

ступени (номера таксонов) и очень редко наблюдался переход сразу через несколько ступеней. Экономически это означает, что у большинства предприятий отсутствуют особо резкие отклонения между уровнями выполнения плановых и фактических показателей. К передовым предприятиям, для которых $\xi > \eta$, были отнесены объекты a_1, a_4, a_{10} , а к отстающим — $a_{11}, a_{13}, a_{15}, a_{16}$. Остальные работали на среднем уровне.

Резервы роста выпуска продукции представителей таксонов приведены в табл. 3. Анализ динамики объемов производства продукции и возможностей роста для представителя первого таксона показал, что наблюдается тенденция увеличения выпуска при постоянном уровне его резерва, т. е. происходит интенсивное расширение производства. Предприятия второго таксона характеризуются стабильной работой, выпуск и резерв роста находятся на одном уровне; четвертого — экстенсивным расширением производства, т. е. выпуск и резерв роста имеют тенденцию к увеличе-

Таблица 3

Резервы роста выпуска продукции представителей таксонов

Таксон	1	2	3	4
Представитель	a_{12}	a_8	a_{16}	a_{10}
Резерв роста, %	5,7	16,8	26,3	10,1

нию. Предприятия третьего таксона увеличивают резерв роста выпуска, что соответствует уменьшению эффективности производства.

Как выявила практическая реализация предложенного подхода, качество моделей значительно улучшается при увеличении перечня используемых технико-экономических показателей с последующим отбором значимых признаков. К сожалению, существующие формы отчетности рыбообрабатывающих предприятий не позволяют получить ряд для исследования признаков.

ЛИТЕРАТУРА

1. Айвазян С. А., Бежаева З. И., Староверов О. В. Классификация многомерных наблюдений. М.: Статистика, 1974.
2. Харман Г. Современный факторный анализ. М.: Статистика, 1972.
3. Френкель А. А. Обобщенные показатели и их применение в экономике. — В кн.: Экономико-математические исследования затрат и результатов. М.: Наука, 1976.

Поступила в редакцию
22 XI 1977

О ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ АЛГОРИТМАХ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ, ОСНОВАННЫХ НА АППРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

Сурис Т. Г., Цирлин А. М.

(Москва)

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу нелинейного программирования (НП) *

$$f_0(x) \rightarrow \min_{x \in X} f_i(x) = 0, \quad i=1, \dots, m, \quad (1)$$

где функции f_0, f_i определены на множестве X евклидова пространства E_n . Функцией возмущений для (1) называют функцию

$$f_0^*(c) = \min_{x \in X} f_0(x) / f_i(x) = c_i, \quad i=1, \dots, m. \quad (2)$$

* Все полученные ниже результаты переносятся и на задачи с условиями в форме неравенств $f_i(x) \geq 0, i=1, \dots, m$.

Ясно, что $f_0^*(0)$ представляет собой оптимальное значение (1), т. е. величину функции f_0 на решении x^* .

Покажем, как связана $f_0^*(c)$ задачи НП с функцией возмущений

$$R^*(c, \lambda) = \min_{x \in X} [f_0(x) + \varphi(f, \lambda)] / f_i(x) = c_i, \quad i=1, \dots, m, \quad (3)$$

задачи

$$R(x, \lambda) = f_0(x) + \varphi(f, \lambda) \rightarrow \min_{x \in X} / f_i(x) = 0, \quad i=1, \dots, m, \quad (4)$$

где $f = (f_1, \dots, f_m)$, а функция φ такова, что $\varphi(0, \lambda) = 0$ для любого $\lambda \in \Lambda$, т. е. это слагаемое исчезает на множестве допустимых решений задачи (1), и на этом множестве целевые функции (1) и (4) совпадают. Очевидно

$$R^*(c, \lambda) = f_0^*(c) + \varphi(c, \lambda). \quad (5)$$

Ряд вычислительных алгоритмов решения задачи НП основан на выборе вида функции φ и параметров λ , для которых абсолютный минимум по c $R^*(c, \lambda)$ достигался бы в точке $c=0$. В этом случае $R^*(0, \lambda) = f_0^*(0)$, т. е. является оптимальным значением задачи НП, вектор же x^* , при котором получается абсолютный минимум в (3), окажется решением (1). Так как вид функции $f_0^*(c)$ неизвестен, для выбора параметров λ может быть использована та или иная аппроксимация $f_0^*(c)$, коэффициенты которой уточняются итерационным методом.

Покажем, что с этой точки зрения известный алгоритм «множителей» (алгоритм Пауэлла) [1] основан на линейной аппроксимации функции возмущений и что без существенного усложнения вычислений сходимость алгоритма можно ускорить за счет квадратичной аппроксимации этой функции.

2. АЛГОРИТМ ПАУЭЛЛА

Зададим функцию $\varphi(f, \lambda)$ в форме

$$\varphi(f, \lambda) = - \sum_{i=1}^m l_i f_i(x) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \alpha_i f_i^2(x), \quad (6)$$

где вектор λ имеет составляющие $\lambda = (l_1, \dots, l_m, \alpha_1, \dots, \alpha_m)$. При этом $R^*(c, \lambda)$ примет вид

$$R^*(c, \lambda) = f_0^*(c) - \sum_{i=1}^m l_i c_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \alpha_i c_i^2, \quad (7)$$

а функция $R(x, \lambda)$ —

$$R(x, \lambda) = f_0(x) - \sum_{i=1}^m l_i f_i(x) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \alpha_i f_i^2(x). \quad (8)$$

Точке $x^*(\lambda)$, в которой достигается минимум функции $R(x, \lambda)$ по x , соответствует $c^*(\lambda) = f(x^*(\lambda))$, причем $c^*(\lambda)$ является точкой минимума $R^*(c, \lambda)$. Аппроксимируем функцию $f_0^*(c)$ линейной зависимостью

$$\tilde{f}_0^*(c) = a + \sum_{i=1}^m k_i c_i. \quad (9)$$

Положим $\tilde{R}^*(c, \lambda) = \tilde{f}_0^*(c) + \varphi(c, \lambda)$. В точке минимума $\tilde{c}^*$ функции $\tilde{R}^*$ выполнено условие

$$\frac{\partial \tilde{R}^*(c, \lambda)}{\partial c_i} = \frac{\partial}{\partial c_i} \left[a + \sum_{i=1}^m (k_i - l_i) \tilde{c}_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \alpha_i \tilde{c}_i^2 \right] = 0, \quad (10)$$

откуда

$$\tilde{c}_i^* = \frac{l_i - k_i}{\alpha_i}, \quad i=1, \dots, m. \quad (11)$$

Для равенства $\tilde{c}_i^* = 0$ нужно выбрать $l_i = k_i$, при этом k_i определяется следующим образом.

1. Задаемся начальными значениями $\alpha_i^0 > 0$, $l_i^0 = 0$, $i = 1, \dots, m$, и находим минимум (8) на множестве X . Обозначим точку, в которой получается этот минимум, через x^{0*} , а значение $f_i(x^{0*})$ — через $\tilde{c}_i^0$, $i = 1, \dots, m$. Очевидно, в точке $\tilde{c}^0 = (\tilde{c}_1^0, \dots, \tilde{c}_m^0)$ выражение $R^*(c, \lambda)$ достигает минимума по c . Поэтому, согласно (11),

$$\tilde{c}_i^0 = \frac{l_i^0 - k_i^0}{\alpha_i^0}. \quad (12)$$

Из (12) находим k_i^0 (начальные значения коэффициентов аппроксимации (9))

$$k_i^0 = l_i^0 - \alpha_i^0 \tilde{c}_i^0. \quad (13)$$

2. На следующей итерации выбираем l_i таким образом, чтобы $\tilde{c}_i^*(l_i)$ было равно нулю, т. е.

$$l_i^1 = k_i^0 = l_i^0 - \alpha_i^0 \tilde{c}_i^0. \quad (14)$$

В дальнейшем, в μ -м цикле,

$$l_i^\mu = k_i^{\mu-1} = l_i^{\mu-1} - \alpha_i^{\mu-1} \tilde{c}_i^{\mu-1}. \quad (15)$$

Что касается α_i , то величину этих коэффициентов не меняют, если от $(\mu - 2)$ -го цикла к $(\mu - 1)$ -му модуль вектора невязок уменьшается довольно быстро; в противном случае α_i увеличивают (см., например, [1])

$$\begin{aligned} \alpha_i^\mu &= \alpha_i^{\mu-1}, & \text{если} & \quad |\tilde{c}_i^{\mu-1}| / |\tilde{c}_i^{\mu-2}| \leq 0,25, \\ \alpha_i^\mu &= A \alpha_i^{\mu-1}, & \text{если} & \quad |\tilde{c}_i^{\mu-1}| / |\tilde{c}_i^{\mu-2}| > 0,25, \end{aligned} \quad (16)$$

$A \geq 2$.

Недостатком этого алгоритма является то, что отсутствие сведений о кривизне функции $f_0^*(c)$ заставляет выбирать α_i достаточно большим для того, чтобы гарантировать выпуклость $R^*(c, \lambda)$. Увеличение же коэффициентов α_i осложняет определение минимума $R(x, \lambda)$ на множестве X , так как ведет к появлению оврагов у этой функции.

3. АЛГОРИТМ, ОСНОВАННЫЙ НА КВАДРАТИЧНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

Изложенный ниже алгоритм предполагает

$$\tilde{f}_0^*(c) = a + \sum_{i=1}^m \left(k_i c_i + \frac{1}{2} r_i c_i^2 \right). \quad (17)$$

Функции $R^*(c, \lambda)$ и $R(x, \lambda)$ имеют соответственно вид (7) и (8). Минимум R^* достигается в точке $\tilde{c}^*$, в которой выполняется условие стационарности функции $R^*(c, \lambda)$

$$\frac{\partial R^*(c, \lambda)}{\partial c_i} = \frac{\partial}{\partial c_i} \left[a + \sum_{i=1}^m (k_i - l_i) \tilde{c}_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (r_i + \alpha_i) \tilde{c}_i^2 \right] = 0, \quad (18)$$

откуда

$$\tilde{c}_i^* = \frac{l_i - k_i}{r_i + \alpha_i}. \quad (19)$$

Для обеспечения равенства $\tilde{c}^* = 0$ нужно выбрать

$$l_i = k_i. \quad (20)$$

Для того чтобы точки, удовлетворяющие (18), были точками минимума функции $R^*(c, \lambda)$, потребуем выполнения неравенств

$$\frac{\partial^2 R^*(c, \lambda)}{\partial c_i^2} = \frac{\partial^2}{\partial c_i^2} \left[a + \sum_{i=1}^m (k_i - l_i) \tilde{c}_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (r_i + \alpha_i) \tilde{c}_i^2 \right] > 0. \quad (21)$$

откуда

а чтобы α_i отвечали условию (22) и были положительны, принимаем

$$\alpha_i = p|r_i| - r_i, \quad (23)$$

где $p > 1$.

В отличие от случая линейной аппроксимации коэффициенты аппроксимирующего выражения (16) можно определить лишь по результатам двух циклов вычислений вектора невязок c^* , для которого функция $R^*(c, \lambda)$ стационарна. Знание же коэффициентов k_i и r_i позволит обоснованно выбрать не только l_i , но и α_i .

Вычисления проводятся в такой последовательности.

1. Задаемся начальными значениями $\alpha_i^0 > 0$, $l_i^0 = 0$, $i = 1, \dots, m$, и находим минимум (8) и вектор невязок $\tilde{c}^0$ в точке минимума.

2. Рассчитываем по формуле (13) k_i и выбираем

$$l_i^1 = k_i^0 = l_i^0 - \alpha_i^0 \tilde{c}_i^0,$$

$$\alpha_i^1 = \alpha_i^0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Вновь определяем минимум (8) и соответствующий этому минимуму вектор $\tilde{c}^1$. Для расчета параметров k_i и r_i имеем систему уравнений, вытекающую из (19)

$$\begin{aligned} \tilde{c}_i^0 &= \frac{l_i^0 - k_i}{r_i + \alpha_i^0}, \\ \tilde{c}_i^1 &= \frac{l_i^1 - k_i}{r_i + \alpha_i^1}, \end{aligned} \quad (24)$$

решая которую относительно r_i и k_i , получим коэффициенты аппроксимирующего выражения (17) r_i^1 и k_i^1

$$\begin{aligned} r_i^1 &= \frac{l_i^0 - l_i^1 - (\tilde{c}_i^0 \alpha_i^0 - \tilde{c}_i^1 \alpha_i^1)}{\tilde{c}_i^0 - \tilde{c}_i^1}, \quad i = 1, \dots, m. \\ k_i^1 &= l_i^1 - \tilde{c}_i^1 (r_i^1 + \alpha_i^1), \end{aligned} \quad (25)$$

В дальнейшем в μ -м цикле из рекуррентных соотношений

$$\begin{aligned} r_i^\mu &= \frac{l_i^{\mu-1} - l_i^\mu - (\tilde{c}_i^{\mu-1} \alpha_i^{\mu-1} - \tilde{c}_i^\mu \alpha_i^\mu)}{\tilde{c}_i^{\mu-1} - \tilde{c}_i^\mu}, \\ k_i^\mu &= l_i^\mu - \tilde{c}_i^\mu (r_i^\mu + \alpha_i^\mu) \end{aligned} \quad (26)$$

$i = 1, \dots, m$,

выбираем значения множителей l_i и α_i

$$l_i^{\mu+1} = k_i^\mu, \quad i = 1, \dots, m. \quad (27)$$

$$\alpha_i^{\mu+1} = p|r_i^\mu| - r_i^\mu,$$

В случае, если $\tilde{c}_i^{\mu-1} - \tilde{c}_i^\mu = 0$, принимаем $r_i^\mu = 0$, $\alpha_i^{\mu+1} = \alpha_i^\mu$. Опыт расчетов показал, что скорость сходимости алгоритма увеличивается, если второе из равенств (27) дополнить неравенством

$$\alpha_i^{\mu+1} \geq \alpha_i^\mu \quad \text{для } \mu \geq 2. \quad (27')$$

Соотношения (26), (27) с начальными условиями

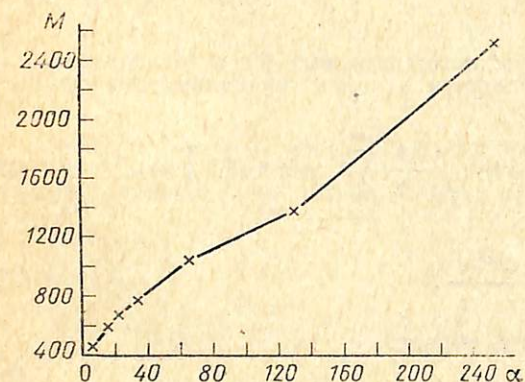
$$\begin{aligned} \alpha_i^1 &= \alpha_i^0 > 0, \\ l_i^0 &= 0, \\ l_i^1 &= l_i^0 - \tilde{c}_i^0 \alpha_i^0 \end{aligned} \quad (28)$$

определяют процедуру поиска решения.

Если заранее известно, что функция $f_0(x)$ имеет минимум на множестве X , то

$$\alpha_i^1 = \alpha_i^0 = 0, \quad l_i^0 = 0, \quad l_i^1 = -\text{sign } \tilde{c}_i^0. \quad (29)$$

Ниже иллюстрируется эффективность предлагаемого алгоритма.



Зависимость числа шагов поиска безусловного минимума M от величины параметра α

№ цикла	Метод			
	Пауэлла		квадратичной аппроксимации	
	c_1	c_2	c_1	c_2
	$\alpha_i^0=1, i=1, 2$		$\alpha_i^0=1, i=1, 2$	
1	0,61	0,14	0,61	0,14
2	$0,17 \cdot 10^{-3}$	$0,59 \cdot 10^{-3}$	$0,17 \cdot 10^{-3}$	$0,59 \cdot 10^{-3}$
3	$-0,23 \cdot 10^{-2}$	$0,95 \cdot 10^{-6}$	$-0,23 \cdot 10^{-2}$	$0,95 \cdot 10^{-6}$
4	$0,26 \cdot 10^{-3}$	$0,68 \cdot 10^{-3}$	$0,22 \cdot 10^{-3}$	$-0,83 \cdot 10^{-3}$
5	$0,21 \cdot 10^{-3}$	$-0,59 \cdot 10^{-3}$	$-0,32 \cdot 10^{-3}$	$-0,10 \cdot 10^{-3}$
6	$0,54 \cdot 10^{-5}$	$0,25 \cdot 10^{-3}$	0	0
7	$-0,27 \cdot 10^{-3}$	$0,11 \cdot 10^{-3}$	$\alpha_1^{\max}=8,76$	$\alpha_2^{\max}=7,79$
8	$0,50 \cdot 10^{-4}$	$-0,15 \cdot 10^{-3}$	$\Sigma M=2426$	
9	$0,19 \cdot 10^{-3}$	$-0,11 \cdot 10^{-3}$		
10	$0,79 \cdot 10^{-4}$	$-0,63 \cdot 10^{-4}$		
11	$-0,47 \cdot 10^{-4}$	$0,66 \cdot 10^{-4}$		
12	0	0		
	$\alpha_1^{\max}=256$	$\alpha_2^{\max}=256$		
	$\Sigma M=8830$			
	$\alpha_i^0=2, i=1, 2$		$\alpha_i^0=2, i=1, 2$	
1	0,31	0,07	0,31	0,07
2	$0,50 \cdot 10^{-3}$	$-0,36 \cdot 10^{-3}$	$0,50 \cdot 10^{-3}$	$-0,36 \cdot 10^{-3}$
3	$0,48 \cdot 10^{-3}$	$-0,38 \cdot 10^{-3}$	$0,48 \cdot 10^{-3}$	$-0,38 \cdot 10^{-3}$
4	$-0,88 \cdot 10^{-3}$	$0,67 \cdot 10^{-3}$	$-0,12 \cdot 10^{-3}$	$-0,39 \cdot 10^{-3}$
5	$0,40 \cdot 10^{-5}$	$0,21 \cdot 10^{-3}$	0	0
6	$-0,18 \cdot 10^{-3}$	$0,35 \cdot 10^{-4}$	$\alpha_1^{\max}=151,7$	$\alpha_2^{\max}=1,95$
7	$0,15 \cdot 10^{-3}$	$-0,18 \cdot 10^{-3}$	$\Sigma M=2535$	
8	$0,60 \cdot 10^{-4}$	$0,64 \cdot 10^{-4}$		
9	$-0,14 \cdot 10^{-3}$	$0,59 \cdot 10^{-4}$		
10	$0,12 \cdot 10^{-3}$	$-0,64 \cdot 10^{-4}$		
11	0	0		
	$\alpha_1^{\max}=256$	$\alpha_2^{\max}=256$		
	$\Sigma M=8495$			

4. ПРИМЕР

Рассмотрим результаты применения изложенных алгоритмов к решению следующей задачи [2]: минимизировать

$$f_0(x) = 1000 - x_1^2 - 2x_2^2 - x_3^2 - x_1x_2 - x_1x_3$$

при ограничениях

$$f_1(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 25 = 0, \quad (30)$$

$$f_2(x) = 8x_1 + 14x_2 + 7x_3 - 56 = 0, \quad x_j \geq 0, \quad j=1, 2, 3.$$

За критерий эффективности алгоритмов принимаем число циклов безусловной оптимизации, необходимых для получения решения задачи (30) с заданной точностью, при одинаковых начальных значениях α^0 . Для безусловной оптимизации был использован метод Хука - Дживса с начальной точкой $x_j^0=2, j=1, 2, 3$, и начальным шагом $\partial x_j^0=0, 2, j=1, 2, 3$, одинаковыми для всех циклов алгоритмов. Расчеты производились на ЭВМ «Минск-32» при следующих константах: в (16) $A=2$, в (23) $p=1, 2$.

Значения $x_j^{\min}(l, \alpha), j=1, 2, 3$, определялись с точностью 10^{-6} , а конец поиска - условием: $\tilde{\epsilon}_i^* < 10^{-5}, i=1, 2$.

Результаты вычислений сведены в таблицу. Здесь приведены начальные значения α_i^0 параметра $\alpha, i=1, 2$, а также суммарное число шагов поиска ΣM для обоих алгоритмов. Из таблицы видно, что метод условной оптимизации с использованием квадратичной аппроксимации функции возмущений с точки зрения принятого критерия более эффективен.

Дополнительно было исследовано влияние величины параметра α на число шагов M поиска безусловного минимума. Вид функции $M(\alpha)$, который зависит как от начальной точки, так и от поверхности поиска, для рассматриваемого случая изображен на рисунке. Число шагов безусловного поиска пропорционально величине параметра α , поэтому значительное увеличение α нежелательно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Численные методы условной оптимизации. М.: Мир, 1977.
2. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. М.: Мир, 1975.

Поступила в редакцию
31 X 1979

О ТЕОРЕМЕ ЭРРОУ ДЛЯ АЛГЕБРЫ КОАЛИЦИЙ

Тангли А. С.

(Москва)

В работе Т. Армстронга [1] строится модель группового выбора К. Эрроу [2] с ограничениями на индивидуальные предпочтения. На множестве участников V рассматривается коалиционная структура, задаваемая булевой алгеброй $\mathfrak{A}$ (системой подмножеств множества участников, замкнутой относительно операций взятия конечного объединения, пересечения и дополнения), которая и ограничивает дифференциацию участников по предпочтениям. Предполагается, что участники, предпочитающие одну альтернативу другой, всегда должны образовывать коалицию — элемент алгебры. Все остальные компоненты модели К. Эрроу оставлены без изменений.

В качестве предпочтений рассматривается класс $\mathfrak{R}$ всех слабых упорядочений на множестве альтернатив X ($|X| \geq 3$ — бинарные отношения $R \subset X \times X$, асимметричные (из $(x, y) \in R$ для $x, y \in X$ следует $(y, x) \notin R$) и отрицательно транзитивные (из $(x, y) \in R$ и $(y, z) \in R$ для $x, y, z \in X$ следует $(x, z) \in R$). Множеством состояний модели объявляются так называемые профили — отображения $f: V \rightarrow \mathfrak{R}$, измеримые относительно алгебры $\mathfrak{A}$, т. е. такие, что $\{v \in V: (x, y) \in f(v)\} \in \mathfrak{A}$ для любых $x, y \in X$. Агрегирующей функцией Эрроу* называется отображение $\sigma: F \rightarrow \mathfrak{R}$ такое, что: 1) соблюдается принцип единогласия: для $x, y \in X$ и $f \in F$ из $(x, y) \in f(v)$ для всех $v \in V$ следует $(x, y) \in \sigma(f)$; 2) групповое предпочтение на паре альтернатив не зависит от индивидуальных предпочтений на других альтернативах, т. е. если на паре альтернатив $x, y \in X$ два профиля $f, g \in F$ совпадают: $f(v) \cap \{(x, y), (y, x)\} = g(v) \cap \{(x, y), (y, x)\}$ для всех $v \in V$, то при этих профилях на этой паре альтернатив совпадают и групповые предпочтения: $\sigma(f) \cap \{(x, y), (y, x)\} = \sigma(g) \cap \{(x, y), (y, x)\}$. Основным результатом Т. Армстронга (предложение 3.2) устанавливает взаимно-однозначное соответствие между множеством агрегирующих функций Эрроу и множеством ультрафильтров булевой алгебры коалиций (напомним, что множество H непустых элементов булевой алгебры $\mathfrak{A}$ называется ультрафильтром, если а) из $A \in H, B \in \mathfrak{A}$ и $A \subset B$ следует $B \in H$; б) из $A, B \in H$ следует $A \cap B \in H$; в) из $A \in \mathfrak{A}$ следует либо $A \in H$, либо $A^c \in H$). Однако приводимое доказательство содержит ошибку: заключительный шаг основан на ложном утверждении, что $g_2(v) = \{(y, z), (z, x)\} \cup p$, где $(x, y, z) \in X$, а $p = [X \setminus \{x, y, z\}] \times \{(x, y, z)\}$, — слабое упорядочение. Чтобы убедиться в обратном, для простоты будем считать, что $X = \{x, y, z\}$, т. е. $p = \emptyset$. Тогда заведомо $(y, x) \in g_2(v)$, $(x, z) \in g_2(v)$ и $(y, z) \in g_2(v)$, вопреки условию отрицательной транзитивности слабого упорядочения. Исправить эту ошибку невозможно, так как в принятых предположениях теорема о биекции не верна. Не случайно поэтому А. Кирман и Д. Зондерман [3], чье доказательство использовал Т. Армстронг, ограничились лишь утверждением о сюръекции множества агрегирующих функций Эрроу на множество ультрафильтров.

Изучению аналогичной модели группового выбора посвящены работы [4–7], где, в частности, разбирается вопрос о биекции между множествами агрегирующих функций Эрроу и ультрафильтров. Как показано в [6], в предположениях Т. Армстронга каждому ультрафильтру соответствует целый класс агрегирующих функций Эрроу, состоящий по меньшей мере из двух представителей (предложения 9 и 10). Чтобы множество агрегирующих функций Эрроу и ультрафильтров привести во взаимно-однозначное соответствие, необходимо изменить предпосылки самой модели. Для этого в [6] расширяется класс предпочтений (рассматривается множество $\mathfrak{R}$ асимметричных и транзитивных бинарных отношений на X), содержащий, как известно, слабые упорядочения (транзитивное отношение P на X — это такое, что для $x, y, z \in X$ из $(x, y) \in P$ и $(y, z) \in P$ следует $(x, z) \in P$). Множество профилей (ситуаций) F определяется как совокупность измерительных отображений $f: V \rightarrow \mathfrak{R}$, а агрегирующая функция Эрроу (общественная функция полезности) — как отображе-

* Arrow Social Welfare Function в [1].