ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ 1973 том IX, вып. 1

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ И МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ПЛАНИРОВАНИЯ И УПРАВЛЕНИЯ

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ ПЛАНОВ ПУТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО ФОРМИРОВАНИЯ ПЛАНОВЫХ ВАРИАНТОВ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

А. М. АЛЕКСЕЕВ, В. А. ВОЛКОНСКИЙ, А. Д. ШАПИРО

(Москва, Новосибирск)

1. ВАРИАНТНАЯ ЗАДАЧА И ЕЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ

Одним из условий широкого внедрения методов оптимального планирования является выделение таких типов экономико-математических моделей, которые были бы достаточно просты, имели бы эффективные алгоритмы и были бы применимы для достаточно широкого круга задач планирования. Едва ли не наиболее широко известной моделью с такими свойствами является так называемая «вариантная модель»

$$\sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{J_k} c_j^k x_j^k \to \min, \tag{1}$$

$$\sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{J_k} a_{ij}^k x_j^k \geqslant b_i, \qquad i=1,\ldots,I, \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{J_k} x_j^k = 1, \tag{3}$$

$$x_j^k \geqslant 0, \qquad j=1,\ldots,J_k, \qquad k=1,\ldots,K. \tag{4}$$

Группы переменных с одинаковыми значениями верхнего индекса k, а также другие элементы модели с тем же индексом будем называть *блоками*. На переменные всех или некоторых блоков в модели может быть наложено дополнительное условие целочисленности

$$x_j^k = 0 \text{ или } 1. \tag{5}$$

Векторы $(c_j^k, a_{1j}^k, \ldots, a_{Ij}^k)$, $j=1,\ldots,J_k$, относящиеся к одному блоку k, называются *вариантами*. Если $x_j^k=1$, то говорят, что данный вариант принят, если $x_j^k=0$, то не принят *. Для общности в модель введен «нулевой блок», варианты которого не связаны условием (3).

---

* Часто под термином «вариантная модель» имеют в виду модель типа (1)—(5), в которой условию целочисленности должны удовлетворять все переменные. В настоящей статье этот термин употребляется в более широком смысле: условие целочисленности может накладываться только на часть переменных или вовсе отсутствовать.

Чаще всего модель применяется для планирования производства группы предприятий или отрасли. Индекс k при этом — номер предприятия; i — номер вида выпускаемой продукции; j — номер технологически допустимого вектора затрат-выпуска; a_{ij}^k — объем выпуска; c_j^k — затраты, соответствующие j-му варианту плана.

Модель использовалась как для выбора вариантов развития производства (см., например, [1, 2]), так и для производственной программы ([3, гл. V, там же подробная библиография]). Она может служить не только как статическая, но и как динамическая, когда ограничения (2) отражают балансы производства и потребления продукции не на одну, а на несколько единиц времени. В этом случае продуктам, произведенным в разные единицы времени, соответствуют разные ограничения, так что i не просто номер вида продукции или ресурса, а номер определенного вида продукции, выпускаемого в определенную единицу времени. При этом вариант определяет развитие предприятия в течение планового периода. Модель (1) может быть использована и по-другому: для каждого года — свой набор вариантов. Тогда один блок k должен соответствовать паре «предприятие — год» (варианты функционирования данного предприятия в данном году). В этом случае по каждому предприятию добавляются ограничения, отражающие совместимость различных вариантов, выбранных для разных лет. Это позволяет часто за счет введения небольшого числа дополнительных ограничений резко сократить число переменных.

В последнее время вариантная модель стала применяться также к задачам маршрутизации [4–6] *. При этом k — номер передвижного предприятия или средства транспортировки, для которого должен быть выбран маршрут движения; j — номер возможного маршрута. Ограничения (2) используются для проверки выполнения целей передвижения. Например, если задание можно определить как посещение каждого из заданных I пунктов (в заданный срок) хотя бы одним из передвижных предприятий, то это условие можно отразить в виде ограничений (2), где

$$a_{ij}^k = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-й пункт посещается } k\text{-м предприятием при } j\text{-м маршруте в заданный срок;} \\ 0 & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

$b_i = 1$, $i = 1, \ldots, I$. Величины c_j^k, как обычно, могут отражать затраты. Если все передвижные предприятия создаются вновь и их число не определяется заранее, то модель содержит только нулевой блок ($k = 0$, ограничения (3) отсутствуют).

2. ВАРИАНТНАЯ И «БЕЗВАРИАНТНАЯ» МОДЕЛИ

Расчеты по вариантной модели дают возможность выбрать наиболее эффективный набор вариантов из тех, которые представлены в модели. Вопрос о формировании массива исходных вариантов остается вне модели. Обычно этот этап разработки проводился вручную. Это резко ограничивает число вариантов, которое может быть практически проверено, и соответственно снижает эффективность применения вычислительной техники, хотя возможности современных ЭВМ (в основном их высокое быстродействие) допускают, вообще говоря, сильное расширение числа проверяемых вариантов. Ограничение количества рассматриваемых вариантов относительно малым числом также существенно снижает адекватность модели, посколь-

* В [7] вариантная модель применяется к задаче оптимальной расстановки речных судов, которая занимает промежуточное положение между обычной транспортной задачей линейного программирования и задачей маршрутизации.

ку искусственно сужает допустимую область по сравнению с реальными технологическими возможностями.

Для ряда задач планирования, как известно, можно построить модели, достаточно простые и заведомо хорошо отражающие хозяйственную реальность, но имеющие существенно более сложную структуру, чем вариантная модель. Отмечая недостатки, характерные для современного использования вариантной модели, ряд авторов высказывали мнение, что от простейшей вариантной формы модели в ряде отраслей следует вообще отказаться и переходить к «безвариантной» модели как более совершенной (см. [8—10]). Отказ от фиксирования жестко заданных способов функционирования всего производственного объекта позволяет использовать более естественную, более детальную систему показателей и полнее отразить структуру объекта и производственные возможности отдельных его частей. Например, безвариантная модель предприятия может содержать ограничения по использованию нескольких различных видов производственных мощностей, балансы производства и потребления промежуточной продукции и т. д., в то время как в вариантной модели производственные возможности описываются одним линейным ограничением (3).

Один из важных аргументов состоит в том, что переход от вариантной к безвариантной постановке задачи позволит избежать субъективизм в формировании исходной информации. Однако термином «безвариантная модель», как нам представляется, пока не обозначается какая-либо достаточно конкретная форма модели. Он употребляется только для отрицания традиционной вариантной модели во имя какой-либо более адекватной модели, которая должна, видимо, в каждом случае разрабатываться индивидуально. Кроме того, более полное описание объектов приводит часто к чрезмерному усложнению модели, росту числа ограничений и переменных. Поэтому в большинстве случаев, когда речь идет о моделировании совокупности большого числа объектов, целесообразнее разделить моделирование отдельных объектов и взаимосвязей между ними. При этом вариантной модели следует оставить функцию отражения взаимосвязей между объектами, а модели отдельных объектов (может быть, существенно более сложной структуры) использовать для формирования вариантов в вариантной модели. Иными словами, речь идет о взаимодействии вариантной модели как модели высшего уровня иерархии с моделями отдельных блоков системы (подмоделями), которые могут иметь совершенно иную природу. В дальнейшем под термином «блоки» будут подразумеваться чаще всего подсистемы моделируемого объекта.

3. ФОРМИРОВАНИЕ ВАРИАНТОВ В СЛУЧАЕ ЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ

Уже накоплен определенный теоретический и практический опыт в построении моделей и алгоритмов для автоматического формирования вариантов в вариантной модели. Этот вопрос можно считать хорошо разработанным, когда в качестве подмоделей (моделей блоков) могут быть взяты модели линейного программирования. Тогда в вариантной модели нет условий целочисленности переменных. Первым по времени и наиболее известным для этого случая является декомпозиционный алгоритм Данцига — Вулфа [11]. Метод аппроксимации производственных возможностей [12] можно интерпретировать так же, как метод формирования вариантов для вариантной модели.

В терминах настоящей статьи эти методы можно описать следующим образом. Пусть для каждого блока имеется достаточно адекватная реальности модель, т. е. задано множество допустимых планов. Для каждого блока выбран ряд допустимых планов и сформированы соответствующие им варианты для построения вариантной модели, при решении которой получаются, в частности, оценки ограничений группы (2). Обозначим их вектором $p = (p_1, \ldots, p_I)$. С помощью этих оценок формируется линейный локальный критерий оптимальности для каждого блока, в соответствии с которым может быть выбран наиболее эффективный вариант (условно-оптимальный план, соответствующий данной системе оценок) и оценена близость к оптимуму всех остальных вариантов. В обозначениях задачи (1) оценка варианта k, j

$$v_j^k = \sum_i p_i a_{ij}^k - c_j^k \tag{6}$$

(показатель его рентабельности). Часть ранее выбранных вариантов, наихудших с точки зрения этой оценки, отбрасывается из вариантной модели, и модель пополняется соответствующим числом новых вариантов, близких к (условному) оптимуму. Затем снова решается вариантная задача, и вновь полученные оценки используются для следующей итерации. Для формирования локальных критериев могут применяться как оценки, полученные при решении вариантной задачи (обозначим их через $\hat{p}$), так и взвешенное среднее между ними и прежними значениями оценок p

$$\hat{p}(n+1) = \alpha_n \hat{p}(n) + (1 + \alpha_n) p(n), \tag{7}$$

где n — номер итерации; α_t — число из отрезка $[0, 1]$ (шаг итерации). Цель такого усреднения — демпфирование колебаний оценок от итерации к итерации. Для алгоритмов такого типа в случае линейных и выпуклых моделей известны достаточно общие теоремы сходимости. При этом на каждой итерации формируется и включается в число исходных вариантов для следующей итерации «усредненный» вариант, представляющий собой взвешенное среднее из всех вариантов, оказавшихся наиболее эффективными на всех прежних итерациях. Он формируется по правилу, аналогичному соотношению (7)

$$x^k(n+1) = \alpha_n \hat{x}^k(n) + (1 - \alpha_n) x^k(n), \tag{8}$$

где $x^k(n)$ — усредненный вариант, сформированный на t-й итерации; $\hat{x}^k(n)$ — наиболее эффективный вариант, найденный на n-й итерации (для каждого блока). В силу линейного или выпуклого характера модели для каждого блока усредненные варианты всегда оказываются допустимыми.

4. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СЕТЕВЫХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ ФОРМИРОВАНИЯ ВАРИАНТОВ

Как известно, для моделирования ряда важных задач планирования линейные и выпуклые модели оказываются неприменимыми. Важным классом моделей, позволяющим дать адекватное описание для широкого круга плановых задач, являются сетевые модели, т. е. модели, основой которых служит граф.

Рассмотрим более подробно примеры использования сетевых моделей для описания блоков и формирования вариантов в вариантной задаче.

Задача маршрутизации. Для простоты изложения сразу же будем пользоваться терминологией задачи о выборе маршрутов для передвижения предприятий (см. раздел 1). Пусть заданные сроки посещения всех пунктов ограничиваются периодом $t = 1, 2, \ldots, T$ и задан граф Γ возможных передвижений, т. е. некоторое подмножество множества всех пар, $i_1, i_2 \in I$, причем если $i_1, i_2 \in \Gamma$ (вершины i_1 и i_2 соединены дугой), то это означает, что предприятие, находящееся в пункте i_1, может в следующую единицу времени быть в пункте i_2.

Вариант k-го блока в вариантной модели однозначно определяется заданием маршрута k-го предприятия, т. е. последовательности $(i_1, i_2, \ldots, i_T)$, $(i_t, i_{t+1}) \in \Gamma$, $t = 1, \ldots, T$. Коэффициенты a_{ij}^k и c_j^k варианта, соответствующего данному маршруту, часто можно задавать в виде суммы функций от дуг и вершин графа, по которым проходит маршрут. В задаче, указанной в конце раздела 1,

$$a_{ij}^k = \sum_{t=1}^{T} \delta(i_t - i), \quad \delta(i) = \begin{cases} 1, & i = 0, \\ 0, & i \neq 0. \end{cases}$$

Транспортные и производственные затраты c_j^k также обычно можно представить в виде

$$c_j^k = c(i_1) + \sum_{t=1}^{T-1} [c(i_t, i_{t+1}) + c(i_{t+1})],$$

где $c(i_1, i_2)$ и $c(i)$ — функции, заданные соответственно на дугах и вершинах графа. Такая форма очень удобна с точки зрения алгоритмизации, так как позволяет использовать пошаговые алгоритмы выбора маршрута.

Заметим, что модель дает возможность выбирать между передвижными и стационарными предприятиями. Стационарное предприятие можно рассматривать как частный случай передвижного, когда допускается только один «маршрут» $i_1 = i_2 = \ldots = i_T$.

Построение вариантов на основе сетевого графика. Пусть каждому блоку k сопоставлен комплекс работ, которые должны быть выполнены в определенной очередности, отражаемой сетевым графиком. Другими словами, задан конечный ориентированный граф Γ без контуров, дуги которого $l = 1, \ldots, L$, называются «работами». Каждой работе l сопоставляются сроки ее начала и окончания t_l и $\bar{t}_l$, причем

$$\bar{t}_l \leqslant t_m, \quad l, m \in \Gamma, \quad l \prec m, \tag{9}$$

если работа l предшествует работе m на графе: $l \prec m$. Кроме того, для каждой работы l задается ее минимальная продолжительность $\tau_l \geqslant 0$, так что

$$\bar{t}_l - t_l \geqslant \tau_l, \quad l \in \Gamma. \tag{10}$$

Вариант определяется заданием всех сроков $(t_l, \bar{t}_l)$, $l = 1, \ldots, L$, удовлетворяющих условиям (9), (10).

Каждой работе сопоставляется набор векторов $f_l(t) = (f_{1l}(t), \ldots, l_{nl}(t))$ выпусков и затрат продукции в каждый момент (или в единицу) времени t, $t = 1, \ldots, T$. Номенклатура продукции соответствует ограничениям (2) вариантной задачи. Кроме того, задается набор чисел $g_l(t)$, соответствующих целевому функционалу (1). Величина $g_l(t)$, строго говоря, должна отражать оценку разности затрат и эффектов, связанных с проведением работы l и не учтенных (в явном виде!) вектором $f_l(t)$. Вектор $(g_l(t), f_l(t))$ есть функция от моментов t_l, $\bar{t}_l$ и начала и конца работы l: $(g_l(t), f_l(t)) = (g_l(t; t_l, \bar{t}_l), f_l(t; t_l, \bar{t}_l))$.

Если моделируется процесс разработки, в котором эффект может быть получен только после окончания всего комплекса работ (отдельные части не могут функционировать до момента завершения комплекса), то обычно $g_l(t) = 0$, $f_l(t; t_l, \bar{t}_l) = 0$, $t \notin [t_l, \bar{t}_l]$. В ряде случаев от этого условия удобнее отказаться.

Вариантная модель может включать балансовые ограничения (2) по затрачиваемым и производимым ресурсам в различные моменты (или периоды) времени. Множество моментов t, для которых устанавливаются такие ограничения, не обязательно совпадает с множеством $t = 1, \dots, T$. Обозначим это множество через Θ. Например, если речь идет о перспективном планировании на 20 лет, то в качестве Θ можно взять множество $\{1, 2, 5, 10, 20\}$. Столбец $\{a^k_{(it)} : i = 1, \dots, I,\ t \in \Theta\}$ матрицы балансовых ограничений типа (2), соответствующий определенному j-му варианту, т. е. некоторому набору моментов t_l, $\bar{t}_l$, $l \in \Gamma$, получается в виде суммы

$$(a^k_{(1t)j}, \dots a^k_{(It)j}) = \sum_{l \in \Gamma^k} f_l^k(t; t_l, \bar{t}_l).$$

Аналогично

$$c_j^k = \sum_t \sum_{l \in \Gamma^k}{}' g_l^k(t; t_l, \bar{t}_l).$$

В качестве простейшего примера рассмотрим граф, изображенный на рис. 1.

Важной задачей, при моделировании которой возникает сетевой график этого простейшего типа, является планирование строительства или реконструкции предприятий, проводимых последовательными очередями.

В настоящее время большое внимание уделяется программно-целевому подходу к проблеме перспективного планирования, которое предусматривает необходимость координации планов хозяйственных единиц с помощью

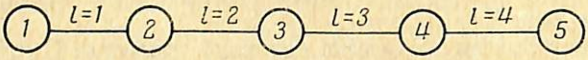

Рис. 1

социально-экономических программ (как правило, межотраслевого характера). Каждая из них решает проблему достижения определенной народнохозяйственной или общественно-политической цели. В качестве инструмента для разработки таких программ предлагают обычно использовать линейные модели или так называемое «дерево целей» [13—15]. При этом подходе широкие возможности открываются для применения моделей типа сетевых графиков. Методы, излагаемые в настоящей статье, могут быть пригодны для согласования программ в единый народнохозяйственный план, согласования программ с моделями отраслей и районов и т. д. Возможности увязки отраслевых планов с сетевой моделью, отражающей процесс реализации целевой программы, описаны в [16].

Наиболее разработанным является применение сетевых графиков в планировании создания территориально-производственных комплексов (ТПК) [17—20]. Сетевые графики позволяют в этом случае учесть в плане требования очередности проведения работ не только технологического характера, относящиеся к работам по созданию одного и того же объекта, но также и экономического характера, касающиеся сроков создания и ввода в действие разных объектов, взаимодействующих в данном ТПК. Это особенно важно в слаборазвитых странах и районах, удаленных от хозяйственных центров.

Блочная модель, ряд блоков которой представлен сетевыми графиками ТПК, по-видимому, является необходимой в системе моделей перспективного планирования хозяйства крупного экономического района. Остальные блоки модели могут отражать развитие хозяйственных отраслей, обеспечивающих рост ресурсов, необходимых для создания ТПК (строительная база, транспорт, отрасли, обслуживающие население, и т. д.). Развитие этих отраслей обычно можно описывать линейными моделями. Пример такой модели дан в [17]. Когда уже произведен выбор объектов, которые должны быть построены в пределах каждого ТПК, такая модель необходима для распределения во времени сроков строительства, для согласования потребностей с ресурсами и с ростом производственных возможностей «обслуживающих» отраслей.

5. РОЛЬ ОЦЕНОК В ЗАДАЧЕ С ДИСКРЕТНЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Как правило, задачи, моделируемые с помощью описанных выше сетевых моделей, приводят к необходимости введения в получаемую вариантную модель условия (5) целочисленности вариантов, т. е. варианты, образуемые в виде линейной комбинации исходных, часто оказываются недопустимыми. Это очевидно для задач маршрутизации. Проиллюстрируем это для задачи выбора сроков проведения работ. Если работа (t_1, t_2) (скажем, строительство производственного объекта) не может начаться раньше, чем будет выполнена работа (t_0, t_1) (строительство дороги), то различные варианты могут определяться разными сроками t_1 окончания строительства дороги, например $t_1 = 1$ и $t_1 = 2$. При этом осуществление «смешанного» варианта, получающегося путем взвешивания этих двух вариантов, например с одинаковыми весами, равными $^1/_2$, требовало бы начать строительство производственного объекта (правда, с вдвое меньшей интенсивностью) на год раньше, чем закончится строительство дороги. Очевидно, этот вариант может быть и недопустимым.

Таким образом, в этих случаях вариантная задача оказывается задачей целочисленного линейного программирования. Точное решение таких задач при достаточно большом числе переменных и ограничений, как известно, представляет большие трудности. В то же время, если рассмотреть вариантную задачу, содержащую все варианты, допустимые с точки зрения сетевых моделей блоков, то число переменных (общее число вариантов) в такой модели оказывается гигантским даже при относительно малых размерах сетей. Для простейшего сетевого графика того типа, который изображен на рис. 1, с общим числом моментов времени T и числом вершин графа n общее число различных вариантов имеет порядок T^n. Не говоря уже о трудностях точного решения целочисленной задачи, даже просто сформировать и ввести в вычислительную машину сразу все варианты, допустимые с точки зрения сетевых моделей, для многих актуальных задач было бы невозможно. В этой ситуации естественно использовать для решения вариантной задачи такие алгоритмы, которые позволяли бы приближаться к оптимуму, не формируя сразу всех возможных вариантов, а вводя их в вариантную модель последовательно, относительно небольшими группами, как это было описано в разделе 3 для линейного случая. Кроме того, основным требованием к алгоритму для больших экономических задач является не получение точного решения, а получение достаточного приближения к оптимуму за приемлемое время счета. Требуемый алгоритм мог бы быть построен по тому же типу, что и алгоритм, описанный в разделе 3. Конечно, использовать непосредственно этот алгоритм невозможно. Он предполагает, что на каждой итерации вычисляется вектор оценок p, а оценки могут быть определены только для линейных, но не для целочисленных задач. В данном случае можно дать следующее расширение понятия оценок, которое пригодно и для целочисленных задач. Используя штрафные функции той или иной формы, сведем исходную задачу (1)—(5) к виду

$$G(y) - y_0 \to \max, \quad \bar{y} \in Y, \tag{11}$$

где множество Y определяется условиями

$$\bar{y} = (y_0, y), \quad y = (y_1, \ldots, y_I),$$

$$y_0 = \sum_{j,k} c_j^k x_j^k, \quad y_i = \sum_{j,k} a_{ij}^k x_j^k, \quad i = 1, \ldots, I, \tag{12}$$

и (3) — (5). Функцию $G(y)$ — сумму штрафов — можно положить равной, например, выражению

$$G(y) = -\sum_{i=1}^{I} M_i \sigma(b_i - y_i), \tag{13}$$

где

$$\sigma(a) = \begin{cases} a, & a \geqslant 0, \\ 0, & a \leqslant 0; \end{cases}$$

M_i — достаточно большие положительные константы. Для получения приближенного решения можно заменить функцию (13) какой-либо гладкой ее аппроксимацией. В алгоритме раздела 3 оценки p, точнее $v_j^k = \sum_i p_i a_{ij}^k - c_j^k$, используются по существу как указатели направления к множеству решений задачи (1), (2). В форме (11), (12) роль таких оценок играют производные функции $G(y)$: $\hat{p} = \operatorname{grad} G(y)$ или компоненты градиента опорной плоскости к множеству $\{(g, y) : g \leqslant G(y)\}$ (векторы обобщенного градиента). Такой вектор оценок можно сопоставить каждому плану x или соответствующему согласно (11) вектору y: $p = \hat{p}(y)$. С помощью подобных оценок можно сформулировать следующее достаточное условие оптимальности плана. Если вектор x, удовлетворяющий условиям (3) — (5), есть наиболее рентабельный план с точки зрения отвечающих ему оценок p, т. е. если x^k — решение задачи $\sum_j v_j^k x_j^k \to \max$ при условиях (3) — (5) и (6), то x — оптимальный план и для всей исходной задачи (1) — (5). Конечно, это условие является необходимым (т. е. оптимальному плану x обязательно отвечают оценки, обладающие указанным свойством) только для нецелочисленных задач (11), (12), (3), (4). Для целочисленной задачи вообще не обязательно существует какой-либо вектор оценок, в которых ее оптимальный план был бы наиболее рентабельным и которые можно было бы назвать оптимальными оценками. Тем не менее использование указанных выше оценок в итеративном процессе, как правило, позволяет находить приближенные решения задачи.

Как уже отмечалось, общее число допустимых вариантов, как правило, бывает очень велико, гораздо больше, чем число ограничений (2), (3) в вариантной задаче. В таких условиях обычно удается найти допустимый план целочисленной вариантной задачи, близкий к решению соответствующей задачи линейного программирования, получающейся из исходной отбрасыванием требования целочисленности переменных. Близость наблюдается и по значению критерия, и в смысле совпадения значительной части переменных (компонент вектора решения). Эта близость проявляется также в том, что целочисленные вариантные задачи эффективно (приближенно) решаются с помощью стохастического итеративного алгоритма, использующего оценки ограничений (2), аналогично тому как они используются в итеративных алгоритмах для точного решения задач линейного программирования. Описание этих алгоритмов и результатов их применения имеется в [3, 21].

Указанный стохастический алгоритм занимает промежуточное положение между итеративным алгоритмом для линейного программирования и случайным перебором вариантов с фиксированным распределением вероятностей. Если задано распределение вероятностей номера выбираемого варианта для каждого предприятия, в котором каждый вариант имеет положительную вероятность, то, проводя независимые испытания с таким распределением, можно быть уверенным, что с вероятностью, равной единице, рано или поздно будет получено решение, как угодно близкое к оптимальному, и даже само оптимальное решение. Однако необходимое число испытаний, вообще говоря, будет приемлемым только в том случае, если распределение вероятностей сосредоточено в достаточно узкой окрестности оптимума. Итеративный алгоритм для линейного программирования состоит в корректировке типа (7) на каждой итерации оценок p_i по невязкам $y_i - b_i$ ограничений (2) и корректировке типа (8) переменных x_j^k в соответствии с показателями рентабельности v_i^k (см. соотношение (6)). Такого типа алгоритм сам по себе может и не приводить в окрестность решения целочисленной задачи, но в силу отмеченной выше близости целочисленных задач к линейным может быть использован для корректировки распределения вероятностей, точнее для того, чтобы распределение концентрировалось вблизи оптимума. Заметим, что вектор $\{x_j^k\}$, удовлетворяющий условиям (3), (4), есть распределение вероятностей для номера варианта, и процедура (8) его корректировки не нарушает этого свойства. Для корректировки оценок p_i используются невязки $y_i - b_i$, рассчитанные по целочисленным планам x, полученным как реализации случайного вектора. Практические расчеты показывают, что в описанном процессе за приемлемое число итераций обычно удается получить достаточное приближение к оптимуму. В алгоритме раздела 3 предлагается другой способ корректировки оценок p_i. Однако принципиально этот алгоритм аналогичен описанному выше. Оценки, получаемые в результате решения целочисленной задачи стохастическим итеративным алгоритмом (будем чисто условно называть их дискретными оценками), можно рассматривать как некое среднее значение оценок типа $\operatorname{grad} G(y)$ в окрестности оптимального значения y.

В алгоритме (раздел 3) для корректировки оценок по (6) в качестве вектора $\hat{p}(n)$ может быть использован, как уже отмечалось, $\operatorname{grad} G(y)$. Однако такой вектор должен резко колебаться от итерации к итерации. Каждая итерация такого алгоритма является, вообще говоря, очень трудоемкой, и чаще всего нельзя рассчитывать на проведение большого числа подобных итераций. В этих условиях лучшие результаты дает использование в качестве $\hat{p}(n)$ вектора дискретных оценок. В разделе 8 будут описаны практические задачи, решавшиеся с помощью описанного алгоритма, которые показывают его полную пригодность для решения больших задач. Чтобы гарантировать его сходимость хотя бы в вероятностном смысле, можно применить тот или иной способ случайного выбора новых вариантов (близких к наиболее рентабельному) для обновления множества вариантов в вариантной задаче.

6. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ОЦЕНОК ПРИ РЕШЕНИИ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ

Наилучшие результаты алгоритмы описанного типа дают в применении к задачам не чисто целочисленным, а смешанным, т. е. таким, в которых условие целочисленности (5) относится не ко всем блокам. По-видимому, в ряде случаев имеет смысл специально заботиться о том, чтобы модель содержала блоки с непрерывными переменными, поскольку это, как правило, делает модель существенно более близкой к задаче линейного программирования и может резко упростить как математический, так и экономический анализ результатов расчетов. Обычно этого можно добиться, соответствующим образом выбирая объект моделирования (например, вводя в модель условия транспортировки сырья и продукции и т. п.).

Запишем смешанную задачу (1) — (5) в форме

$$f(z) + g(x) \to \min, \tag{14}$$

$$Az + Bx = b, \tag{15}$$

$$z \in Z,\ x \in X, \tag{16}$$

где в виде (14), (15) и (16) записаны соответственно соотношения (1), (2) и (3), (4), причем z — вектор переменных, на которые наложено требование целочисленности, а x — вектор остальных переменных. Соотношения (2) могут быть записаны в виде равенств (15) путем добавления блоков с фиктивными переменными. Легко проверить, что задача (14) — (16) эквивалентна задаче

$$G(y) - y_0 \to \max,\quad \bar{y} = (y_0, y),\ \bar{y} \in Y, \tag{11'}$$

где $Y = \{\bar{y}\colon\ y_0 = f(z),\, y = Az,\, z \in Z\}$; $G(y)$ — максимальное значение критерия $-g(x)$ в задаче

$$-g(x) \to \max, \tag{17}$$

$$Bx = b - y, \tag{18}$$

$$x \in X. \tag{19}$$

Функция $G(y)$ в задаче (11′) обычно является гораздо более «гладкой», чем функция (14), не в смысле дифференцируемости, а в том смысле, что ее обобщенный градиент (градиент опорной плоскости) p удовлетворяет условию Липшица с относительно малой константой. Другими словами, оценки p меняются достаточно медленно при изменении «планов производства» y. Естественно, при «сглаживании» (в этом смысле) функции $G(y)$ повышается вероятность того, что оптимальный план $\bar{y}$ окажется и наиболее рентабельным, точнее, что его рентабельность окажется близка к максимальной (по сравнению с функцией типа (13), искусственно сформированной с помощью штрафных функций). Расчеты конкретных задач показывают (см., например, [22]), что при наличии большого числа непрерывных переменных условие оптимальности, указанное в разделе 5, нередко выполняется точно и — что еще важнее — итеративный алгоритм, описанный в разделе 5, даже без использования стохастики сходится к точному решению задачи.

Опишем подробнее одну из модификаций алгоритма, применявшегося для решения таких задач. Однако предварительно заметим, что вектор оценок $\hat{p}(y)$ — обобщенный градиент функции $G(y)$ — получается в результате решения задачи (17) — (19) как вектор оценок ограничений группы (18). Алгоритм состоит в вычислении на каждой n-й итерации вектора $\hat{p}(y(n))$ как двойственных переменных к задаче (17) — (19) и вектора $p(n+1)$ по (7), а также в выборе наиболее рентабельных вариантов (вектор $\hat{z}(n)$) и вычислении $y(n+1)$ по формуле $y(n+1) = (1-\alpha_n)y(n) + \alpha_n A\hat{z}(n)$. Такой алгоритм дал хорошие результаты в применении к задачам согласования сетевого графика и линейной модели (см. раздел 8). Во всех расчетах на 4—5-й итерации достигалось точное решение (выполнялось условие оптимальности плана, раздел 5).

7. АВТОМАТИЧЕСКОЕ ФОРМИРОВАНИЕ ВАРИАНТОВ С ПОМОЩЬЮ СЕТЕВЫХ МОДЕЛЕЙ

Как уже говорилось, интересен случай, когда целочисленные блоки модели заданы не в виде полного набора вариантов — в задаче (14) — (16) столбцы матрицы A,— а в виде той или иной модели сетевого типа. Тогда задача нахождения наиболее рентабельного варианта для каждого блока (вектор $\hat{z}^k(n)$) или серии высокорентабельных вариантов должна состоять уже не в простом переборе столбцов матрицы A (вернее, величин (p, a_j^k), где a_j^k — столбец матрицы A), так как их обычно слишком много, а в решении задачи оптимизации на сети (для каждого блока в отдельности!). Эти задачи отличаются от обычно решаемых задач на сети тем, что обычные задачи оптимизации — такие, как выбор кратчайшего маршрута в задаче коммивояжера, нахождение оптимальных сроков проведения работ в задаче PERT — не учитывают информации, которую содержат оценки p.

В настоящее время достаточно разработаны методы оптимизации сетевого графика в предположении однородности затрат во времени. Затраты, связанные с выполнением каждой работы, зависят только от ее продолжительности и не меняются при сдвигах во времени (см. [23]). В процессе разработки планов развития производства, как правило, нельзя абстрагироваться от неоднородности оценок ресурсов и продукции во времени. Это свидетельствует об актуальности разработки алгоритмов оптимизации сетевых графиков в переменных оценках. В задаче маршрутизации (раздел 4) оценки относятся к пунктам, которые может посетить данное предприятие, и отражает эффект от этого посещения. Рентабельность варианта — маршрута $i_1, \ldots, i_T$ — при этом в обозначениях раздела 4 будет выражаться суммой $v_j^k = \{p[i_1] - c(i_1)\} + \sum_{t=1}^{T-1} \{p[i_{t+1}] - c(i_{t+1}) - c(i_t, i_{t+1})\}$ (аргумент при p в квадратных скобках обозначает не номер итерации, а номер компоненты вектора).

В задачах оптимизации сетевого графика оценки p позволяют подсчитать общий эффект от выполнения каждой работы (или стоимость ее выполнения, взятую со знаком минус) $F_l(t_l, \bar{t}_l) = \sum_t [(p_t, f_l(t, t_l, \bar{t}_l)) - g(t, t_l, \bar{t}_l)]$, где p_t — вектор оценок продукции, выпускаемой и затрачиваемой в момент t. Обычно при использовании сетевого графика в планировании и управлении разработками стоимость каждой работы считается заданной и зависящей в крайнем случае от ее длительности $\bar{t}_l - t_l$: $F_l(t_l, \bar{t}_l) = F_l(\bar{t}_l - t_l)$. Здесь это предположение, естественно, не выполняется. Рентабельность варианта измеряется суммой эффектов от всех работ.

Задача нахождения для каждого блока наиболее рентабельного варианта (или серии высокорентабельных), хотя и является гораздо более простой, чем общая исходная задача, однако она обычно бывает все же достаточно сложна, и применение алгоритмов точного решения (учитывая необходимость применять его многократно, на каждой итерации) в этой ситуации неэффективно. Поэтому большое значение имеет накопленный опыт применения упрощающих приемов и методов, позволяющих легко находить приближенные решения.

Для отыскания наиболее рентабельных вариантов сетевого графика в качестве такого приема, который обычно резко упрощает задачу, а для многих практических задач и дает точное решение, с успехом использовался метод «сращивания» дуг [24], основанный на идее динамического программирования. Заметим сначала, что число переменных в задаче отыскания наиболее рентабельного сетевого графика можно сократить по крайней мере вдвое, вводя вместо сроков начала и конца работ сроки наступления событий (моменты, соответствующие вершинам). Обозначим их $\hat{t}_r$, где $r = 1, \ldots, R$ — номера величин. Очевидно, можно считать, что величина $F_l(t_l, \bar{t}_l)$ — эффект работы l — однозначно определяется сроками $\hat{t}_r$ и $\hat{t}_s$ тех вершин, которые являются началом и концом соответствующей дуги: $F_l(\hat{t}_r, \hat{t}_s) = \min \{F_l(t_l, \bar{t}_l) : \hat{t}_r + \tau_l \leqslant t_l + \tau_l \leqslant \bar{t}_l \leqslant \hat{t}_s\}$.

Число работ может быть сокращено за счет «сращивания» (замены одной работой) нескольких работ, имеющих общее начало и общий конец (рис. 2). Такие работы могут быть заменены одной, эффект которой равен $F_0(\hat{t}_1, \hat{t}_2) = \sum\limits_{l=1}^{3} F_l(\hat{t}_1, \hat{t}_2)$. Могут быть заменены одной работой также те, которые выполняются последовательно и связаны с другими работами графа только началом первой и концом последней из них (рис. 1). Эффект заменяющей работы $F_0(\hat{t}_1, \hat{t}_5) = \min \{\sum\limits_{l=1} F_l(\hat{t}_l, \hat{t}_{l+1}) : \hat{t}_2 \geqslant \hat{t}_1 + \tau_1, \hat{t}_3 \geqslant \hat{t}_2 + \tau_2, \hat{t}_4 \geqslant \hat{t}_3 + \tau_3, \hat{t}_5 \geqslant \hat{t}_4 + \tau_4\}$. Вообще говоря, такие приемы не всегда могут сократить число дуг графа. Например, граф, изображенный на

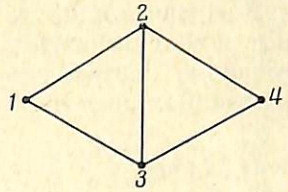

Рис. 2

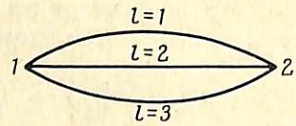

Рис. 3

рис. 2, не может быть упрощен. Однако указанные приемы обычно позволяют резко сократить сложность графа. Кроме того, при моделировании многих практических задач вообще можно обойтись графами, не имеющими подобных «нежелательных» конфигураций. Если в процессе сокращения графа появляется конфигурация типа, показанного на рис. 2, то можно использовать полный перебор, по крайней мере моментов $\hat{t}_2$ и $\hat{t}_3$, или тот или иной метод случайного выбора. В задаче согласования плана создания ТПК с планом развития строительной базы (см. раздел 8) использовался в таких случаях метод покоординатного спуска, причем «жесткие» ограничения очередности — неравенства (9) — заменялись «эластичными». А именно, вместо ограничений (9) в критерий (сумма затрат) добавлялись штрафы за нарушение этих ограничений. Это расширяет число возможных направлений движения при спуске, и благодаря этому появляется возможность достичь более глубокого локального минимума [25]. Если надобность в такой операции возникает достаточно редко, это не является непреодолимым препятствием для практического использования метода.

Следует специально остановиться на алгоритмах решения задач маршрутизации. Точное решение таких задач даже небольшого размера является достаточно трудоемким. В то же время имеются эффективные алгоритмы их приближенного решения. Для задачи коммивояжера предложен ряд простых пошаговых методов решения (см., например, [26, 27]).

Для задачи, описанной в разделе 4, когда за посещение каждого пункта конкурируют несколько предприятий, наиболее естественным является правило, аналогичное «движению к ближайшему пункту». Маршрут каждого предприятия формируется последовательно. Сначала выбирается i_1, для которого величина $p[i] - c(i)$ максимальна. Этот пункт должен быть посещен первым. Следующим будет пункт i_2, для которого достигается

$$\max_{i \neq i_1} \{p[i] - c(i) - c(i_1, i)\}, \tag{20}$$

и т. д. Если $p[i]$ не зависит от i, то этот способ формирования маршрута соответствует выбору очередного пункта i_t, движение к которому связано с наименьшими затратами $c(i) + c(i_{t-1}, i)$, т. е. пункта, «ближайшего» (в этом смысле) к предыдущему. Чтобы увеличить число вариантов, включаемых в вариантную задачу на каждой итерации, естественно ввести стохастику в правило выбора каждого очередного пункта при формировании маршрута. А именно: можно допустить случайный выбор очередного пункта i_t, при котором максимальное значение (20) достигается с вероятностью, близкой к единице, но с небольшой вероятностью могут выбираться и другие пункты с величиной $p[i] - c(i) - c(i_{t-1}, i)$, близкой к максимальной.

Необходимость введения стохастики можно проиллюстрировать на примере ситуации, когда все предприятия изначально находятся в одинаковом положении (например, вновь создаются или выходят из одного пункта). Тогда применение детерминированного алгоритма (без стохастики) будет давать для всех предприятий один и тот же маршрут движения. Для конкретных задач легко модифицировать идею движения к «ближайшему» пункту так, чтобы получающийся алгоритм учитывал особенности моделируемой ситуации.

8. ОПЫТ РЕШЕНИЯ КОНКРЕТНЫХ ЗАДАЧ *

Задача оптимального развития шахтного фонда Южного Кузбасса [22] **. Чтобы не останавливаться на особенностях экономической постановки задачи, не представляющих интереса для настоящей статьи, изложим ее упрощенный вариант. В терминах данной статьи ограничения (2) представляют собой задания по выпуску различных марок угля, а также ограничения по мощностям строительной базы, лимитирующим возможные реконструкции и некоторые другие условия. Общие лимиты капитальных вложений предполагались зависящими от объемов выпуска продукции в предшествующем периоде. Все ограничения относятся к каждому из нескольких периодов плановой перспективы. Модели блоков — шахт — представляют собой сетевые графики, которые для действующих шахт имели вид, изображенный на рис. 1. Для вновь создаваемых шахт графики были подобны изображенному на рис. 3. Вершины графа соответствуют последовательно проводимым реконструкциям, так что вариант определяется заданием сроков проведения реконструкций шахты. Целевой функционал (1) — сумма приведенных текущих затрат. При решении использовался итеративный метод, описанный в разделе 5, для построения наиболее рентабельных вариантов сетевых графиков — метод динамического программирования (раздел 7). Задача решалась в нескольких вариантах. Наибольший практический интерес представляют расчеты с тремя видами марок угля по трем временным периодам (1—3-й годы, 4—10-й и 11—20-й годы). При этом общее число ограничений (2) равно примерно 200; число блоков (шахт) — 12. Большое число блоков и ограничений (2) и несовершенство программы, использовавшейся для решения вариантной задачи, позволяли при ее формировании на каждой итерации вводить не

* Постановка и решение задач проводились в отделе оптимального отраслевого планирования ИЭ и ОПП СО АН СССР под руководством А. М. Алексеева и Л. А. Козлова. В. А. Волконский и А. Д. Шапиро принимали участие в обсуждении методов моделирования и алгоритмов решения.

** В реализации задачи участвовали В. Н. Крючков и В. Д. Речин.

более 100 вариантов (столбцов), в среднем по восемь вариантов для каждого блока. Поэтому сложной проблемой оказалось получение первого допустимого решения. Было проведено четыре итерации с формированием новых вариантов для каждого блока. В результате значение критерия (минимизация суммарных затрат труда) по сравнению с первоначальным снизилось на 12%. Основное улучшение функционала было достигнуто на первых двух итерациях.

В результате оптимизации плана оказалось возможным ввести в действие уже в первые 7 лет две новые шахты. Согласно планам, построенным без применения описанной методики, производственные мощности расширялись только за счет реконструкции действующих шахт.

Задача оптимального перемещения мобильных леспромхозов (ЛПХ) для своевременной вырубки леса в зоне затопления Богучанской ГЭС [6] *. Рассматривались только вновь создаваемые передвижные ЛПХ, число которых заранее не ограничивалось, так что в терминах раздела 1 модель содержала только нулевой блок ($K = 0$). Пункты, которые необходимо посетить,— участки будущего ложа водохранилища, которые должны быть очищены до момента затопления. Возможности перемещения каждого предприятия описываются моделью маршрутизации (раздел 4).

Зона затопления была разделена на 89 участков. Из них 3 должны быть очищены к 1975 г., 21 – к 1976 г., 46 – к 1977 г. и 19 – к 1978 г. ЛПХ могли создаваться начиная с 1970 г., так что длительность маршрутов во времени не превосходила 9 лет ($T = 9$). Всего сформировано около 3000 вариантов (маршрутов). Задача решалась четыре раза (четыре итерации). Согласно полученному плану необходимо создать четыре передвижных ЛПХ. По сравнению с планом, разработанным в Гипролестрансе опытными квалифицированными проектировщиками, расчет обеспечивал экономию более 5% суммарных приведенных затрат.

Задача оптимального размещения и развития стационарных и временных ремонтных баз путевых машинных станций [28] **. Блокам задачи ставятся в соответствие ремонтные базы. Временные базы отличаются от стационарных тем, что они не обязаны функционировать до конца планового периода и могут быть демонтированы в любой год. Железнодорожная сеть разделена на участки, и задан график их ремонтов по годам. Каждому году планового периода $t = 1, \ldots, T$ сопоставляется часть ограничений (2), соответствующих тем участкам, которые должны ремонтироваться в этом году. Варианты размещения и развития каждой базы определяются моментом начала ее функционирования, а для временных баз — также моментом окончания, ее местоположением на сети и совокупностью тех участков, которые должны обрабатываться с данной базы в каждый год планового периода. Мощность базы в году t определяется суммарной длиной участков, закрепленных за ней на этот год. Мощность не может убывать во времени и должна быть всегда полностью загружена. Функционал (1) есть сумма приведенных затрат на создание и расширение базы и на собственно ремонтные работы. Удельные капитальные затраты на расширение базы снижаются с ростом ее мощности (эффект концентрации), а эксплуатационные затраты существенно возрастают при удалении участков от базы. Для решения применялся алгоритм, описанный в разделе 5.

Число возможных вариантов развития для каждой базы в такой постановке задачи очень велико. Поэтому принимается следующий принцип формирования вариантов, сразу же резко сокращающий их число. К базе, расположенной в определенном пункте, на год t последовательно прикрепляются участки (из тех, которые должны ремонтироваться в этом году),

---

* В реализации задачи участвовали А. К. Кулаков и Э. Т. Данилова.

** В реализации задачи принимали участие В. А. Перепелица и В. Н. Поздеев.

наиболее рентабельные для данной базы в смысле эксплуатационных расходов («ближайшие» к базе). Если $c(i)$ — эксплуатационные затраты, связанные с ремонтом участка i, то рентабельность участка определяется «прибылью» $p[i] - c(i)$. Прикрепление новых участков требует прироста капитальных затрат, причем этот прирост при большом числе присоединенных участков становится отличным от нуля (эффект концентрации снижается). Поэтому кривая суммарной рентабельности, за вычетом капитальных затрат, как функция от числа прикрепленных участков должна иметь максимум. Суммарную длину участков, соответствующих максимуму рентабельности, обозначим через $\tilde{N}^t$. Изменение мощности N^t стационарной базы в данном пункте, созданной в год τ, определяется равенством $N^t = \min\limits_{t \leqslant s \leqslant T} \tilde{N}^s$, $t \geqslant \tau$. Аналогично определяются мощности и прикрепление участков для временных баз. Теперь вариант развития базы однозначно определяется местом ее дислокации и отрезком времени ее функционирования.

Описанным методом проводился расчет плана размещения и развития ремонтных баз для Западно-Сибирской железной дороги. Вариантная задача содержала 83 ограничения группы (2) и 83 блока (базы). Было проведено две итерации. Существенным отличием рассчитанного плана от плана Управления Западно-Сибирской железной дороги, было выявление нового пункта размещения базы, что дало экономию 300 тыс. руб., в основном за счет снижения транспортных затрат.

Оптимизация плана создания территориально-производственного комплекса (ТПК), согласованного с планом развития строительной базы [17, 28] *. Задача состояла из двух блоков: сетевого графика, описывающего создание ТПК, и линейной модели развития стройбазы. Объектами моделирования служили Братский и Богучанский ТПК. Расчет проводился на 20-летний период. Вариантная задача содержала около 100 ограничений типа (2). Сетевой график состоял из 35 работ. Решение проводилось методом, близким к алгоритму, описанному в разделе 6. При разных модификациях задачи в результате 4—7 итераций получалось точное решение. Параметр α_n (раздел 6) выбирался так, чтобы значение критерия от итерации к итерации изменялось монотонно. В результате спрос на продукцию стройбазы (вектор y в обозначениях раздела 6) становился существенно более равномерным во времени за счет заблаговременного создания запасов продукции стройбазы, жилого фонда и т. д. По сравнению с первоначальным планом значение критерия (сумма приведенных затрат на развитие строительной базы) уменьшилось на 15—20%.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Г. Аганбегян. К методологии оптимального планирования и размещения производства в отдельных отраслях. В сб. Оптимальное планирование размещения и специализации производства в отдельных отраслях. Экон.-матем. серия, Вып. 3. Новосибирск, Изд-во СО АН СССР, 1962.
2. Л. А. Козлов. О типовых экономико-математических моделях размещения и специализации производства отраслей промышленности. Изв. СО АН СССР. Сер. обществ. наук, 1964, № 9, вып. 3.
3. Оптимальный план отрасли. М., «Экономика», 1970.
4. Б. А. Лагоша, В. Г. Медницкий, А. Д. Шапиро. Оптимальное планирование дискретных процессов. М., 1967 (ЦЭМИ АН СССР).
5. А. Д. Шапиро. Применение целочисленных моделей к задачам планирования и управления. Диссертация. М., 1969 (ЦЭМИ АН СССР).
6. А. К. Кулаков, А. М. Алексеев. Мобильные (плавучие) леспромхозы и эффективность их применения (Обзор). М., 1971 (Всесоюз. н.-и. и проектный ин-т экономики, организации управления производством и информации по лесной, целлюл.-бум. и деревообрабатывающей пром-сти).

* В реализации задачи участвовали В. Н. Крючков, Э. Н. Долинина и В. А. Шолкин.

7. М. П. Москаленко. Постановка и метод решения задачи оптимальной расстановки речных судов. В сб. Оптимальное планирование размещения производства. Новосибирск, 1965 (Новосиб. гос. ун-т).
8. А. Г. Аганбегян. О совершенствовании экономико-математических моделей и методов оптимального отраслевого планирования в промышленности. Докл. на Всес. конфер. по применению экон.-мат. методов и ЭВМ в отраслевом планировании и управлении. М., 1966.
9. Методика оптимального перспективного отраслевого планирования. М., 1966 (ЦНИИТЭСтром МПСМ СССР. НИИЭС Госстроя СССР).
10. В. И. Гохман. Методические вопросы оптимального перспективного отраслевого планирования (на примере пром-сти строит. материалов). Диссертация. М., 1969 (МИНХ им. Г. В. Плеханова).
11. Дж. Данциг, Ф. Вольф. Алгоритмы разложения для задач линейного программирования. Математика, 1964, т. 8, № 1.
12. В. Ф. Пугачев. Оптимизация планирования. М., «Экономика», 1968.
13. Н. П. Федоренко. Совершенствовать систему социалистического планирования. Экономика и матем. методы, 1971, т. VII, вып. 4.
14. М. Я. Лемешев, А. И. Панченко. О разработке программ развития межотраслевых народнохозяйственных комплексов. В сб. Тезисы докл. на Первой конфер. по оптимальному планированию и управлению народным хоз-вом. М., 1971 (ЦЭМИ АН СССР).
15. А. П. Дубнов, А. А. Кин, Б. П. Орлов. Методологические вопросы программного планирования освоения новых территорий. В сб. Экономико-географические проблемы формирования территориально-производственных комплексов Сибири. Новосибирск, «Наука», 1971.
16. Л. А. Козлов. Оптимизация отраслевых планов при реализации долговременных экономических программ. В сб. [14].
17. А. М. Алексеев, В. А. Волконский. Согласование ввода взаимосвязанных производственных объектов отдельных отраслей. В сб. Моделирование развития размещения производства отраслей промышленности. Ч. 1. Новосибирск, 1970 (АН СССР. Сиб. отд. ИЭ и ОПП).
18. В. Н. Богачев. Об особенностях строительства крупных территориально-производственных комплексов Сибири. В сб. Экономико-географические проблемы формирования территориально-производственных комплексов Сибири. Новосибирск, 1969 (АН СССР. Геогр. об-во СССР. Сиб. отд. ИЭ и ОПП).
19. J. A. Carruthers, Alb. Battersby. Advances in Critical Path Methods. Oper. Res. Quart., 1969, v. 17, N 4.
20. B. O. Szuprowicz. Network Planning and Economic Development. New Scientist, june 1966.
21. А. Б. Поманский, А. Д. Шапиро. Математические методы решения отраслевых экономических задач (Стохаст. алгоритмы решения задач с дискретными переменными). М., 1969. (Отд-ние ВНИИЭМ по н.-техн. информации в электротехнике).
22. А. М. Алексеев, В. Н. Крючков, В. А. Шолкин. Формирование долгосрочных региональных строительных программ. В сб. Региональная экономика и территориальное планирование. Ч. 1. Новосибирск, «Наука», 1971.
23. Л. Р. Форд, Д. Р. Фолкерсон. Потоки в сетях. М., «Мир», 1966.
24. А. М. Алексеев, В. Н. Крючков. Оптимизация сроков ввода производственных объектов при создании территориально-производственного планирования. В сб. [22].
25. А. М. Алексеев, Э. Н. Долинина, В. Н. Крючков. Использование автоматизированного расчета для формирования строительной программы ТПК. В сб. [15].
26. В. А. Перепелица. О двух задачах из теории графов. Докл. АН СССР. Серия матем., 1970, т. 194, № 6.
27. К. В. Гайндрик, В. А. Жидков. Алгоритм решения упрощенной задачи разводки. В сб. Математические методы решения экономических задач. Т. 1. М., «Наука», 1969.
28. А. М. Алексеев, В. А. Перепелица, В. Н. Поздеев. Оптимизация размещения и развития стационарных и временных ремонтных баз путевых машинных станций. В сб. Оптимизация развития и размещения производства. Вып. 1. Новосибирск, «Наука», 1973.
29. Основные положения оптимального планирования развития и размещения производства. М.,-Новосибирск, «Наука», 1968.
30. А. М. Алексеев, Л. А. Козлов, В. Н. Крючков. Увязка динамической модели развития отраслевой системы с сетевыми моделями развития ее производственных объектов (на примере шахтного фонда Южного Кузбасса). В сб. Оптимизация планов развития и размещения отраслей промышленности. Новосибирск, «Наука», 1971.

Поступила в редакцию
19 V 1972