, мы будем каждый раз рассматривать «не слишком широкий» класс игр и стремиться получать решения, отражающие особенности данного класса. Такой подход, во-первых, обеспечивает непротиворечивость требования монотонности другим естественным требованиям, во-вторых, позволяет в большей степени учитывать априорную информацию, например, о взаимоотношениях игроков. Это касается, в частности, вводимого ниже «принципа максимальной стимуляции».

Отметим, однако, что правило формирования АС будет едино для всех классов, а совокупность всех рассматриваемых игр достаточно богатой.

Подробные комментарии и сравнения с ранее полученными результатами будут приведены в разд. 4.

1. ОСНОВНАЯ СХЕМА

Объектом исследования является точечно-множественное отображение $\mathcal{A}: B \rightarrow 2^V$, где B — k -мерный конус, а V — некоторое k -мерное пространство. Иначе, каждой точке $b = (b_1, \dots, b_k) \in B$ ставится в соответствие множество $\mathcal{A}(b) \subset V$. Элементы из V обозначим $v = (v_1, \dots, v_k)$. Ради простоты в дальнейшем полагаем $B = \{b: b_i \geq 0, i=1, \dots, k\}$. Обобщение тривиально.

Число b_i будем интерпретировать как «вклад» (понимаемый в самом широком смысле) участника i в некую игру, а k -мерное множество $\mathcal{A}(b)$ — как совокупность всех допустимых исходов при векторе вложений b . Точнее, когда $v \in \mathcal{A}(b)$, то v_i — выигрыш или «полезность» участника i , если все они предпочтут исход v .

Конечно, можно привести много примеров реальных ситуаций, которые могут быть описаны такой схемой. Один из них — механизм взаимного страхования экономических единиц со случайными доходами, где b — вектор вложений участников в «страховую кассу», а $\mathcal{A}(b)$ — множество возможных векторов средних доходов участников при различных способах «дележа» страховой кассы*.

Другой пример: рассматривается объединение производителей какой-либо продукции, b_i — «интенсивность» производственного процесса, осуществляемого производителем i . Величину b_i можно понимать достаточно широко — объем инвестиций, производительность труда или иная характеристика усилий, затрачиваемых производителем i . Доходы производителей, вообще говоря, случайные, распределяются централизованно, и задача состоит в выработке принципов такого распределения. Позже мы рассмотрим эту задачу подробнее и установим, в частности, какие именно принципы влекут децентрализацию системы, а сейчас вернемся к общей схеме.

Как в B , так и в V вводится обычное частичное упорядочение: $b \leq b'$, если $b_i \leq b'_i$; $b \leq b'$, если хотя бы в одном случае имеет место строгое неравенство.

Допустим, что $\mathcal{A}$ удовлетворяет условиям:

1. $\mathcal{A}(0) \ni 0 = (0, \dots, 0)$. Очевидно, это требование не ограничивает общности.

2. $\mathcal{A}(b)$ компактно для всех $b \in B$.

3. Если $b \leq b'$, то $\mathcal{A}(b) \subseteq \mathcal{A}(b')$, т. е. каково бы ни было арбитражное решение при b , когда хотя бы один из участников увеличивает объем своих вложений, возможен выбор нового арбитражного решения, которое для всех не хуже, чем ранее выбранное.

Следующие два требования носят более технический характер. Пусть $\bar{A}$ — замыкание множества A , $\delta(A)$ — граница A ,

$$V_+ = \{v: v_i \geq 0, i=1, \dots, k\},$$

$$V_+^0 = \{v: v_i > 0, i=1, \dots, k\},$$

$$K(b) = \overline{\mathcal{A}(b)} \cap V_+^0.$$

4. Для всех $b \in B$ множество $K(b)$ «охватывает точку 0 в V_+ », т. е. любая исходящая из начала координат, содержащаяся в V_+ , непрерывная и стремящаяся к бесконечности** кривая пересекает $K(b)$.

Легко привести достаточные условия, обеспечивающие условие 4, например, потребовать, чтобы $\mathcal{A}(b)$ содержало окрестность нуля, и т. п.

* Детали соответствующей модели здесь не приводятся, отметим лишь, что она исследовалась П. К. Катыевым и автором.

** Кривая l уходит в бесконечность, если для любого C найдется $b \in l$ такое, что хотя бы для одного i координата $b_i \geq C$.

Пусть теперь $\Pi(b)$ — множество всех оптимальных по Парето точек из $\mathcal{A}(b)$. Должно быть выполнено следующее условие.

5. Для всех $b \in B$ граничные точки $\mathcal{A}(b)$, лежащие в V_+^0 , эффективны, точнее

$$K(b) \subset \Pi(b). \quad (1)$$

Таким образом, мы ограничились играми, в которых уменьшение вплоть до нуля платежа одному из участников влечет увеличение платежа другому. Ниже мы увидим, что условия 4, 5 можно существенно ослабить, и их формулировка обусловлена в большей степени техническими удобствами.

Наша цель — выработать единое правило, определяющее для каждого b решение игры, представленной множеством $\mathcal{A}(b)$. Такое правило должно задаваться селектором точечно-множественного отображения $\mathcal{A}$, т.е. неким отображением $\pi: B \rightarrow V$ таким, что $\pi(b) \in \mathcal{A}(b)$ для всех $b \in B$.

2. СЛУЧАЙ ДВУХ УЧАСТНИКОВ

Положим сначала $k=2$ и сформулируем ряд требований к искомому селектору.

Аксиома 1 (оптимальность по Парето). $\pi(b) \in \Pi(b)$ для всех $b \in B$.

Далее, свойство 3 отображения $\mathcal{A}$ означает, что при наличии «доброго согласия» обоим участникам выгодно «увеличивать свои вложения», и, следовательно, правило «дележа полезности» должно стимулировать участников к этому. Пусть $\pi_i(b) = \pi_i(b_1, b_2)$ — i -я координата вектора $\pi(b)$.

Аксиома 2а (принцип стимуляции). Для всех i функция $\pi_i(b)$ не убывает по b_i .

Однако «чрезмерная» стимуляция может привести при увеличении одним из участников объема своих вложений к уменьшению выигрыша другого, т.е., вообще говоря, более «богатый» игрок может подавлять «бедного». Потребуем, чтобы выполнялось следующее утверждение.

Аксиома 2б (принцип неподавления). Для всех i функция $\pi_i(b)$ не убывает по b_j , где $j \neq i$.

Конечно, вместе с 2а это означает просто монотонность функции $\pi_i(b)$ по всем аргументам, и, окончательно, условимся о справедливости следующей аксиомы.

Аксиома 2 (монотонность). Если $b \leq b'$, то

$$\pi(b) \leq \pi(b').$$

В соответствии со свойством 3 аксиома 2 достаточно убедительна и сама по себе. Тем не менее приведенная выше ее расшифровка представляется уместной. Аксиома 2 на самом деле включает два противоположные по смыслу требования: свойство 2а влечет ограничение снизу на $\pi_i(b_1 + \Delta, b_2)$ как функцию от Δ , а 2б — сверху.

Отметим также, что аксиома 2 содержит определенное условие устойчивости решения. Поясним это на следующем почти тривиальном примере. Пусть b_1 — капитальные вложения первого участника в некий производственный процесс, а стоимость изготовленной продукции равна $(3/2)b_1$. Тогда соответствующий доход $v_1 = (3/2)b_1 - b_1 = (1/2)b_1$. Второй участник осуществляет независимо аналогичный процесс так, что его доход $v_2 = (3/2)b_2 - b_2 = (1/2)b_2$. Допустим теперь, что оба они договорились или вынуждены делить произведенную продукцию пополам, тогда их доходы

$$v_1' = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}b_1 + \frac{3}{2}b_2 \right) - b_1 = -\frac{1}{4}b_1 + \frac{3}{4}b_2,$$

$$v_2' = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} b_1 + \frac{3}{2} b_2 \right) - b_2 = \frac{3}{4} b_1 - \frac{1}{4} b_2.$$

Мы видим, что при фиксированном вложении одного из участников второму выгодно уменьшить объем своих вложений и «жить за счет другого». В конечном счете это приведет к минимальным вложениям (и минимальным доходам).

Аксиома 2 исключает такой дележ *.

Далее, определяемый $\mathcal{A}$ класс игр будем называть симметричным, если для любых $b_1, b_2 \in B$ множества $\mathcal{A}(b_1, b_2)$ и $\mathcal{A}(b_2, b_1)$ симметричны относительно биссектрисы координатного угла в V_+ . В симметричной ситуации разумно рассматривать лишь такие $\pi(b)$, что $b_1 = b_2$ влечет $\pi_1 = \pi_2$. Более того, здесь естественно требовать, чтобы и $(b_1 > b_2) \Rightarrow (\pi_1 \geq \pi_2)$. Для симметричной ситуации такое условие будет играть роль «граничного» и значительно сузит класс изучаемых селекторов. Потребуем выполнения аналогичного условия и в общем случае.

Будем считать, что в пространствах B и V заданы соответственно кривые l и L такие, что:

а) $l \ni 0, L \ni 0$,

б) l и L строго монотонны, непрерывны и уходят в бесконечность (l строго монотонна, если $(b, b' \in l \text{ и } b \neq b') \Rightarrow (b < b' \text{ или } b' < b, \text{ а } (b < b') \Leftrightarrow (b_i < b'_i \text{ для всех } i))$).

Обозначим l_1 множество точек $b \in B$, лежащих «ниже» или на l ; l_2 — множество точек, лежащих «выше» или на l . Аналогично определяем множества L_1 и L_2 в V . Очевидно $l = l_1 \cap l_2, L = L_1 \cap L_2$.

Аксиома 3 (граничное условие). Если $b \in l_i$, то $\pi(b) \in L_i$. В частности, если $b \in l$, то $\pi(b) \in L$.

Таким образом, априорная информация не ограничивается видом множеств $\mathcal{A}(b)$: считаются также заданными множества игр (или параметров b), где предпочтение следует отдать первому игроку (l_1), второму (l_2) и где игроки «равны».

Поскольку в данной работе кривые l и L считаются заданными, рассматриваемая модель является открытой. Принципы выбора l и L здесь подробно обсуждаться не будут. Видимо, такой выбор должен в сильной степени зависеть от конкретной ситуации. Обозначим d биссектрису координатного угла в B , а D — биссектрису в V_+ . Конечно, в симметричной ситуации $l = d, L = D$. Можно и в общем случае считать $l = d$ и затем, исходя из конкретной ситуации, решать вопрос о том, в каком соотношении должны быть выигрыши при равных вложениях. Может оказаться удобным полагать $L = D$ и тогда устанавливать, при каких вложениях платежи должны быть одинаковыми. Например, если существует l такая, что $b \in l$ влечет симметричность $\mathcal{A}(b)$ относительно D , то естественно в качестве l выбрать указанную кривую и положить $L = D$.

Обозначим $\mathcal{S}$ класс всех отображений $\pi: B \rightarrow V$, являющихся селекторами отображения $\mathcal{A}$ и удовлетворяющих аксиомам 1–3.

Предложение 1. Класс $\mathcal{S}$ не пуст.

Доказательство. Положим: $\tilde{\pi}(b) = L \cap \delta(\mathcal{A}(b))$. В силу свойств 1–3 отображения $\mathcal{A}$ и свойств а), б) кривой L правая часть последнего равенства — непустое множество. В соответствии с условиями 4, 5 и а), б)

$$\tilde{\pi}(b) = L \cap \Pi(b), \quad (2)$$

так что для $\tilde{\pi}$ выполнена аксиома 1. Пусть $b \leq b'$. Тогда по б) или $\tilde{\pi}(b) \leq \tilde{\pi}(b')$, или $\tilde{\pi}(b) \geq \tilde{\pi}(b')$. Но последнее невозможно, так как, согласно

* В приведенном простом примере выход достаточно очевиден: чтобы получить устойчивое решение, следует «делить» не произведенную продукцию, а доходы.

условиям 2—3, $\pi(b) \in \mathcal{A}(b')$, что противоречит (2). Следовательно, аксиома 2 выполнена. Справедливость аксиомы 3 очевидна и, значит, $\pi \in \mathcal{S}$.

В симметричной ситуации селектор π приводит к положению, когда и при неравных вложениях участники получают одинаковые «доходы». Можно построить примеры, когда $\mathcal{S}$ состоит лишь из одного селектора π ; в общем случае это, конечно, не так, и указанный селектор занимает в $\mathcal{S}$ «крайнее» место.

Следующее утверждение описывает другой крайний случай и указывает на возможность выделения из $\mathcal{S}$ единственного представителя.

Предложение 2. *Существует отображение $\hat{\pi} \in \mathcal{S}$ такое, что равномерно по всем $b \in L_1$*

$$\sup_{\pi \in \mathcal{S}} \pi_1(b) = \hat{\pi}_1(b)$$

и для всех $b \in L_2$

$$\sup_{\pi \in \mathcal{S}} \pi_2(b) = \hat{\pi}_2(b).$$

Доказательство. Пусть

$$V(b) = \{v : v = \pi(b) \text{ для некоторого } \pi \in \mathcal{S}\}, \quad (3)$$

$\bar{V}(b)$ — замыкание $V(b)$. Если $b \in L_1$, то $\bar{V}(b) \subset L_1$, а если $b \in L_2$, то $\bar{V}(b) \subset L_2$. Пусть отображение $\hat{\pi}$ ставит в соответствие точке $b \in L_1$ такую точку из $\bar{V}(b)$, у которой координата $\hat{\pi}_1$ максимальна, а точке $b \in L_2$ — ту точку из $\bar{V}(b)$, у которой максимальна вторая координата. Ясно, что такая точка существует и единственна. Если $b \in L$, то $\hat{\pi}(b) = \pi(b)$ (см. (2)), поскольку в этом случае $V(b)$ — одноточечное множество.

Докажем, что $\pi \in \mathcal{S}$. Выполнение аксиом 1 и 3 очевидно, остается доказать, что $b \leq b'$ влечет $\hat{\pi}(b) \leq \hat{\pi}(b')$. Достаточно рассмотреть случай $b, b' \in L_1$.

Допустим

$$\hat{\pi}_1(b) > \hat{\pi}_1(b'). \quad (4)$$

По построению для любого $\pi \in \mathcal{S}$ справедливо $\pi_1(b') \leq \hat{\pi}_1(b')$, а для любого $\varepsilon > 0$ существует $\pi^{(\varepsilon)} \in \mathcal{S}$ такое, что

$$\pi_1^{(\varepsilon)}(b) \geq \hat{\pi}_1(b) - \varepsilon.$$

Положив $\varepsilon = (\hat{\pi}_1(b) - \hat{\pi}_1(b'))/2$, имеем: $\pi_1^{(\varepsilon)}(b) \geq (\hat{\pi}_1(b) + \hat{\pi}_1(b'))/2 > \hat{\pi}_1(b') \geq \pi_1^{(\varepsilon)}(b')$, что противоречит принадлежности $\pi^{(\varepsilon)}$ к $\mathcal{S}$.

Пусть теперь $\hat{\pi}_2(b) > \hat{\pi}_2(b')$. Поскольку $\hat{\pi}(b) \in \Pi(b)$ и $b \in L_1$ по построению, для любого $\pi \in \mathcal{S}$ (см. также (4))

$$\pi_2(b) \geq \hat{\pi}_2(b) \quad (5)$$

и для любого $\varepsilon > 0$ существует $\pi^{(\varepsilon)} \in \mathcal{S}$ такое, что $\pi_2^{(\varepsilon)}(b') \leq \hat{\pi}_2(b') + \varepsilon$. По-

ложив $\varepsilon = [\hat{\pi}_2(b) - \hat{\pi}_2(b')]/2$, получаем: $\pi_2^{(\varepsilon)}(b') < \pi_2^{(\varepsilon)}(b)$, что вновь противоречит принадлежности $\pi^{(\varepsilon)}$ к $\mathcal{S}$.

Предложение 2 доказано.

Естественно говорить, что отображение $\hat{\pi}$ отвечает принципу максимальной стимуляции. Так, если $l=d$, то при $b_1 > b_2$ АС дает первому участнику максимальный платеж по сравнению со всеми иными АС, не противоречащими аксиомам 1–3, а в случае $b_2 > b_1$ в таком положении оказывается второй участник.

Может, правда, показаться, что селектор $\hat{\pi}(b)$ обладает тем неприятным свойством, что даже при небольшом преобладании b_1 над b_2 платеж π_1 будет много больше π_2 . Это не так. Покажем, что аксиома 3 автоматически влечет определенное свойство непрерывности селекторов из $\mathfrak{S}$.

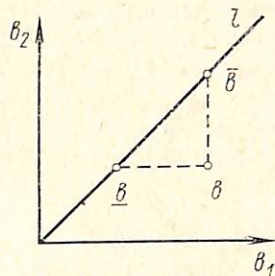
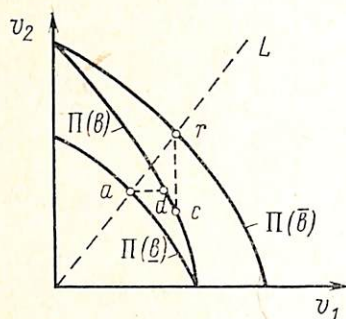


Рис. 1

Рис. 2. $a=\pi(b)$, $r=\pi(\bar{b})$, $c=\pi'(b)$, $d=\pi'(\bar{b})$

Ради простоты последующих рассуждений предположим дополнительно, что:

в) кривая l «уходит в бесконечность» по всем координатам, т.е. для любых C и i существует $b \in l$ такое, что $b_i > C$.

Тогда, в частности, любой точке $b=(b_1, b_2)$ можно поставить в соответствие точку $\bar{b} \in l$ такую, что ее вторая координата $\bar{b}_2=b_2$, и точку $\underline{b} \in l$ такую, что $\underline{b}_1=b_1$ (см. рис. 1).

Пусть теперь $b \in l_1$. Тогда $\underline{b} \leq n \leq \bar{b}$. Следовательно, для любого $\pi \in \mathfrak{S}$

$$\hat{\pi}(b) = \pi(\underline{b}) \leq \pi(b) \leq \pi(\bar{b}) = \hat{\pi}(\bar{b}). \quad (6)$$

Аналогичное утверждение верно и при $b \in l_2$.

Оценки (6) и дают требуемое свойство непрерывности. В частности, из (6) и (2) немедленно вытекает следующее предложение.

Предложение 3. Пусть в дополнение к условиям а)–в) и 1–5 отображение $L \cap \Pi(b)$ непрерывно по b вдоль l . Тогда для любого $\pi \in \mathfrak{S}$ и любой последовательности $b^{(n)}$ такой, что $n \rightarrow \infty$ влечет $b^{(n)} \rightarrow b^{(0)} \in l$,

$$\pi(b^{(n)}) \rightarrow \pi(b^{(0)}) = \hat{\pi}(b^{(0)}).$$

Отметим еще некоторые полезные оценки. Пусть (см. рис. 2) $\pi'(b)$ таково, что $\pi'(b) \in \Pi(b)$ и $\pi_2'(b) = \hat{\pi}_2(\underline{b})$. Аналогично, $\pi''(b) \in \Pi(b)$ и $\pi_1''(b) = \hat{\pi}_1(\bar{b})$. Если $\pi''(b)$ не существует, т.е. у всех точек на $\Pi(b)$ первая координата меньше $\hat{\pi}_1(\bar{b})$, в качестве $\pi''(b)$ можно взять точку на $\bar{\Pi}(b)$ с наибольшей первой координатой.

Обозначим $\pi^{(0)}$ отображение, которое точке $b \in l_1$ ставит в соответствие ту из точек $\pi'(b)$, $\pi''(b)$, у которой первая координата меньше. Аналогично определяем $\pi^{(0)}$ в области l_2 .

В силу аксиомы 2 для любых $\pi \in \mathfrak{S}$ и $b \in l_1$

$$\pi_1(b) \leq \pi_1^{(0)}(b), \quad \pi_2(b) \geq \pi_2^{(0)}(b), \quad (7)$$

а для $b \in L_2$

$$\pi_1(b) \geq \pi_1^{(0)}(b), \quad \pi_2(b) \leq \pi_2^{(0)}(b). \quad (8)$$

Действительно, допустим, например, что для какого-нибудь $\pi \in \mathcal{E}$ нарушено первое из неравенств (7), а $\pi^{(0)}(b) = \pi'(b)$. Поскольку $\pi^{(0)}(b), \pi(b) \in \Pi(b)$, получаем, что $\pi_2(b) < \pi_2^{(0)}(b) = \pi_2'(b) = \pi_2(\underline{b}) = \pi_2(\underline{b})$. Но если $b \in L_1$, то $\underline{b} \leq b$, что противоречит принадлежности π к $\mathcal{E}$.

Неравенства (7), (8) и дают оценки для искомого отображения. Более того, отображения $\hat{\pi}$ и $\pi^{(0)}$ могут и совпадать, а так как $\pi^{(0)}$ удовлетворяет аксиомам 1 и 3, то при подозрении на принадлежность $\pi^{(0)}$ к $\mathcal{E}$ достаточно проверить его монотонность.

По нашему мнению, селектор $\hat{\pi}$ представляет вполне естественную АС. Вместе с тем следует отметить, что выбор такого решения был бы отражением хотя и логичной, но крайней позиции. Соображения «социальной» стабильности могут во многих ситуациях привести к решению, промежуточному между $\hat{\pi}$ и $\tilde{\pi}$. Конечно, если первый игрок, неожиданно «разбогатев», резко увеличил свой вклад, он вправе желать и требовать максимум из всего, что возможно при условии «неподавления» второго игрока. Однако «разбогатевшему» часто разумнее хотя бы немного поделиться выигрышем, чтобы сделать, скажем, более благоприятной психологическую атмосферу игры.

Выбор указанного «промежуточного» решения, видимо, уже должен основываться на особенностях конкретной ситуации; наша цель — указать границы такого выбора.

3. ПРИМЕРЫ

Вернемся к примеру из разд. 1. Рассматривается объединение производителей, b_i — интенсивность процесса, осуществляемого производителем i , функция $x_i(b_i)$ — «объем» соответствующей продукции, измеренный в общих единицах, например, стоимость продукции. Полагаем, что каждый участник наделен функцией полезности $u(\cdot)$, которую всюду в этом пункте ради простоты полагаем одинаковой для всех участников, строго возрастающей и выпуклой вверх, $u(0) = 0$. В условиях полной децентрализации участник i обладает «полезностью» $v_i = u(x_i(b_i))$.

Пусть теперь система централизована и участник i получает доход y_i , причем для любого b

$$\sum_i y_i \leq \sum_i x_i(b_i). \quad (9)$$

Тогда $\mathcal{A}(b) = \{v : v_i = u(y_i) \text{ и выполнено (9)}\}$. Предположим, что функции $x_i(\cdot)$ не убывают, тогда условия 1–5 выполнены. Пусть теперь $l = \{b : x_1(b_1) = x_2(b_2)\}$ и $x_i(\cdot)$ таковы, что l удовлетворяет а), б) (например, $x_i(c) = k_i c$, $k_i > 0$). Полагаем $L = D$. Нетрудно подсчитать, что в этом случае

$$\pi'(b) = \pi''(b) = \pi^{(0)}(b) = (u(x_1(b_1)), u(x_2(b_2))),$$

и, следовательно, $\hat{\pi} = \pi^{(0)}$, что удовлетворяет решению

$$y_i = x_i(b_i). \quad (10)$$

Итак, в рассмотренной модели принцип максимальной стимуляции ведет к полной децентрализации системы.

Конечно, эта модель очень проста. В частности, если под $x_i(b_i)$ понимать не объем продукции, а доход производителя i , предположение о мо-

нотонности $x_i(\cdot)$, а значит, и о выполнении основного свойства 3 может оказаться оправданным не для всех b , а лишь на некотором подмножестве B , в рамках которого и справедливы соответствующие выводы.

Мы не ставим здесь задачу изучить развернутую модель — она заслуживает отдельного и детального исследования. Цель последнего примера — показать, что в простой модели, где естественный ответ (10) достаточно очевиден, наша схема приводит именно к нему.

Однако в существенно более интересном — стохастическом — варианте модели положение уже не так просто. Пусть $x_i(b_i) = x_i(b_i, \omega)$, где ω — случайный параметр, означающий «состояние природы»; $P(d\omega)$ — распределение вероятностей в пространстве $\{\omega\}$; $\{y_i(b, \omega)\}$ — набор функций такой, что для всех b, ω

$$\sum y_i(b, \omega) \leq \sum x_i(b_i, \omega), \quad (11)$$

$$v_i(b, y) = \int u(y_i(b, \omega)) P(d\omega), \quad (12)$$

$\mathcal{A}(b)$ — множество всех точек v с координатами, задаваемыми (11), (12).

При фиксированном b схема (11), (12) представляет известную модель К. Борха [13] о «перестраховании» * или перераспределении случайных доходов (в [13], конечно, вектор b не присутствует, а просто фигурируют случайные величины x_i, y_i). В [13] описывается множество оптимальных по Парето решений задачи и обсуждаются принципиальные возможности выбора среди этого множества единственного решения с помощью механизма «цен на случайные доходы».

Из результатов [13], в частности, вытекает, что в нашем случае при строгой выпуклости $u(\cdot)$ решение (10) даже не принадлежит $\Pi(b)$. Это понятно: выпуклость вверх функции полезности влечет, как говорят, «отвращение к риску», и участникам выгодно «выравнивать» свои доходы с целью их стабилизации, что и вызывает отказ от (10).

Если $u(\cdot)$ строго выпукла, то отображение $\mathcal{A}(b)$ удовлетворяет условиям 1–5, и остается лишь определить соответствие $l \rightarrow L$. Если из каких-либо соображений такое соответствие установлено, вычисление искомого решения принципиальных трудностей не представляет, хотя, конечно, лишь в редких случаях Π допускает аналитическое описание.

Пусть, например, $\omega = (\omega_1, \omega_2)$, где $\omega_i \in R^1$; $x(b_i, \omega) = b_i \omega_i$, и мера $P(d\omega)$ симметрична. Тогда естественно положить $l = d$, $L = D$. Допустим также, что $u(\cdot)$ — однородная функция. Легко получить, что тогда (см., например, [13]) множеству $\Pi(b)$ отвечает семейство решений

$$y_1(b, \omega) = (1 - \delta)(b_1 \omega_1 + b_2 \omega_2), \quad (13)$$

$$y_2(b, \omega) = \delta(b_1 \omega_1 + b_2 \omega_2),$$

где $1 \geq \delta = \delta(b) \geq 0$. Опуская громоздкие выкладки, отметим, что при $b_1 \geq b_2$ отображению $\hat{\Pi}(b)$ соответствует стратегия (13), причем, если $u(x) = x^\alpha$, то, положив $k = b_1/b_2$, имеем $\delta^\alpha = \int u((\omega_1 + \omega_2)/2) P(d\omega) / \int u(k\omega_1 + \omega_2) P(d\omega)$.

Аналогично выпишем решение при $b_1 \leq b_2$. Поясним, что в этом случае $\hat{\Pi}(b) = \pi^{(0)}(b) = \pi'(b)$, т. е. при $b_1 \geq b_2$ справедливо $\hat{\pi}_2(b) = \hat{\pi}_2(\underline{b})$. Для $\pi_1(b)$, конечно, такое простое представление написать нельзя.

* К. Борх рассматривал случай отрицательных x_i , интерпретируемых как требования к оплате страховых полисов, проданных страховыми компаниями; обобщение на случай произвольных x_i тривиально.

4. ОБСУЖДЕНИЕ

Прежде всего следует сравнить наше решение с известной АС Дж. Нэша [1]. Для удобства сформулируем результат Нэша в чуть упрощенном виде — будем рассматривать лишь игры, для которых точка *status quo* («гарантированный доход») совпадает с началом координат. Пусть Q — класс всех выпуклых замкнутых множеств, содержащих ноль. Условия Нэша на селектор $\varphi(A)$, определенный для всех $A \in Q$, таковы (см., например, [1] или [2, 3]):

Аксиома 1Н. *Оптимальность по Парето.*

Аксиома 2Н. *Независимость от посторонних альтернатив:* $\{T \subset A, \varphi(A) \in T\} \Rightarrow \varphi(A) = \varphi(T)$.

Аксиома 3Н. *Симметрия:* если A симметрично относительно биссектрисы координатного угла, то $\varphi_1(A) = \varphi_2(A)$, где φ_i — координата φ .

Аксиома 4Н. *Независимость от линейного преобразования:* если A получается из T линейным преобразованием $\mathcal{L}$, $A = \mathcal{L}(T)$, то и $\varphi(A) = \mathcal{L}(\varphi(T))$.

Теорема Нэша утверждает, что селектор φ , удовлетворяющий 1Н–4Н, существует и единствен. При этом $\varphi(A)$ является той точкой из A , на которой достигается максимум произведения координат.

Основное отличие схемы Нэша от схемы разд. 1, 2 состоит в том, что в первом случае рассматриваются все множества из Q и единственность решения Нэша следует из выполнения аксиом 1Н–4Н в этом классе. В данной статье каждый раз берется, вообще говоря, более узкий класс множеств, к тому же частично упорядоченный. Последнее существенно сказывается на решении, которое в большей степени привязано к выбранному классу, хотя правило формирования решения — общее для всех классов.

Здесь уместно отметить, что за исключением рассуждений, связанных с предложением 3, формальной необходимости в использовании фигурирующего в разд. 1, 2 параметра b нет — вместо точечно-множественного отображения $\mathcal{A}(b)$ можно было просто исследовать некий класс множеств M , в котором определено такое отношение слабого упорядочения $\succ$, что $A \succ B \Rightarrow A \supset B$. В этом случае вместо $\pi(b)$ используем обозначение $\pi(A)$, аксиому 2 сформулируем в следующем виде.

Аксиома 2' (монотонность)

$$A \subset B \Rightarrow \pi(A) \leq \pi(B). \quad (14)$$

В аксиоме 3 вместо множеств l_i , l рассматриваем разбиение M на подклассы M_i , $M_0 = \bigcap_i M_i$ с соответствующими свойствами.

Аксиома 2 (в форме (14)), как уже отмечалось, известна: см, например, [2, с. 182; 3, с. 151], однако в этих работах подчеркивалось, что она несовместима с требованием оптимальности по Парето. Соответствующий пример содержит рис. 3 (см. также [2]). Пусть множество A_1 — отрезок oa , A_2 — отрезок ob , A_3 — треугольник cdo , селектор $\pi(A)$ удовлетворяет аксиоме 1. Тогда $\pi(A_1)$ соответствует точке a , $\pi(A_2)$ — точке b , а в силу аксиомы 2 в виде (14) $\pi(A_3)$ должно равняться одновременно и a и b . При переходе от класса Q к M , удовлетворяющему аналогам свойств 4, 5, высказанный аргумент перестает быть состоятельным — класс монотонных селекторов, отвечающих первой аксиоме, здесь уже не пуст, а поэтому желание следовать естественному требованию аксиомы 2 обоснованно.

Ниже мы подробно остановимся на работах [6–12], где обращение к аксиоме монотонности также основано на некотором сужении класса Q , а сейчас перейдем к сравнению аксиом 1–3 и 1Н–4Н.

При условии оптимальности по Парето аксиома 2, как легко показать,

влечет условие 2Н, однако обратное, вообще говоря, неверно, и решение по Нэшу не является монотонным. Пример дает рис. 3. Здесь кривая $katbl$ — гипербола $v_1 v_2 = 1$, отрезок fa — часть касательной к ней. Рассмотрим четырехугольник $eafo$ и треугольник cdo . Решениями по Нэшу будут соответственно точки a и s , и имеет место немонотонность.

Аксиома 3 — естественное «уточнение» 3Н: она выделяет не только те игры, где игроки «равны», но и те, в которых какому-либо игроку отдается, пусть минимальное, предпочтение (классы M_0, M_1, M_2).

Обратимся к аксиоме 4Н. В нашем случае она вообще может оказаться излишней, если класс M не содержит множеств, получающихся одно из

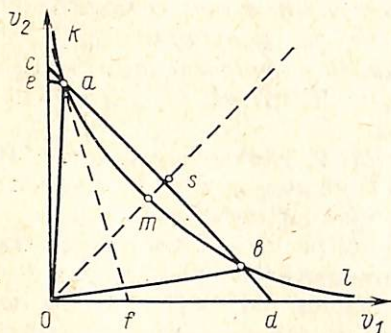


Рис. 3

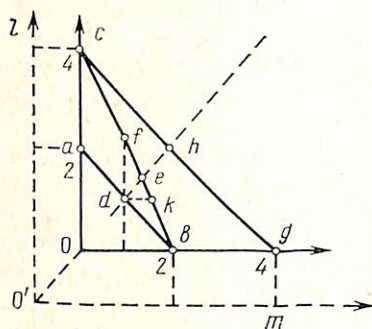


Рис. 4

другого линейным преобразованием. Но и в противном случае 4Н не годится, так как мы видели, что класс решений, удовлетворяющих аксиомам 1—3 и 4Н, может быть пуст, и требуется иной принцип, выделяющий в $\mathcal{S}$ единственное решение.

Вообще условие 4Н не столь «безобидно», как может показаться. Его достоинства и недостатки подробно обсуждались (см., например, [2, § 6.6]), поэтому укажем лишь на одно обстоятельство, иллюстрируемое следующим примером.

Рассмотрим два варианта игры одних и тех же лиц; первый (A_1) представлен на рис. 4 треугольником abo , второй (A_2) — треугольником cbo . Решение Нэша для A_1 : $d = (1, 1)$, для A_2 : $f = (1, 2)$. Практически тот же пример рассматривался и в [2, с. 178—179], где выяснялось, почему f не вполне естественно и какие аргументы может предъявить первый участник в пользу решения $e = (4/3, 4/3)$. Однако в [2] не подвергалось сомнению, что асимметрия игры A_2 «в пользу второго участника» означает, что его доход должен быть, по крайней мере, не меньше первого. Тем не менее так думать не всегда естественно.

Рассмотрим модель взаимного страхования и предположим, что при равных вкладах в страховую кассу множество исходов соответствует игре A_1 . Допустим теперь, что вклад первого участника возрос, а вклад второго остался прежним. При самом благоприятном для первого участника принципе дележа страховой кассы, когда все ее содержимое достается ему, он ничего не выиграет от увеличения своего вклада: этот вклад просто возвратится к нему. В то же время при самом благоприятном правиле для второго участника — все второму — увеличение вклада первым участником, конечно, второму выгодно. Из сказанного вытекает, что переговорное множество новой игры должно быть сходно с переговорным множеством для игры A_2 : увеличение вклада первым участником влечет асим-

метрию переговорного множества в пользу второго *. Однако в этом случае решение, дающее второму больше, чем первому, конечно, «этически» нелепо.

Аксиомы 1–3 приведут к другому решению. В этом случае естественно рассмотреть еще игру A_3 , отражающую увеличение вклада вторым участником до вклада первого (пусть этой игре соответствует треугольник $sg0$ на рис. 4), приписать этой игре решение h , а A_2 , например, — решение $k = (\frac{3}{2}, 1)$.

Конечно, возможны и иные пути отхода от f , в том числе, видимо, и с помощью какой-либо модификации схемы Нэша. Например, можно варьировать точки *status quo*, считая, что они должны быть различными при разных вкладах участников (возможно, здесь будет полезным обобщение схемы Нэша из [14]), хотя тогда указанные точки уже не будут означать «гарантированные доходы». Вообще сказанное не следует воспринимать как критику схемы Нэша — наша цель выявить ее отличие от рассмотренной выше и, в частности, подчеркнуть, что АС Нэша на самом деле предусматривает априорное «равенство» игроков. Если же говорить о ее недостатках, то первый из них в том, что решение основывается только на виде переговорного множества, в то время как информация о ситуации, в которой это множество «возникло» (в частности, о качественной оценке вкладов), могла бы в сильной степени повлиять на выбор решения.

Обратимся теперь к так называемым пропорциональным АС. Такие АС или близкие к ним рассматривались в работах Х. Райфы [6], Д. Исбелла [7–8], Е. Калаи [9], Р. Майерсона [10] и А. Рота [11]. Мы будем следовать обзору [12], где в основном излагаются результаты [9] и [11]. Ограничимся играми A , для которых ноль — точка *status quo*, причем существует $x \in A$ такое, что $x \geq 0$. Для любой игры A определим $A^* = \{v : v \leq x \text{ для некоторого } x \in A\}$. Классом игр со свободно передаваемой (*disposable*) полезностью называют класс $Q^* = \{A : A \cap V_+ = A^* \cap V_+\}$. Условие 5 разд. 1 влечет, как легко видеть, принадлежность игры к Q^* . В [12] рассматривается ряд аксиом: а) независимость от общего изменения масштаба (ослабленный вариант 4Н: $\phi(kA) = k\phi(A)$, где k — число), б) строгая индивидуальная рациональность ($\phi(A) > 0$), в) так называемая разложимость — в наших терминах последнее можно сформулировать: если $T \supset A$, то $\phi(T - \phi(A)) + \phi(A) = \phi(T)$.

Нетрудно понять (строгое доказательство см. в [12]), что выполнение указанных аксиом влечет свойство монотонности, которое, если ограничиться играми из Q^* , уже не противоречит оптимальности по Парето.

В [9] доказано, что выполнение всех указанных аксиом на Q^* приводит к свойству пропорциональности: $\phi(A) = \lambda(A)p$, где p — некоторый постоянный вектор, а число $\lambda(A) = \sup\{t : tp \in A\}$. Иначе, $\phi(A)$ — точка пересечения с границей A луча, выходящего из начала координат вдоль p , т. е. мы имеем дело с решением типа $\tilde{\pi}^{(0)}$.

Последнее, как это было, скажем, в описанных выше примерах, может нас не устроить. В то же время возможность ограничиться более узким,

* Конечно, можно возразить, что точка, соответствующая случаю «все одному, ничего другому», не принадлежит переговорному множеству — обделенный игрок предпочтет неучастие в страховании, так что формально или точка b не есть указанная, или 0 — не *status quo*. Это формальное возражение, и положение легко поправить. Можно, например, поместить *status quo* в начале координат (считая, что соответствующий сдвиг координат уже осуществлен), и множествами всех возможных исходов считать множество типа $mgclo'$ (см. добавление пунктиром на рис. 4), так что отрезок gm — «область безразличия» для первого игрока. Тогда переговорное множество — отрезок sg , и основное и единственное, что и требовалось, — асимметрия в пользу второго игрока — сохраняется.

чем «излишне богатый» класс Q^* , классом игр позволяет выбрать и более гибкую АС, например, π .

Приведем простой пример. Пусть M — класс множеств вида

$$A = A(a_1, a_2) = \left\{ \frac{v_1}{a_1} + \frac{v_2}{a_2} \leq 1 \right\} \cap V_+; \quad a_1, a_2 > 0.$$

Пропорциональное решение, удовлетворяющее также аксиоме симметрии, дает АС $\varphi(A) = (c, c)$, где $c = a_1 a_2 / (a_1 + a_2)$. Обратимся к решению типа $\hat{\pi}$. Если к M_1 , — подклассу игр, для которых $\pi_1 \geq \pi_2$, — отнести игры с $a_1 \geq a_2$, то АС $\hat{\pi}(A) = (a_1/2, a_2/2)$, что совпадает с решением Нэша. Если же положить $M_1 = \{A : a_1 < a_2\}$ (см., например, выше рассуждения о взаимном страховании и рис. 4), то при $A \in M_1$ АС $\hat{\pi}(A) = (a_1(1 - a_1/2a_2), a_1/2)$. Монотонность последнего решения легко проверить; в частности, на рис. 4 ему соответствует точка k .

5. СЛУЧАЙ МНОГИХ УЧАСТНИКОВ

Займемся перенесением построенной схемы на случай игры k лиц.

Аксиомы 1, 2 оставляем без изменения, перейдем к аксиоме 3. Пусть $\bar{p} = (p_1, \dots, p_k)$ — перестановка чисел $(1, \dots, k)$, $\mathcal{P}$ — множество всех перестановок, $B_{\bar{p}} = \{b : b_{p_1} \geq \dots \geq b_{p_k}\}$.

В симметричной ситуации, очевидно, множества $B_{\bar{p}}$ и должны стать аналогами множеств l_1, l_2 . В общем случае «ранжировать важность вложений» можно, задавая отображение $f: B \rightarrow \mathcal{P}$, ставящее в соответствие каждому вектору вложений определенный порядок игроков, а ранжировать выплаты — задавая отображение $f_1: V_+ \rightarrow \mathcal{P}$. Тогда f определяет $k!$ множеств $l_{\bar{p}} = f^{-1}(\bar{p})$, отображение f_1 — множества $L_{\bar{p}} = f_1^{-1}(\bar{p})$. Обозначим $l = \bigcap l_{\bar{p}}, L = \bigcap L_{\bar{p}}$.

Аксиома 3'. $f(b) = f_1(\pi(b))$ или, что то же, для всех $\bar{p} \in \mathcal{P}$

$$b \in l_{\bar{p}} \Leftrightarrow \pi(b) \in L_{\bar{p}}.$$

Для справедливости последующего необходимы определенные ограничения на f и f_1 , причем проще всего налагать их сразу на $l_{\bar{p}}, L_{\bar{p}}$. Будем считать, что существует строго монотонное* непрерывное отображение $s: B \rightarrow B$ такое, что для всех $\bar{p} \in \mathcal{P}$ верно $s(B_{\bar{p}}) = l_{\bar{p}}$, и s сохраняет неподвижными все координатные плоскости. Аналогичному требованию (конечно, с отображением, отличным от s) отвечает f_1 . Справедливость k -мерного аналога предложения 1 очевидна. Легко также перенести на k -мерный случай и предложение 3.

Перейдем к принципу максимальной стимуляции. К сожалению, без дополнительных предположений k -мерный аналог предложения 2, вообще говоря, не верен, а именно, отображение $\hat{\pi}$, ставящее в соответствие точке b «крайнюю» точку множества $\bar{V}(b)$ (см. (3)), может и не принадлежать $\mathcal{S}$.

Не загромождая изложение подробностями, отметим следующее: буквальное перенесение доказательства предложения 2 на k -мерный случай показывает, что можно быть уверенным лишь в монотонности $\hat{\pi}_i(b)$ по аргументу b_i , а принцип «неподавления» для $\hat{\pi}$ может и нарушаться. Иначе говоря, если, скажем, $b \in l_{\bar{p}}$, где $\bar{p} = (1, \dots, k)$, и следует отдать предпочтение первому игроку, то селектор, при котором максимален выигрыш этого игрока, может быть различен для разных $b \in l_{\bar{p}}$. Последующее состоит

* Отображение $s: B \rightarrow B$ строго монотонно, если $(b \leq b') \Rightarrow s(b) \leq s(b')$.

в выборе в $\mathcal{S}$ селектора, который обладал бы определенными экстремальными свойствами равномерно по b и был бы в то же время «наиболее близок к границе $\mathcal{S}$ ».

Пусть класс селекторов R таков, что

1° $R \subset \mathcal{S}$;

2° $R \ni \pi$ (см. (2)).

Обозначим (ср. с (3)) $V^R(b) = \{v : v = \pi(b) \text{ для некоторого } \pi \in R\}$, $\bar{V}^R(b)$ — замыкание $V^R(b)$, и потребуем, чтобы класс R удовлетворял также условию

3° если $b \in l_{\bar{p}}$ и точка $\bar{v} = \bar{v}(b) \in \bar{V}^R(b)$ такова, что

$$\bar{v}_{p_i} = \sup_{v \in \bar{V}^R(b)} v_{p_i}, \quad (15)$$

то для всех $j=2, \dots, k$ и любой $v \in \bar{V}^R(b)$

$$v_{p_j} \geq \bar{v}_{p_j}. \quad (16)$$

Поясним сказанное. Положим

$$\bar{p} = (1, \dots, k) \quad (17)$$

и зафиксируем $b \in l_{\bar{p}}$. Легко видеть, что в силу 3° (а также 1° и аксиомы 1) точка $\bar{v}$, т. е. «угловая» точка множества $\bar{V}^R = \bar{V}^R(b)$, у которой максимальна первая координата, — единственная. Иначе, возможность уменьшения (в рамках R) выигрыша, скажем второго участника, влечет возможность увеличения выигрыша первого. Далее, точка $\bar{v}$ означает крайнюю ситуацию — первый участник получает максимум в рамках $\bar{V}^R$. Допустим, что он готов «уступить» другим игрокам. Условие (16) показывает, что мы ограничиваемся рассмотрением лишь такого множества исходов, что отход от крайней позиции влечет улучшение (или, по крайней мере, неухудшение) положения всех участников (кроме первого). Например, если $\bar{v} = (20, 10, 10)$, то может иметь место также решение $v = (18, 11, 11)$, но $v = (18, 9, 13)$ условием 3° запрещается. Грубо говоря, первый игрок не может «передать» свою полезность третьему, ущемляя второго.

Обозначим $\hat{\pi}^R$ отображение, ставящее в соответствие $b \in l_{\bar{p}}$ точку $\bar{v}(b)$, удовлетворяющую (15).

Предложение 4. Пусть класс R удовлетворяет условиям 1°–3°. Тогда отображение $\hat{\pi}^R \in \mathcal{S}$.

Доказательство по существу повторяет доказательство предложения 2; записывая аналог (5), следует воспользоваться свойством 3°.

Пример. Рассмотрим симметричную схему, положив $l_{\bar{p}} = B_{\bar{p}}$. Пусть R — класс таких отображений $\pi \in \mathcal{S}$, что $b \in l_{\bar{p}} \Rightarrow \pi_{p_1} = \dots = \pi_{p_k}$. Ясно, что R удовлетворяет 1°–3°, а $\hat{\pi}^R$ — отображение, доставляющее при выполнении (17) максимальный выигрыш первому участнику и «делящее оставшийся выигрыш поровну» между остальными. Нетрудно показать (а предложение 4 это утверждает), что $\hat{\pi}^R$ монотонно.

Пусть R — максимальный класс, т. е. не существует класса R' , строго содержащего R и удовлетворяющего 1°–3°. Тогда, во-первых, как легко понять, $\hat{\pi}^R \in R$; во-вторых, отображение $\hat{\pi}^R$ естественно считать «претендентом» на решение.

Вопрос об ограничениях на отображение $\mathcal{A}$, при которых класс $\mathcal{S}$ сам удовлетворяет 1°–3°, остается открытым и представляет большой интерес.

6. ОДИН СПОСОБ ВЫЧИСЛЕНИЯ $\hat{\pi}$

Даже в двумерном случае в сколько-нибудь нетривиальной ситуации искать конкретное представление для $\hat{\pi}$ трудно. Ниже будет дан конструктивный способ построения $\hat{\pi}$, который может оказаться полезным для конкретных вычислений. Итак, пусть $k=2$. Для простоты ограничимся симметричной ситуацией и положим $l=d, L=D$.

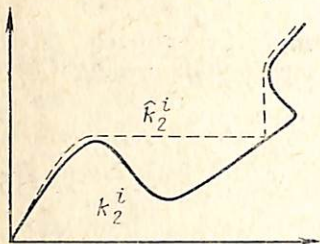


Рис. 5

Рассмотрим рекуррентную последовательность отображений $\pi^{(i)}$. Отображение $\pi^{(0)}$ определено в п. 2 (см. (7), (8)); $\pi^{(i+1)}$ получаем по $\pi^{(i)}$ следующим образом. Если $\pi^{(i)}$ монотонно, то $\hat{\pi}^{(i+1)} = \pi^{(i)}$ и, как мы сейчас увидим, совпадает с $\hat{\pi}$. Пусть $\pi^{(i)}$ не монотонно, $b_1 > b_2$, $k_2^i(c)$ — порожденный $\pi^{(i)}$ образ прямой $\{b_2=c\}$, $k_1^i(c)$ — образ прямой $\{b_1=c\}$. Символом $\hat{k}_2^i(c)$ обозначим такую кривую в V , что: а) она монотонна, б) любая точка $\hat{k}_2^i$ лежит или на k_2^i или выше последней кривой, в) не существует другой монотонной кривой, лежащей целиком между $\hat{k}_2^i$ и k_2^i (см. рис. 5, где сплошная кривая — k_2 , пунктирная — $\hat{k}_2$). Нетрудно понять, что такая кривая существует и единственна. Аналогично, результат «монотонизации» $k_1^i(c)$ обозначим $\hat{k}_1^i(c)$. Пусть $\underline{m}^{(i)}(b)$ — точка пересечения кривой $\hat{k}_2^i(b_2)$ с $\Pi(b)$, $\bar{m}^{(i)}(b) = \hat{k}_1^i(b_1)$ с $\Pi(b)$. Тогда $\pi^{(i+1)}(b)$ — та из двух точек $\underline{m}^{(i)}(b)$, $\bar{m}^{(i)}(b)$, у которой меньше первая координата. Последовательность точек $\pi^{(i)}(b) \in \Pi(b)$ монотонна. Следовательно, существует

$$\pi^\infty(b) = \lim_{i \rightarrow \infty} \pi^{(i)}(b).$$

Легко понять, что, во-первых, отображение $\pi^\infty \in \mathfrak{S}$, во-вторых, для любого $\pi \in \mathfrak{S}$ справедливо $\pi_1(b) \leq \pi_1^\infty(b)$. Следовательно, $\pi^\infty = \hat{\pi}$.

Автор искренне признателен П. К. Катышеву и В. М. Полтеровичу за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Nash J. F. The Bargaining Problem. — *Econometrica*, 1950, v. 18, № 2.
2. Льюс Д., Райфа Х. Игры и решения. М.: Изд-во иностр. лит., 1961.
3. Оуэн Г. Теория игр. М.: Мир, 1971.
4. Harsanyi J. C. Models for the Analysis of Balance of Power in Society. *Logic, Methodology and Philosophy Sciences*. Stanford, 1962.
5. Теория игр. Аннотированный указатель публикаций по 1968 г. Л.: Наука, 1976.
6. Raiffa H. Arbitration Schemes for Generalised Two-Person Games. *Contribution to the Theory of Games. II.* — *Annals of Mathematics Studies*, 1953, № 28.
7. Isbell J. R. Absolute Games. *Contribution to the Theory of Games IV.* — *Annals of Mathematical Studies*, 1959, № 40.
8. Isbell J. R. A Modification of Harsanyi's Bargaining Model. — *Bulletin of the American Mathematical Society*, 1960, v. 66, № 1.
9. Kalai E. Proportional Solutions to the Bargaining Situations: Interpersonal Utility Comparisons. — *Econometrica*, 1977, v. 45, № 6.
10. Myerson R. B. Two-Person Bargaining Problem and Comparable Utility. — *Econometrica*, 1977, v. 45, № 6.
11. Roth A. E. Proportional Solutions to the Bargaining Problem. — *Econometrica*, 1979, v. 49, № 3.
12. Roth A. E. Axiomatic Models of Bargaining. — *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, 1979, № 170.
13. Borch K. Mathematical Theory of Insurance. London — Toronto, 1974.
14. Harsanyi J. C. A Bargaining Model for the Cooperative n -Person Game. *Contribution to the Theory of Games IV.* — *Annals of Mathematical Studies*, 1959, № 40.

Поступила в редакцию
3 X 1980