ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ 1973 том IX, вып. 1

МАКРОЭКОНОМИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

АНАЛИЗ СБАЛАНСИРОВАННОГО РОСТА В ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ НАРОДНОГО ХОЗЯЙСТВА

М. Н. ЕФИМОВ, С. М. МОВШОВИЧ

(Москва)

Важным инструментом изучения свойств оптимальных планов и цен в народнохозяйственных моделях экономической динамики является понятие равновесного сбалансированного роста. В настоящей статье изучается равновесный рост в модели, являющейся некоторым обобщением [1, 2, 3, стр. 23–83].

1. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

Состояние экономики анализируется в дискретные моменты времени $t = 0, 1, \ldots, T$. Течение производственных процессов в промежуточные моменты не рассматривается. Интервал $(0, T)$ естественно назвать плановым периодом.

В экономике обращаются (производятся и потребляются) n продуктов. Производственная сфера состоит из n отраслей, каждая из которых производит один продукт, используя для этого один производственный процесс, характеристики которого неизменны во времени. Неизменность технологических характеристик производственных процессов делает невозможным отражение в модели влияния технического прогресса. Однако, как показывает опыт вычислений, в моделях, оперирующих небольшим числом агрегированных показателей, подобная неадекватность не приводит к значительным ошибкам. Это, очевидно, объясняется малым влиянием технического прогресса на крупноагрегированные технологические матрицы. Косвенным подтверждением этого может служить близость технологических матриц для экономики Японии и США [4], которые значительно отличаются друг от друга по уровню развития технологии.

Затраты и выпуск в отрасли пропорциональны интенсивности производственного процесса, т. е. рассматриваемая модель является линейной. Интенсивности отраслевых производственных процессов ограничены наличием производственных мощностей. В качестве единицы измерения мощности принята интенсивность производственного процесса, выпускающего единицу продукта. Поддержание производственных мощностей осуществляется в модели путем принудительной реновации, затраты на которую пропорциональны мощностям. Модель предусматривает возможность ввода в эксплуатацию новых мощностей, строительство которых — процесс, продолжающийся в течение нескольких периодов. Поэтому затраты фондообразующих продуктов, необходимые для ввода новых мощностей, и сам ввод распределены во времени. Наряду со сферой производства модель включает личное и общественное потребление (которые между собой не разделены). Предполагается, что структура потребления неизменна во времени, его интенсивность определяется объемом заработной платы в производственной сфере, который в свою очередь пропорционален интенсивностям производственных процессов. Модель является замкнутой в том смысле, что все производимые продукты используются внутри самой модели, причем только они служат источником накопления, производственного и непроизводственного потребления. Связь между параметрами модели задается соотношениями

$$A'x_t + Cy_t + \Gamma z_t + S_t \leqslant x_t, \tag{1}$$

$$lx_t = y_t, \tag{2}$$

$$S_t = B\sum_{\tau=1}^{\tau_0} \Psi(\tau) x_t^\tau, \tag{3}$$

$$x_t \leqslant z_t, \quad t = 0, 1, \ldots, T, \tag{4}$$

$$z_t \leqslant z_{t-1} + \sum_{\tau=0}^{\tau_0-1} \Phi(\tau) x_t^\tau, \tag{5}$$

$$x_t^\tau \leqslant x_{t-1}^{\tau+1}, \quad \tau = 0, \ldots, \tau_0 - 1; \quad t = 1, \ldots, T, \tag{6}$$

$$z_t \geqslant 0,\ x_t \geqslant 0,\ x_t^\tau \geqslant 0,\ y_t \geqslant 0,\ t = 0, \ldots, T, \tag{7}$$

где $x_t = (x_{1t}, x_{2t}, \ldots, x_{nt})$ — вектор интенсивностей производственных процессов в отраслях народного хозяйства в период t; $z_t = (z_{1t}, z_{2t}, \ldots, z_{nt})$ — вектор производственных мощностей отраслей $j = 1, \ldots, n$ в момент t; A' — матрица удельных прямых затрат, ее элемент a_{ij}', $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, n$, — затраты i-го продукта в процессе производства единицы j-го продукта; $C = (c_1, \ldots, c_n)$ — вектор, задающий структуру потребления, т. е. объемы потребления всех видов продуктов, отнесенные к некоторой условной единице измерения интенсивности трудовой деятельности, например к рублю заработной платы; y_t — интенсивность трудовой деятельности в период t, измеренной в единицах, согласованных с C; Γ — матрица удельных реновационных затрат, ее элемент γ_{ij} — затраты за один период i-го продукта для поддержания уровня функционирования единицы производственной мощности j-й отрасли. Очевидно, $\gamma_{ij} \neq 0$ лишь для индексов i, относящихся к группе фондообразующих продуктов. Каждый столбец матрицы Γ содержит хотя бы один ненулевой элемент; $S_t = (s_{t1}, \ldots, s_{nt})$ — вектор затрат на строительство новых мощностей в период t. Отличны от нуля лишь компоненты вектора S_t, относящиеся к фондообразующим продуктам; B — матрица удельных прямых затрат на расширение мощностей (фондоемкостей); ее элемент b_{ij} — полные затраты i-го продукта, необходимые для расширения на единицу мощности j-й отрасли; $b_{ij} \neq 0$ — только для фондообразующих продуктов. Каждый столбец матрицы B содержит хотя бы один ненулевой элемент; $x_t^\tau = (x_{1t}^\tau, \ldots, x_{nt}^\tau)$ — вектор прироста мощностей; его компонента x_{it}^τ показывает объем новых мощностей i-й отрасли, намеченных в период t к вводу через τ периодов, т. е. в период $t + \tau$, $\tau = 0, \ldots, \tau_0$; $\Psi(\tau)$, $\tau = 1, \ldots, \tau_0$ — диагональные матрицы коэффициентов распределения во времени капиталовложений в строительство новых мощностей; элемент матрицы $\gamma_{ij}(\tau)$ — доля полных затрат на строительство новых мощностей j-й отрасли, которую необходимо произвести за τ периодов до окончания строительства; $\sum_{\tau=1}^{\tau_0} \Psi(\tau) = E$ (E — единичная матрица порядка n); $\Phi(\tau)$, $\tau = 0, \ldots, \tau_0 - 1$ — диагональные матрицы коэффициентов распределения во времени освоения новых мощностей. Элемент матрицы $\varphi_{ij}(\tau)$ показывает, какая доля новых мощностей j-й отрасли осваивается за τ лет до полного ввода в эксплуатацию строящихся мощностей; $\sum\limits_{\tau=0}^{\tau_0-1} \Phi(\tau)=E$; τ_0 — максимальный срок строительства; $l=(l_1,\ldots,l_n)$ — вектор удельных затрат труда в отраслях народного хозяйства.

Все введенные здесь матрицы, векторы и скаляры неотрицательны. Для завершения формального описания динамической модели необходимо задать начальные условия, определяемые наличием производственных мощностей z_0 в начале планового периода и объемами строительства новых мощностей $x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^{\tau_0}$, начатого или продолженного, но не завершенного в начале планового периода $(0, T)$.

Прокомментируем теперь соотношения (1)—(7). Соотношения (1) являются балансом затрат и выпуска продуктов. Затраты складываются из производственных затрат $A'x_t$, потребления Cy_t, затрат на реновацию Γz_t и капитальных вложений S_t. Все составляющие затрат покрываются валовым выпуском x_t. Балансовые соотношения (1) допускают неполное использование производимой продукции. При этом принято, что неиспользованная продукция не сохраняется, ее ликвидация не требует каких-либо затрат. В качестве периода дискретности естественно принять год. Под мощностью подразумевается возможный объем выпуска продукции в течение года. Поскольку продолжительность производственных процессов, не связанных с освоением новых мощностей, как правило, существенно меньше года, выпускаемая в некотором периоде продукция может использоваться для нужд производства и потребления в том же периоде. Поэтому в (1) затраты и выпуск отнесены к одному и тому же периоду времени.

Соотношения (2) показывают, что объем трудовой деятельности в производственной сфере складывается из объемов трудовой деятельности в отдельных отраслях. Все трудовые ресурсы, которые используются в системе, должны обеспечиваться соответствующим фондом потребления. Возрастающая во времени интенсивность использования трудовой деятельности может быть обеспечена как экстенсивным ростом привлекаемой рабочей силы (при этом структура и уровень потребления работающего не изменяются), так и ростом производительности труда (при неизменной структуре растет потребление на одного работающего). Выбор соответствующих нормирующих коэффициентов позволяет учесть в модели потребление на душу населения в предположении, что доля работающих меняется медленно. Соотношения (2) допускают иную, близкую интерпретацию. Предположим, что y_t — интенсивность потребления в период t, а l — нормированный вектор удельных заработных плат в отраслях народного хозяйства. Тогда из соотношений (1), (2) следует, что вся зарплата расходуется на потребление; возможные накопления в модели не учитываются. Из соотношений (1) и (2) вытекает неизменность общественного и личного потребления, приходящегося на 1 руб. зарплаты в производственной сфере. Альтернативной является гипотеза о неизменности потребления, приходящегося на 1 руб. всех выплат населению, включающих в себя зарплату в производственной и непроизводственной сферах, пенсии, стипендии и пр. В рамках модели (1)—(7) учет всех выплат населению может быть осуществлен одним из двух способов. Можно считать неизменным отношение всех выплат населению к объему заработной платы в производственной сфере. Очевидно, при этом гипотезы неизменности потребления на 1 руб. зарплаты в производственной сфере и на 1 руб. всех выплат населению оказываются эквивалентными. Можно также считать, что неизменно отношение зарплаты в непроизводственной сфере и прочих выплат населению к суммарному валовому выпуску отраслей производства. В последнем случае (2) преобразовывается в

$$lx_t + \frac{\Pi}{\Sigma x_{i0}} \Sigma x_{it} = y_t, \qquad (2')$$

где П — зарплата в непроизводственной сфере и прочие выплаты населению; x_0 — вектор валовых выпусков в базовом году.

Учет ограниченности объема трудовой деятельности в форме (2) был предложен В. А. Волконским.

В (3) раскрывается структура капитальных вложений. В период t они складываются из затрат на строительство, начатое в моменты t, $t-1, \ldots$ $\ldots$, $t - \tau_0 + 1$. Соотношения (4) показывают, что интенсивность производственных процессов ограничена наличной производственной мощностью. Соотношения (5) определяют динамику мощностей. Приращение мощностей в период $t-1$, t является результатом не только завершенного строительства, но и частичного ввода еще не достроенных мощностей. Мощности, накопленные к периоду t, не обязательно используются полностью. Если соотношения (3) выполняются как равенства, а (4) — как неравенства, то мощности не используются, но сохраняются. При этом реновационные затраты производятся для поддержания как используемых, так и неиспользуемых мощностей. Если соотношения (5) выполняются как неравенства, то соответствующие мощности не сохраняются.

В каждый момент t не только принимается решение о начале нового строительства, но и пересматриваются принятые ранее решения о строительстве, не законченном к моменту t. Незавершенное строительство в соответствии с (6) может быть либо продолжено в полном объеме, либо частично или полностью свернуто. Соотношения (6) связывают объемы строительства x_t^τ и $x_{t-1}^{\tau+1}$, начатого в период $t + \tau - \tau_0$. Из (3), (5) и (6) следует, что при сворачивании незавершенного строительства освоенные мощности продолжают нормально функционировать, неосвоенные капитальные затраты, не подтвержденные дальнейшими вложениями, утрачиваются.

Формулы (1)—(7) вместе с начальными условиями определяют множество возможных траекторий динамического развития экономики. Выбор наилучшей траектории определяется целевой функцией. В самой общей форме целевая функция зависит от всей траектории экономического развития. Будем считать, что для сравнения траекторий достаточно сравнивать между собой состояния экономики в конце планового периода. Такое допущение оправдано соотношениями (2), которое гарантирует рост потребления не меньший, чем рост производства *. Состояние экономики в момент t определяется параметрами z_t, x_t, y_t, x_t^τ. Эти параметры, и только они, определяют множество возможных состояний в момент $t+1$. Предполагая целевую функцию линейной, получим ее в форме

$$R(x_T) = R_{\text{М}} z_T + R_{\text{В}} x_T + R_{\text{П}} y_T + \sum_{\tau=1}^{\tau_0} R_{\text{Н}}^\tau x_T^\tau \to \max, \qquad (8)$$

где $R = (R_{\text{М}}, R_{\text{В}}, R_{\text{П}}, R_{\text{Н}}^1, \ldots, R_{\text{Н}}^{\tau_0})$ — неотрицательный $(\tau_0 + 2)\, n + 1$-мерный вектор, компоненты которого соизмеряют полезность для общества наличных производственных мощностей, валового выпуска, потребления

* Поэтому стремление к наилучшему конечному состоянию по крайней мере качественно совпадает со стремлением к максимальному удовлетворению общественных и личных потребностей.

и незавершенного строительства. При такой форме целевой функции снимается так называемая проблема хвоста. Естественно, возникает вопрос о выборе конкретных численных значений компонент R. Из установленных ниже свойств модели (1)—(8) и теоремы о магистрали [5] следует, что знание конкретных значений R несущественно для выбора оптимального плана.

В дальнейшем нам понадобится задача, двойственная к (1)—(8)

$$p_{40}z_0 + \sum_{\tau=1}^{\tau_0} p_{50}^{\tau} x_0^{\tau} \to \min \tag{9}$$

при условиях

$$p_{1t}(A' - E) + p_{2t}l + p_{3t} \geqslant 0,\ t = 0, \ldots, T-1, \tag{10}$$

$$p_{1t}C - p_{2t} \geqslant 0,\ t = 0, \ldots, T-1, \tag{11}$$

$$p_{1t}\Gamma + p_{4t} - p_{4t+1} - p_{3t} \geqslant 0,\ t = 1, \ldots, T-1, \tag{12}$$

$$p_{1t}B\Psi(\tau) - p_{4t}\Phi(\tau) + p_{5t}^{\tau} - p_{5t+1}^{\tau-1} \geqslant 0, \quad \tau = 1, \ldots, \tau_0, \quad t = 1, \ldots, T-1, \tag{13}$$

$$\left.\begin{aligned} &p_{1T}(A' - E) + p_{2T}l + p_{3T} \geqslant R_{\text{В}}, \\ &p_{1T}C - p_{2T} \geqslant R_{\text{П}}, \\ &p_{1T}\Gamma + p_{4T} - p_{3T} \geqslant R_{\text{М}}, \\ &p_{1T}B\Psi(\tau) - p_{4T}\Phi(\tau) + p_{5T}^{\tau} \geqslant R_{\text{Н}}^{\tau},\ \tau = 1, \ldots, \tau_0. \end{aligned}\right\}. \tag{14}$$

Все векторы p неотрицательны. Решение задачи (9)—(14) образует динамическую систему оптимальных цен. Ее поведение служит одним из объектов дальнейших исследований.

2. РАВНОВЕСНЫЙ РОСТ

Предположим, что в процессе экономического развития сложилась определенная отраслевая структура, не изменяющаяся во времени, а численные значения всех показателей растут с постоянным темпом α, т. е. $z_t = \alpha^t z$, $x_t = \alpha^t x$ и т. д. Тогда соотношения (1)—(6) примут вид

$$A'x + Cy + \Gamma z + B\sum_{\tau=1}^{\tau_0} \Psi(\tau) x^{\tau} \leqslant x, \tag{15}$$

$$lx = y, \tag{16}$$

$$x \leqslant z, \tag{17}$$

$$\alpha z \leqslant z + \alpha \sum_{\tau=0}^{\tau_0-1} \Phi(\tau) x^{\tau}, \tag{18}$$

$$\begin{gathered} \alpha x^{\tau} \leqslant x^{\tau+1},\ \tau = 0, \ldots, \tau_0 - 1, \\ x \geqslant 0,\ z \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ x^{\tau} \geqslant 0. \end{gathered} \tag{19}$$

Естественно стремление такого выбора векторов x, x^{τ}, z и y, который обеспечивал бы наиболее быстрый рост экономики. Учитывая это стремление, получим задачу

$$\alpha \to \max \tag{20}$$

при условиях (15)—(19). Преобразуем теперь задачу (15)—(20), что позволит сократить ее размерность и выяснить важные свойства ее решения. Из неравенств (15), (17) и (18) следует сразу, что если в решении $\bar{z} \geqslant \bar{x}$, то положив $\bar{z} = \bar{x}$ и оставляя остальные параметры неизменными, мы снова получим решение. Поэтому, не уменьшая общности, можно считать, что $\bar{z} = \bar{x}$.

Первая интерпретация (2) подсказывает путь сокращения размерности системы. Очевидно, затраты на потребление, связанные с функционированием i-й отрасли с единичной интенсивностью, составляют Cl_i. Эти затраты можно добавить к производственным, заменяя матрицу прямых затрат A' на сумму $A' + C^l$, где $C^l = Cl$ — произведение матрицы-столбца C на матрицу-строку l.

Предположение 1. Элементы матриц $\Psi(\tau)$ и $\Phi(\tau)$ удовлетворяют условиям

$$\frac{\Phi_{ii}(\tau+1)}{\Phi_{ii}(\tau)} \leqslant \frac{\Psi_{ii}(\tau+1)}{\Psi_{ii}(\tau)} \tag{21}$$

для всех i и $\tau = 0, \ldots, \tau_0 - 1$. Можно показать, что при выполнении (21) среди решений задачи (15)—(20) есть такое, в котором все условия (19) выполняются как равенства. В дальнейшем будем рассматривать только эти решения.

Предположение 1 не является по существу ограничительным, поскольку оно отражает экономически очевидный факт опережения доли капиталовложений в строительство новых мощностей в сравнении с долей их ввода. Учитывая сделанные замечания и полагая $A = A' + \Gamma + C^l$, представим (15)—(20) в виде

$$(E - A)x \geqslant B \sum_{\tau=1}^{\tau_0} \Psi(\tau)\alpha^{\tau-1}x^1, \tag{22}$$

$$x^1 \geqslant (\alpha - 1)\left(\sum_{\tau=0}^{\tau_0-1} \Phi(\tau)\alpha^\tau\right)^{-1} x,$$

$$x^{\tau+1} = \alpha^\tau x^1, \; x^0 = \alpha^{-1}x^1,$$

$$x \geqslant 0, \quad x^1 \geqslant 0.$$

Положим

$$F(\alpha) = A + (\alpha - 1)B \sum_{\tau=1}^{\tau_0} \Psi(\tau)\alpha^{\tau-1} \left(\sum_{\tau=0}^{\tau_0-1} \Phi(\tau)\alpha^\tau\right)^{-1}. \tag{23}$$

Предположение 2. Система $x \geqslant Ax$ имеет неотрицательное решение.

Лемма 1. *Пусть справедливо предположение 2. Тогда задача* (20) *при условиях $x \geqslant F(\alpha)x$, и, следовательно, задача* (15)—(20) *разрешимы. Их решение $\alpha_0 \geqslant 1$.*

Доказательство. Пусть $\bar{x}$ — решение системы $x \geqslant Ax$. Тогда $\bar{x}$, $x^1 = 0$ и $\alpha = 1$ образуют решение систем (22) и (15)—(19). Положим $\sup \alpha = \alpha_0$. Очевидно, $1 \leqslant \alpha_0 \leqslant \infty$. Остается доказать, что α_0 удовлетворяет системе (22). Но неравенства (22) выполняются, если $x \geqslant F(\alpha)x$, $x \geqslant 0$; обратное также верно. Следовательно, существуют последовательности $\alpha_n \to \alpha_0$ и $x_n \geqslant 0$, для которых $x_n \geqslant F(\alpha_n)x_n$. Считая x_n ограниченными и выделяя сходящуюся подпоследовательность, получим, учитывая непрерывность $F(\alpha)$, $\bar{x} \geqslant F(\alpha_0)\bar{x}$. Лемма доказана. Предположение 2, гарантирующее существование решения задачи (15)—(20), выполняется в любой жизнеспособной экономической системе. α_0 называется максимальным или неймановским темпом сбалансированного роста. Векторы $\bar{x}$, $\bar{x}^\tau$, образующие решение (15)—(20), определяют оптимальные отраслевые пропорции и вложения в строительство, т. е. пропорции, обеспечивающие максимально быстрый сбалансированный рост экономики.

Предположение 3. Матрица A неразложима.

Лемма 2. *Пусть справедливо предположение 3. Тогда решение $\bar{x}$, $\bar{x}^0, \ldots$ $\ldots, \bar{x}^{\tau_0}$ задачи* (22), (20) *единственно (с точностью до нормировки) и положительно. Вектор $\bar{x}$ является собственным вектором матрицы $F(\alpha_0)$. Соответствующее ему собственное значение равно единице.*

Доказательство. Из неразложимости A и $\alpha_0 \geqslant 1$ в силу (23) следует, что $F(\alpha_0)$ — неразложимая матрица. Вектор $\bar{x}$ удовлетворяет, очевидно, условиям $\bar{x} \geqslant F(\alpha_0)\bar{x}$. Предположим, что $\bar{x} \neq F(\alpha_0)\bar{x}$. Тогда $(E+F(\alpha_0))^{n-1}\bar{x} > (E+F(\alpha_0))^{n-1}F(\alpha_0)\bar{x}$, поскольку из неразложимости $F(\alpha_0)$ следует $(E+F(\alpha_0))^{n-1} > 0$ (см. например, [6]). Положим $v = (E+F(\alpha_0))^{n-1}\bar{x}$. Тогда, в силу коммутативности умножения матриц $(E+F(\alpha_0))^{n-1}$ и $F(\alpha_0)$, $v > F(\alpha_0)v$, причем $v > 0$. Два последних неравенства невозможны, если α_0 — решение задачи (22), (20). Итак, доказано, что $\bar{x} = F(\alpha_0)\bar{x}$, т. е. $\bar{x}$ — неотрицательный собственный вектор матрицы $F(\alpha_0)$. Неразложимая матрица обладает единственным неотрицательным собственным вектором. Следовательно, собственное значение $\lambda = 1$ максимально по модулю и соответствующий ему вектор $\bar{x} > 0$. Лемма доказана.

Построим систему, двойственную (15)—(19) при $\alpha = \alpha_0$. Следуя [7], в $(4+\tau)n$-мерном евклидовом пространстве точек $v = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5^0, \ldots$ $\ldots, v_5^{\tau_0-1})$ построим множество

$$V = \Big\{ v\colon v_1 = (E-A')x - Cy - \Gamma z - B\sum_{\tau=1}^{\tau_0} \Psi(\tau)x^\tau, \quad v_2 = y - lx,$$

$$v_3 = z - x,\ v_4 = (1-\alpha_0)z + \alpha_0 \sum_{\tau=0}^{\tau_0-1} \Phi(\tau)x^\tau,\ v_5^\tau = x^{\tau+1} - \alpha_0 x^\tau,$$

$$x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0,\ x^\tau \geqslant 0 \Big\}.$$

Из максимальности α_0 следует, что пересечение множества V с внутренностью соответствующего положительного ортанта пусто. V — выпуклый замкнутый многогранный конус. Он может быть нестрого отделен от положительного ортанта гиперплоскостью с направляющим вектором $P = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5^0, \ldots, p_5^{\tau_0})$. Этот вектор, очевидно, удовлетворяет условиям

$$\left.\begin{aligned}
&p_1A' + p_2 l + p_3 \geqslant p_1,\\
&p_1C - p_2 \geqslant 0,\\
&p_1\Gamma - p_3 + (\alpha_0 - 1)\,p_4 \geqslant 0,\\
&p_1B\Psi(\tau) - \alpha_0 p_4\Phi(\tau) + \alpha_0 p_5^\tau - p_5^{\tau-1} \geqslant 0, \quad \tau = 1, \ldots, \tau_0 - 1,\\
&\alpha_0 p_5^0 - \alpha_0 p_4 \Phi(0) \geqslant 0,\ \tau = 0,\\
&p_1 B\Psi(\tau) - p_5^{\tau_0-1} \geqslant 0,\ \tau = \tau_0,
\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

$$\begin{gathered} p_1 \geqslant 0,\ p_2 \geqslant 0,\ p_3 \geqslant 0,\ p_4 \geqslant 0,\\ p_5^\tau \geqslant 0,\ \tau = 0, \ldots, \tau_0 - 1. \end{gathered} \tag{25}$$

Вектор P будем называть неймановским вектором цен. Система (24), (25) представляет значительный экономический интерес. Она сопоставляет режиму оптимального сбалансированного роста неизменную систему цен. В неймановских ценах любой оптимальный переход от состояния к состоянию приводит к возрастанию ценности накопленного обществом богатства в α_0 раз. Применение любого возможного перехода не может привести к большему возрастанию ценности. Компоненты вектора p_1 — цены продуктов, выпускаемых отраслями народного хозяйства; вектор p_4 образован ценами действующих производственных мощностей; вектор p_5^τ — ценами мощностей, строительство которых не завершено (срок завершения строительства составляет τ^0 лет).

Лемма 2 устанавливает, что (22) имеет положительное решение. Отсюда следует, что в сопряженной системе соотношения (24) выполняются как равенства. Учитывая это, получим после несложных преобразований

$$
\begin{gathered}
p_1F(\alpha_0) = p_1,\\
p_2 = p_1C,\\
p_4 = p_1B\sum_{\tau=1}^{\tau_0} \alpha_0^{\tau-1}\Psi(\tau)\left(\sum_{\tau=0}^{\tau_0-1}\alpha_0{}^\tau\Phi(\tau)\right)^{-1},\\
p_3 = p_1\Gamma + (\alpha_0-1)p_4, \qquad (26)\\
p_5{}^0 = p_4\Phi(0),\\
p_5^{\tau_0-1} = p_1B\Psi(\tau_0),\\
p_5^{\tau_0-2} = p_1B\Psi(\tau_0-1) + \alpha_0p_5^{\tau-1} - \alpha_0p_4\Phi(\tau_0-1),\\
\dots\dots\dots\dots\dots\\
p_5{}^1 = p_1B\Psi(2) + \alpha_0p_5{}^2 - \alpha_0p_4\Phi(2).
\end{gathered}
$$

Таким образом мы доказали следующую лемму.

Лемма 3. *Неймановский вектор цен $\bar P$ определяется единственным образом (с точностью до нормировки), $\bar p_1$ — левый собственный вектор матрицы $F(\alpha_0)$. Цены $\bar p_1$, $\bar p_2$, $\bar p_3$, $\bar p_4$ положительны, $p_5{}^\tau \geqslant 0$. Если соотношения* (21) *выполняются как строгие неравенства, то $p_5{}^\tau$ также положителен.*

Выясним теперь связь между системой (24), (25) и двойственной задачей (9)—(14). Для этого предположим, как при построении (15)—(19), что $P_t = \beta^{-t}P$. Подставляя это выражение в (10)—(13), получим систему неравенств (24), где α_0 заменено на β. Выберем β так, чтобы темп падения оценок был минимальным, т. е. рассмотрим задачу $\beta \to \min$ при условиях (24) и (25), где α_0 заменено на β_0. Обозначим через β_0 решение этой задачи.

Теорема (двойственности). *Если справедливы предположения* 1, 2, 3 *и $\alpha_0 > 1$, то $\beta_0 = \alpha_0$.*

Доказательство. Поскольку существует решение системы (24), (25) при $\beta = \alpha_0$, то $\beta_0 \leqslant \alpha_0$. Предположим, что $\beta_0 < \alpha_0$. Тогда система (24), (25) разрешима при β_1, $\max(1, \beta_0) \leqslant \beta_1 < \alpha_0$. Так как $\beta_1 \geqslant 1$, то из разрешимости системы (24), (25) следует разрешимость $pF(\beta_1) \geqslant p$, в чем нетрудно убедиться, выполняя те же преобразования, что и при построении системы (26). Пусть $\tilde p_1$ — решение полученной системы, а $\bar x$ — правый собственный вектор матрицы $F(\alpha_0)$. Тогда $\tilde p_1F(\beta_1)\bar x \geqslant \tilde p_1\bar x = \tilde p_1F(\alpha_0)\bar x$. Так как $F(\beta_1) \leqslant F(\alpha_0)$, а $\tilde p_1$ и x неотрицательны, то $\tilde p_1F(\beta_1) = \tilde p_1$, т. е. $\tilde p_1$ — неотрицательный собственный вектор неразложимой матрицы $F(\beta_1)$, т. е. $\tilde p_1 > 0$. Из $\beta_1 < \alpha_0$ и положительности $\bar x$ следует, что $F_i(\beta_1)\bar x < F_i(\alpha_0)\bar x$ для некоторого множества I строк матриц F. Тогда, очевидно, $\tilde p_i = 0$, $i \in I$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Здесь уместно сравнить полученные результаты с аналогичными для модели Неймана [8]. В неймановской модели анализируются сопряженные системы неравенств

$$\alpha Ax \leqslant Bx, \tag{27}$$

$$\alpha pA \geqslant pB, \tag{28}$$

причем $A \geqslant 0$, $B \geqslant 0$ и в каждом столбце A и в каждой строке B есть хотя бы один ненулевой элемент. Значения α, при которых (27) имеет нетривиальные решения, заполняют луч $(-\infty, \alpha \max]$. Система (28) разрешима при $\alpha \in [\alpha \min, \infty)$, $\alpha \min \leqslant \alpha \max$. Величина $\alpha \max$ определяет максимальный темп технологического роста ($\alpha_0 = \alpha \max$), а минимальный темп падения оценок β_0 равен $\alpha \min$. Неразложимость модели является достаточным условием для выполнения равенства $\alpha_0 = \beta_0$, означающего совпадение технологического и экономического темпов роста. В изучаемой модели система, аналогичная (28), разрешима при $\beta \in [\alpha_0, \infty)$, лишь когда $\alpha_0 > 1$. Если $\alpha_0 = 1$, то (24) и (25) обладают нетривиальными решениями при произвольных α. Чтобы убедиться в этом, достаточно положить $p_4 = p_5^{\tau}$ и заметить, что при $\alpha_0 = 1$ система $p_1 A \geqslant p_1$ имеет положительное решение ($\bar{x}$ — правый собственный вектор A, которому соответствует собственное значение, равное 1, а $\bar{p}_1$ — левый собственный вектор).

3. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИНФОРМАЦИИ О НАРОДНОМ ХОЗЯЙСТВЕ И РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Практические расчеты были проведены по 13-отраслевой модели народного хозяйства СССР на основе условной информации.

При определении вектора удельной трудоемкости исходили из суммарных зарплат по отраслям; i-я компонента вектора l равна суммарной трудоемкости i-й отрасли, деленной на валовый выпуск этой отрасли.

Вектор удельного потребления рассчитывался по формуле

$$C = \frac{1}{lx^0} Y^0, \tag{29}$$

Y^0 — вектор потребления 0-го г.— определялся как разность между вектором валового выпуска x^0 и суммой текущих затрат $A'x^0$ и капиталовложений в основные фонды K

$$Y^0 = x^0 - [A'x^0 + K] \tag{30}$$

(вектор K приведен в [9, стр. 520]). Расчеты проводились на ЭВМ БЭСМ-3М с помощью алгоритма, описанного в [10]. В результате получены максимальный темп сбалансированного роста α_0 и соответствующие ему векторы оптимальных отраслевых пропорций $\bar{x}$ и оптимальных цен $\bar{p}$, величины которых (для двух вариантов исчисления l) приведены в табл. 1. В первом варианте принята гипотеза о неизменности потребления, приходящегося на 1 руб. зарплаты в производственной сфере, а во втором — гипотеза о неизменности потребления, приходящегося на 1 руб. всех выплат населению. Для сравнения в табл. 1 дан также вектор валовых выпусков 0-го г. x^0, а в табл. 2 — реальные темпы роста валового общественного продукта для ряда лет [9]. Все векторы $\bar{x}$ в табл. 1 пронормированы так, чтобы суммарный валовый выпуск равнялся выпуску 0-го г. Вектор оптимальных цен дан в двух нормировках: при первой нормировке $\bar{p}^1$ стоимость всего валового выпуска в оптимальных ценах равна его

Таблица 1

Оптимальные отраслевые пропорции и оптимальные цены

Отрасль	Варианты исчисления вектора l: I, $\alpha_0 = 1{,}0804$, $\bar{x}$	$\bar{p}^1$	$\bar{p}^2$	II, $\alpha_0 = 1{,}0800$, $\bar{x}$	$\bar{p}^1$	$\bar{p}^2$	x^0 млрд. руб.
Топливная промышленность	18,788	1,331	1,560	18,788	1,245	1,393	18,8
Электроэнергия	7,671	1,127	1,321	7,670	1,127	1,260	7,6
Машиностроение	61,410	1,188	1,393	61,341	1,132	1,296	54,7
Химическая промышленность	13,883	1,046	1,226	13,883	1,079	1,207	13,7
Лесная, бумажная, деревообрабатывающая промышленность	17,047	1,399	1,639	17,046	1,318	1,475	17,7
Стройматериалы, стекло, фарфор	12,002	1,341	1,571	11,990	1,273	1,424	13,6
Легкая промышленность	54,182	0,601	0,705	54,215	0,714	0,799	54,4
Пищевая промышленность	83,807	0,633	0,742	83,869	0,738	0,825	84,0
Строительство	33,506	1,240	1,453	33,463	1,171	1,310	39,4
Сельское хозяйство	69,515	0,841	0,986	69,555	0,871	0,974	68,8
Транспорт и связь	17,159	2,024	2,371	17,156	1,737	1,043	17,3
Сфера обращения	14,496	1,081	1,267	14,500	0,951	1,064	14,4
Прочие отрасли материального производства	3,381	0,617	0,723	3,382	0,610	0,682	3,4

Таблица 2

Реальные темпы роста валового общественного продукта [9]

Годы	1964	1965	1966	1967	1968
Темп роста валового общественного продукта	1,076	1,079	1,073	1,082	1,075

стоимости в ценах 0-го г., при второй — $\bar{p}^2$ равны стоимости потребления в оптимальных ценах и ценах 0-го г.

Приведенные в табл. 1 и 2 результаты показывают, что максимальный темп сбалансированного роста близок к темпу роста валового общественного продукта за ряд последних лет (средний темп роста валового общественного продукта за 5 лет с 1963 по 1968 г. равен 1,077 [9]). Существующие отраслевые пропорции близки к оптимальным. Наибольшее и наименьшее отношения $\bar{x}_i / x_i^0$ равны 1,123 (машиностроение) и 0,850 (строительство).

Следует заметить, что полученный максимальный темп роста не является, по-видимому, предельным для реальной экономики, так как элементы матриц затрат получены не нормативным путем, а на основе статистики, т. е. включают все имеющие место потери и неэффективное использование ресурсов. Все величины (кроме безразмерных) измерены в стоимостном выражении в ценах 0-го г. Поэтому компоненты вектора оптимальных цен $\bar{p}$ показывают относительную оптимальную ценность единицы продукции, которая в ценах 0-го г. стоит 1 руб., т. е. являются поправочными коэффициентами. В результате вычислений выявилось значительное отличие цен 0-го г. от расчетных оптимальных величин. Максимальная и минимальная относительная оптимальная ценность равны соответственно для первой и второй нормировок 2,024 и 2,371 (тран-

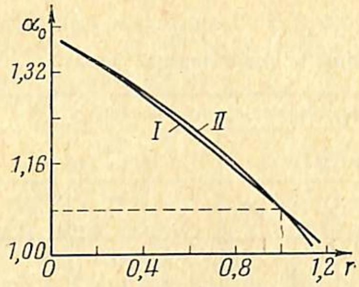

Рис. 1

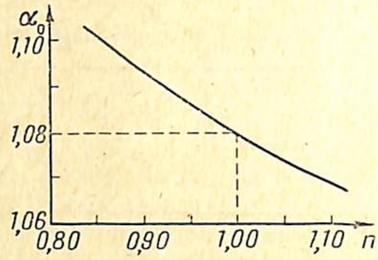

Рис. 2

Рис. 1. Зависимость максимального темпа сбалансированного роста α_0 от величины потребления (для вариантов I и II исчисления вектора l): r — коэффициент изменения вектора удельного потребления

Рис. 2. Зависимость максимального темпа сбалансированного роста α_0 от фондоемкости (для вариантов I и II исчисления вектора l): n — коэффициент изменения матриц фондоемкости B и реновационных затрат Г

спорт и связь), 0,601 и 0,705 (легкая промышленность) *. Близко это отношение к минимальному и для пищевой промышленности.

Представляет интерес изучение с помощью модели влияния на максимальный темп сбалансированного роста α_0 и на векторы $\bar{x}$ и $\bar{p}$ различных параметров, характеризующих народное хозяйство. Исследовалось влияние на α_0, $\bar{x}$ и $\bar{p}$ изменения удельного потребления (при неизменной его структуре) и фондоемкости. Результаты приведены в виде графиков

Таблица 3

Оптимальные отраслевые пропорции $\bar{x}$ и максимальный темп сбалансированного роста α_0, соответствующие различному удельному потреблению C (первый вариант исчисления l)

Отрасль	$\bar{x}$				
	$C\times0{,}85$	$C\times0{,}95$	C	$C\times1{,}05$	$C\times1{,}15$
Топливная промышленность	18,787	18,787	18,787	18,786	18,791
Электроэнергия	7,735	7,691	7,671	7,651	7,616
Машиностроение	71,534	64,668	61,410	58,298	52,312
Химическая промышленность	13,897	13,887	13,883	13,878	13,872
Лесная, бумажная, деревообрабатывающая промышленность	17,206	17,098	17,047	16,999	16,908
Стройматериалы, стекло, фарфор	13,663	12,538	12,002	11,486	10,485
Легкая промышленность	49,268	52,590	54,182	55,716	58,703
Пищевая промышленность	74,646	80,840	83,807	86,668	92,230
Строительство	39,786	35,536	33,506	31,558	27,768
Сельское хозяйство	63,495	67,607	69,515	71,317	74,703
Транспорт и связь	17,709	17,336	17,159	16,987	16,662
Сфера обращения	13,889	14,300	14,496	14,683	15,047
Прочие отрасли материального производства	3,252	3,339	3,381	3,422	3,502
α_0	1,1325	1,0983	1,0804	1,0618	1,0226

* Для первого варианта исчисления l.

Таблица 4

Оптимальные цены $\bar{p}$, соответствующие различному удельному потреблению C (первый вариант исчисления l)

Отрасль	$\bar{p}^1$				
	$C\times0{,}85$	$C\times0{,}95$	C	$C\times1{,}05$	$C\times1{,}15$
Топливная промышленность	1,381	1,347	1,331	1,316	1,285
Электроэнергия	1,365	1,204	1,127	1,053	0,910
Машиностроение	1,163	1,180	1,188	1,197	1,216
Химическая промышленность	1,073	1,055	1,046	1,038	1,022
Лесная, бумажная, деревообрабатывающая промышленность	1,375	1,391	1,399	1,407	1,424
Стройматериалы, стекло, фарфор	1,366	1,349	1,341	1,332	1,316
Легкая промышленность	0,573	0,592	0,601	0,611	0,630
Пищевая промышленность	0,636	0,634	0,633	0,632	0,630
Строительство	1,179	1,220	1,240	1,261	1,302
Сельское хозяйство	0,860	0,848	0,841	0,834	0,819
Транспорт и связь	2,103	2,050	2,024	1,997	1,941
Сфера обращения	1,001	1,055	1,081	1,107	1,158
Прочие отрасли материального производства	0,563	0,599	0,617	0,635	0,672

(рис. 1 и 2) и в табл. 3 и 4. На графиках по оси абсцисс отложены соответственно коэффициенты, на которые умножены вектор C и матрицы фондоемкости B и реновационных затрат Г. Таблицы 3 и 4 иллюстрируют изменение векторов $\bar{x}$ и $\bar{p}$ при изменении вектора C.

Расчеты, подобные вышеприведенным, позволяют, зная тенденцию изменения параметров народного хозяйства (например фондоемкости, трудоемкости, изменения матриц A и B в результате технического прогресса), прогнозировать величину максимального темпа сбалансированного роста α_0 и оптимальных отраслевых пропорций $\bar{x}$, к которым должны быть близки и реальные отраслевые пропорции народного хозяйства.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Н. Гаврилец, Б. Н. Михалевский, Ю. Р. Лейбкинд. Линейная модель оптимального роста плановой экономики. В сб. Применение математики в экономических исследованиях. Т. 3. М., «Мысль», 1965.
2. В. А. Волконский. Модель оптимального планирования и взаимосвязи экономических показателей. М., «Наука», 1967.
3. Ю. П. Иванилов, А. А. Петров. Динамическая модель расширения и перестройки производства (π-модель). В сб. Кибернетику на службу коммунизму. Т. 6. М., «Энергия», 1971.
4. I. Tsukui. Application of a Turnpike Theorem to Planning for Efficient Accumulation. Econometrica, 1968, v. 36, N 1.
5. С. М. Мовшович. Магистральный рост в динамических народнохозяйственных моделях. Экономика и матем. методы, 1972, т. VIII, вып. 2.
6. Ф. Р. Гантмахер. Теория матриц. М., «Наука», 1967.
7. Д. Гейл. Замкнутая линейная модель производства. В сб. Линейные неравенства и смежные вопросы. М., Изд-во иностр. лит., 1959.
8. Д. Гейл. Теории линейных экономических моделей. М., Изд-во иностр. лит., 1963.
9. Народное хозяйство СССР в 1968 г. Статистический ежегодник. М., «Статистика», 1969.
10. В. З. Беленький. Некоторые модели оптимального планирования, основанные на схеме межотраслевого баланса. Экономика и матем. методы, 1967, т. III, вып. 4.

Поступила в редакцию
25 I 1971