

МЕТОД ПОЭТАПНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ И ИССЛЕДОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

И. С. ЕФИМОВА, А. С. МАКАРОВА, А. А. МАКАРОВ

(Пркутск)

Необходимым атрибутом любой экономической системы является развитие, под которым понимается как количественный рост, так и изменение со временем ее технологической и территориальной структуры и связей. В этом широком смысле все экономические системы являются динамическими. Поэтому их оптимизация (как необходимый элемент планирования) должна обеспечивать выбор наилучшей траектории развития системы в конкретных координатах времени. Однако выполнение этого требования связано с многократным усложнением инструмента оптимизации экономических систем.

Исследование фактора динамики для ряда систем (например, [1, 2]) свидетельствует о неравноценности динамических свойств у разных экономических систем и о возможности значительного упрощения инструмента их оптимизации. Поэтому очевидна актуальность работ, направленных на изучение динамических свойств экономических систем, которое должно позволить раскрыть механизм проявления фактора динамики при оптимизации сложных систем, разработать критерии и конструктивные приемы оценки динамических свойств конкретных систем и на этой основе предложить соответствующие им модификации динамических моделей и методов их исследования.

Ниже излагается один из возможных подходов к решению поставленных задач, справедливый при следующих предпосылках: а) отсутствует существенный (многолетний) разрыв во времени производства и потребления каких-либо видов продукции рассматриваемой системы; б) не учитывается дискретный характер развития объектов.

Первое из этих условий затрудняет применение рассматриваемого подхода к системам народного хозяйства страны и районов, второе — к оптимизации экономических систем низших уровней иерархии, где фактор дискретности приобретает большое значение. Тем не менее имеется весьма широкая область задач оптимального планирования крупных быстро развивающихся отраслей и многоотраслевых комплексов (типа топливно-энергетического хозяйства), где применимость данного подхода сомнений не вызывает.

1. МЕХАНИЗМ ФОРМИРОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СВЯЗЕЙ И ПОЭТАПНЫЙ МЕТОД ОПТИМИЗАЦИИ РАЗВИТИЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Для изучения механизма формирования оптимальных динамических связей использован следующий метод исследования. В общем виде формулируется динамическая модель, описывающая развитие экономической

ФМ		$C_1 X_1$		$C_2 X_2$		$\dots$		$C_T X_T$		Og
СП	I	ЭП	1	$A_1 X_1$						B_1
				$\Sigma x_{i1}^d + x_{i1}^k + x_{i1}^n$						R_{i0}
				$-\Sigma x_{i1}^d - x_{i1}^k - \Sigma x_{i1}^n + Z_{i1}$						0
										...
	II	ЭП	2	$A_2 X_2$						B_2
				$-\Sigma x_{i2}^d - x_{i2}^k - \Sigma x_{i2}^n + Z_{i2}$						0
										0
										...
	T-1	ЭП	...							...
										...
	T	ЭП	T					$A_T X_T$		B_T
				$-\Sigma x_{iT}^d - x_{iT}^k - \Sigma x_{iT}^n + Z_{iT}$						0

Рис. 1. Принципиальная структура линейной динамической модели экономической системы: ФМ — функционал модели по этапам; СП — статические подмодели; ЭП — этапы расчетного периода; Og — ограничения

системы сразу на всех этапах расчетного периода. После соответствующей перегруппировки уравнений и переменных эта модель делится на блоки, каждый из которых соответствует определенному этапу (году) развития системы, и одним из методов блочного программирования осуществляется увязка условнооптимальных решений блоков. Алгоритм этой увязки, состав используемой информации, приемы ее получения и применения интерпретируются затем в содержательных экономических терминах как механизм формирования оптимальных связей, возникающих в процессе развития экономических систем.

Схематическая структура динамической модели в ее общем виде представлена на рис. 1. Матрицы $A_1, A_2, \dots, A_T$ характеризуют технологические и территориальные связи рассматриваемой системы на соответствующем этапе t расчетного периода. При отсутствии разновременности производства и потребления продукции в многолетнем разрезе связь между соседними матрицами осуществляется с помощью очевидного условия: для каждого объекта i производительность действующей части на этапе t x_{it}^d должна равняться его производительности, достигнутой на предшествующем этапе, т. е. сумме производительностей действующей x_{it-1}^d и новой x_{it-1}^k части объекта на этапе $t-1$. С учетом возможной консервации x_{it-1}^k, x_{it}^k или ликвидации x_{it}^l объекта это условие формулируется

$$x_{it-1}^d + x_{it-1}^k + x_{it-1}^l = x_{it}^d + x_{it}^k + x_{it}^l. \quad (1)$$

Для данного исследования это условие было тождественно преобразовано в два самостоятельных уравнения введением дополнительной переменной Z_{it-1} , характеризующей суммарную производительность объекта i накануне рассматриваемого этапа t

$$x_{it-1}^d + x_{it-1}^k + x_{it-1}^l - Z_{it-1} = 0, \quad (2)$$

$$Z_{it-1} - x_{it}^d - x_{it}^k - x_{it}^l = 0. \quad (3)$$

Как видно из рис. 1, в результате таких преобразований динамическая модель хотя и увеличивается в размере, но приобретает весьма благоприятные

ятную структуру: ее образуют T статических подмоделей, матрицы которых связаны только векторами простейшего вида $(+1, -1)$ при переменных Z_{it-1} , имеющих к тому же нулевые коэффициенты функционала. Применение разработанного в Сибирском энергетическом институте (СЭИ) [3] метода блочного программирования* к модели такой специфической структуры позволило существенно упростить его и на этой основе предложить метод поэтапной оптимизации экономических систем. В результате использования этого метода получено следующее представление о механизме формирования оптимальных динамических связей.

1. Оптимальное развитие экономических систем формируется в результате взаимодействия двух видов динамических связей: *прямые связи* учитывают влияние решений *предшествующих* этапов на данный этап развития системы и обеспечивают основное условие ее жизнеспособности — построение *сбалансированного варианта* развития системы в течение расчетного периода; *обратные связи* отражают влияние *последующих* условий на сегодняшнее развитие системы и предназначены для обеспечения *оптимальности* ее развития с позиций расчетного периода в целом.

Конкретными параметрами системы, через которые проявляется действие ее динамических связей, являются *производственные мощности объектов*, созданные к концу предшествующего (и, следовательно, к началу данного) этапа расчетного периода (переменные Z_{it-1} в (2), (3)).

2. Оптимальное равновесие прямых и обратных динамических связей можно получить в результате циклического процесса последовательного (поэтапного) уточнения условнооптимальных *статических* решений (т. е. значений производственных мощностей объектов Z_{it-1}) на каждом этапе расчетного периода. Для этого каждый цикл расчетов должен осуществляться по принципу маятника: оптимизацией статических решений от первого этапа к последнему («ход вперед») корректируются прямые динамические связи при фиксированных обратных, а соответствующей оптимизацией от последнего этапа к первому («ход назад») определяются обратные динамические связи при фиксированных прямых связях.

3. Поэтапную оптимизацию развития экономических систем целесообразно выполнять следующим образом.

1) Для начала итеративного процесса определяется *исходный сбалансированный вариант* развития системы («ход вперед»). С этой целью обычными методами оптимизации (например, симплекс-методом) находится условнооптимальное статическое решение для первого этапа — при реальных значениях экономических показателей объектов и без введения искусственных ограничений на их развитие (см. первый блок на рис. 1). Полученные на первом этапе значения производственных мощностей объектов (переменные $Z_{t1} = r_{t1}$) используются в качестве ограничений на производительность *действующих* объектов второго этапа; для этого уравнения (3) заменяются условиями вида

$$x_{i2}^n + x_{i2}^k + x_{i2}^n = r_{i1}.$$

Затем обычным способом ищется условнооптимальное решение для второго этапа и определяются производственные мощности объектов ($Z_{i2} = r_{i2}$), которые аналогичным образом служат ограничениями на производительность действующих объектов третьего этапа и т. д. Иными словами, «ход вперед» осуществляется последовательной оптимизацией си-

* Выбору этого метода предшествовало его сравнение с методом Данцига-Вулфа [4] и методом Розена [5]. Первый уступает используемому методу в вычислительном отношении, второй обладает тем существенным недостатком, что не дает допустимого решения задачи на промежуточных циклах приближения. По сути дела метод СЭИ можно рассматривать как двойственный по отношению к методу Розена.

стемы на каждом этапе с одновременным введением ограничений вида

$$x_{it}^L + x_{it}^R + x_{it}^P = r_{it-1} \quad (4)$$

для учета производительности каждого объекта, достигнутой на предшествующих этапах. Этим обеспечивается преемственность статических решений на всех этапах расчетного периода (т. е. допустимость решения исходной динамической задачи).

2) Для оптимизации исходного сбалансированного варианта развития системы необходимо выяснить экономические последствия ввода объектов на каждом этапе расчетного периода. Очевидно, для этого требуется знание будущих условий использования объектов (когда они станут действующими). Как правило, экономическая эффективность (так называемая прокатная оценка) действующего объекта определяется как разность затрат на сооружение и эксплуатацию нового объекта и собственных эксплуатационных издержек действующего объекта. Однако в сложных экономических системах определение показателей экономической эффективности действующих объектов φ_{it} чрезвычайно затруднено, так как они находятся в сложной нелинейной зависимости от собственной производительности и производительности остальных объектов. В явном виде получить такую зависимость практически невозможно. Поэтому для ее снятия организуется циклический процесс оптимизации системы в динамике. На каждом цикле расчетов определяются значения экономической эффективности действующих объектов φ_{it} , которые справедливы лишь в относительно узких интервалах их производительности $\underline{R}_{it}$, $\bar{R}_{it}$. Для их вычисления производится последовательная оптимизация статических решений от последнего до первого этапа расчетного периода. С учетом сказанного «ход назад» начинается с анализа полученного «ходом вперед» условнооптимального решения последнего этапа T . По всем объектам определяются*: а) показатели их экономической эффективности φ_{iT} , характеризующие экономию затрат по системе в целом, получаемую на этапе T при увеличении на единицу производственной мощности каждого объекта в предшествующий период; б) допустимые интервалы изменения производственной мощности каждого объекта $\underline{R}_{iT}$, $\bar{R}_{iT}$, в пределах которых можно считать неизменными показатели φ_{iT} . Значения φ_{iT} в сочетании с интервалами $\underline{R}_{iT}$, $\bar{R}_{iT}$ представляют собой основную информацию, характеризующую экономические последствия ввода каждого нового объекта накануне этапа T . Знание этих последствий дает возможность скорректировать исходное условнооптимальное статическое решение предшествующего $T-1$ этапа расчетного периода. Для этого полученные по каждому объекту значения показателей φ_{iT} передаются в статическую подмодель этапа $T-1$ и подставляются в функционал при переменных вида Z_{iT-1} . Кроме того, на эти переменные накладываются двусторонние ограничения

$$\underline{R}_{iT} \leq Z_{iT-1} \leq \bar{R}_{iT}, \quad (5)$$

гарантирующие на этапе $T-1$ сохранение допустимости решений, полученных ранее на этапе T .

* При использовании математических моделей показатели φ_{it} определяются как экономико-математические оценки ограничений на производительность действующих объектов (т. е. уравнений типа (4)), а значения $\underline{R}_{it}$ и $\bar{R}_{it}$ — как интервалы устойчивости правой части уравнений типа (4), при которых остается неизменным оптимальный базис задачи линейного программирования для статической подмодели этапа t : $\underline{R}_{it} = Z_{it} + \min_j x_j / u_{jm}$ для $u_{jm} < 0$ и $\bar{R}_{it} = Z_{it} - \max_j x_j / u_{jm}$ для $u_{jm} > 0$, где x_j — значение переменной, занимающей j -ю позицию в оптимальном базисе; u_{jm} — элементы столбца обратной матрицы оптимального базиса, соответствующего рассматриваемому уравнению m типа (4).

Расчет скорректированной таким образом статической подмодели этапа $T-1$ позволяет определить новое условнооптимальное статическое решение для этого этапа и вычислить по каждому объекту соответствующие ему показатели φ_{iT-1} , R_{iT-1} , $\bar{R}_{iT-1}$. Следует заметить, что поскольку при оптимизации этапа $T-1$ собственные затраты каждого объекта были скорректированы с учетом ожидаемой экономии затрат на следующем этапе φ_{iT} , то получаемые здесь значения экономической эффективности объектов φ_{iT-1} включают в себя экономию затрат от использования соответствующего объекта не только на этапе $T-1$, но и на этапе T . Передаваемые в подмодель этапа $T-2$ показатели φ_{iT-1} , R_{iT-1} и $\bar{R}_{iT-1}$ используются для ее корректировки аналогичным образом. Определяемые в результате расчета этой статической подмодели значения φ_{iT-2} аккумулируют весь эффект от использования объекта на этапах $T-2$, $T-1$ и T . Они передаются совместно с допустимыми диапазонами R_{iT-2} , $\bar{R}_{iT-2}$ в подмодель $T-3$ -го этапа и т. д. до получения скорректированного условнооптимального решения для первого этапа расчетного периода. Таким образом, полученные «ходом назад» скорректированные *условнооптимальные статические решения в первом приближении уже учитывают экономические последствия ввода каждого объекта на любом этапе расчетного периода*. Однако полученные при этом условнооптимальные статические решения не соответствуют принятым ранее («ход вперед») значениям производительности действующих объектов на каждом этапе, т. е. нарушаются условия преемственности статических решений и достижения сбалансированного варианта развития системы в течение расчетного периода.

3) Для обеспечения преемственности статических решений вновь производится поэтапный расчет статических подмоделей, но в отличие от первого «ход вперед» при этом учитываются экономические последствия развития объектов (т. е. показатели φ_{it} , R_{it} , $\bar{R}_{it}$). Это, в свою очередь, приводит к изменению экономической эффективности ввода различных объектов и поэтому возникает необходимость в проведении следующих итераций расчета («ход назад» $\rightarrow$ «ход вперед» и т. д.).

Для проверки близости к оптимальному каждому условнооптимального варианта развития системы на любой итерации расчетов определяются показатели δ_{it} , *характеризующие дополнительную экономию затрат*, которую можно было бы получить на данном этапе за счет изменения производительности объектов (путем соответствующего расширения границ интервала устойчивости — снижения R_{it+1} или увеличения $\bar{R}_{it}$). При использовании математической модели (рис. 1) эти показатели могут быть определены как экономико-математические оценки двусторонних ограничений типа (5) на связующие переменные Z_{it-1} . Очевидно, пока эта потенциальная экономия больше нуля, процесс оптимизации системы формально нельзя считать законченным, поскольку имеется возможность улучшить полученное решение путем увеличения (или уменьшения) производительности рассматриваемого объекта с одновременной корректировкой показателей φ_{it} . Однако учитывая неизбежную погрешность исходной информации, практически приемлемое решение можно получить при выполнении условия

$$\delta_{it} \geq \varepsilon_{cit} \text{ для всех } i, t, \quad (6)$$

где ε_{cit} — предполагаемая погрешность собственных экономических показателей c_{it} объекта i .

Описанный метод поэтапной оптимизации экономических систем был проверен на примере Единой энергетической системы Европейской части страны (ЕЭС) — крупнейшего объединения потребителей энергии и генерирующих установок, работающих по единому графику электри-

ческой нагрузки. ЕЭС представляет собой одну из наиболее быстро развивающихся экономических систем, что уже само по себе заставляет предполагать наличие у нее сильных динамических свойств. Исследование этих свойств ЕЭС выполнялось применительно к задачам оптимизации ее развития на десятилетний период, которые формулирова-

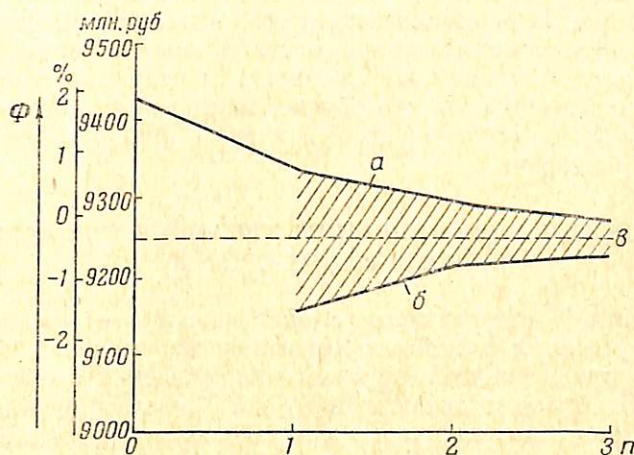


Рис. 2. Изменение по итерациям значений функционала прямого и двойственного решения: a — функционал прямого решения, $б$ — функционал двойственного решения, $в$ — возможное оптимальное значение функционала, $г$ — суммарные затраты на развитие системы, n — итерации

лись следующим образом: определить состав и типы электростанций, их мощность, размещение и виды используемых топливно-энергетических ресурсов, при которых достигается минимум затрат на развитие ЕЭС в целом за расчетный период. Для решения этих задач была составлена линейная динамическая модель ЕЭС общей размерностью около 1800 переменных и 570 уравнений (среди них 340 основных балансовых уравнений и системных ограничений, 130 уравнений вида (2) и 100 уравнений вида (3)). Модель была разделена на четыре статических подмодели (соответственно выделенным этапам расчетного периода), средняя размерность которых составила около 150 уравнений и 450 переменных.

При использовании поэтапного метода оптимальное решение по критерию (6) было получено уже на третьем цикле приближения. Параллельно с этим проверялась близость решения к оптимальному на каждой промежуточной итерации. Для этого сравнивались значения функционалов в целом за период, определенные расчетом подмоделей «ходом вперед» сначала с ограничениями на связующие переменные вида (5), а затем без этих ограничений. В первом случае находилось значение функционала, соответствующее допустимому прямому и, вообще говоря, недопустимому двойственному решению исходной задачи; во втором случае, наоборот, величина функционала соответствовала допустимому двойственному и недопустимому (из-за отсутствия ограничений вида (5)) прямому решению. В интервале между этими крайними и находилось оптимальное значение функционала (рис. 2).

На рис. 2 верхняя кривая характеризует изменение по итерациям суммарных затрат на развитие ЕЭС за весь расчетный период (т. е. функционала прямого решения), а нижняя — изменение значений функционала двойственного решения. Анализ этих зависимостей, во-первых, показывает, что при оптимизации развития системы основная экономия затрат

достигается уже на первой итерации (снижение функционала на 1,3% от оптимального), а в дальнейшем она резко сокращается, составляя на второй и третьей итерациях соответственно 0,2 и 0,1% оптимального значения. Во-вторых, разность функционалов прямого и двойственного решений, характеризующая степень близости решения промежуточной итерации к оптимальному, монотонно уменьшается: если на первой итерации она составляла 2,3% общих затрат, то после третьей итерации снизилась до 0,5%. Хотя действительное оптимальное значение функционала полной динамической модели ЕЭС на третьей итерации еще не было достигнуто, можно утверждать, что обусловленные этим потери составляют всего лишь 0,2–0,3% оптимального значения функционала, и ими, очевидно, можно пренебречь.

2. МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ СИЛЫ ДИНАМИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Метод поэтапной оптимизации может использоваться не только для эффективного решения линейных динамических моделей большой размерности, но и для исследования силы динамических свойств экономических систем. Необходимость подобного исследования очевидна, поскольку именно степень динамичности экономической системы предопределяет постановку задачи оптимизации ее развития, выбор рациональной (адекватной) математической модели для решения этой задачи, использование наиболее эффективных методов оптимизации и т. д.

Степень динамичности конкретной экономической системы предлагается определять в зависимости от силы ее прямых и обратных динамических связей, под которой понимается мера их влияния на результаты оптимизации системы. Очевидно, для определения силы динамических связей необходимо, во-первых, выявить показатели, которые могут служить их измерителем, во-вторых, дать критерий определения «порогового» значения этого измерителя для разделения связей на слабые и сильные.

При решении первой задачи использован тот факт, что в динамической системе уровень оптимальности статических решений характеризуют показатели типа δ_{ii} : чем более отличны от нуля их значения, тем дальше статическое решение от динамического оптимума и тем сильнее обратные динамические связи системы. Поэтому показатель δ_{ii} допустимо считать измерителем силы обратных динамических связей системы.

В отличие от обратных, основной функцией прямых динамических связей является построение сбалансированных вариантов развития системы в течение всего расчетного периода. Если статические решения принимаются последовательно по годам расчетного периода с учетом результатов предшествующих лет, то эта сбалансированность достигается автоматически. Если же решения принимаются для некоторых характерных уровней расчетного периода (например, по пятилетиям или даже сразу на конец периода), то сбалансированность в промежуточные годы может нарушаться. Возникающее при этом рассогласование определяется в виде тех невязок основных балансовых уравнений и ограничений n подмодели соответствующего промежуточного года $t(y_{nt})$, которые возникают при постановке в них решения соответствующего характерного уровня. Значения этих невязок y_{nt} и используются как измеритель силы прямых динамических связей.

В качестве порогового значения измерителей силы динамических связей целесообразно принять предполагаемую величину погрешности исходной информации о будущих условиях развития системы, в частности ожидаемую погрешность экономических показателей объектов ε_{ci} и ог-

раничений на развитие системы ϵ_{vnt} . Очевидно, если значения показателей δ_{it} хотя бы для некоторых объектов превышают погрешность их экономических показателей, т. е. (для некоторых i, t)

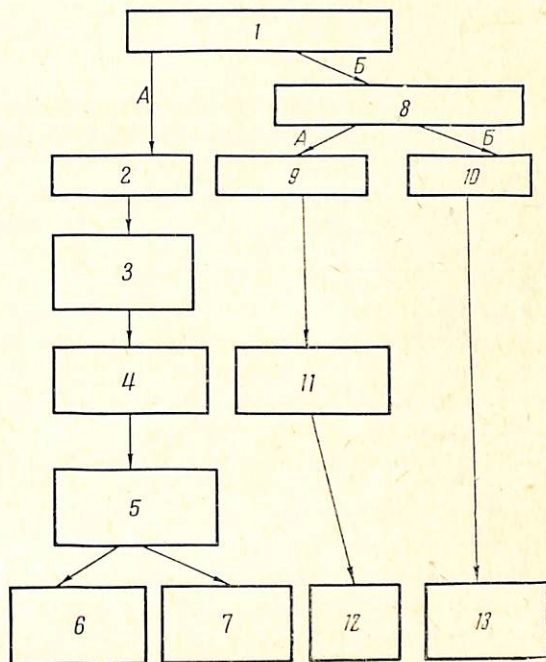
$$\delta_{it} > \epsilon_{cit}, \quad (7)$$

то система обладает *сильными* обратными динамическими связями, выходящими за пределы влияния погрешности исходных данных. Аналогичное условие для прямых связей имеет вид (для некоторых i, t)

$$y_{nt} > \epsilon_{vnt}. \quad (8)$$

Невыполнение же условий (7), (8) можно считать свидетельством наличия у системы слабых динамических связей.

Рис. 3. Схема исследования динамических свойств экономических систем: А — сильные; Б — слабые; 1 — проверка силы обратных динамических связей системы; 2 — динамическая система; 3 — определение рациональной продолжительности расчетного периода; 4 — выбор минимального числа и длительности этапов; 5 — анализ количества объектов (I) и числа вариаций способов их функционирования (G); 6 — полная динамическая модель, решаемая поэтапным методом оптимизации; 7 — компактная динамическая модель, решаемая как единая задача линейного программирования; 8 — проверка силы прямых динамических связей системы; 9 — условно-динамическая система; 10 — статическая система; 11 — выбор минимально допустимого числа и длительности этапов; 12 — последовательность статических моделей; 13 — статическая модель на конец периода, решаемая как единая задача линейного программирования



Достоинство предлагаемого способа оценки силы прямых и обратных динамических связей в его относительно невысокой трудоемкости. Действительно, *о силе динамических связей можно судить уже по результатам первого цикла расчетов* статических подмоделей. Первая же найденная «ходом вперед» последовательность статических решений обеспечивает проверку сбалансированности варианта развития системы на всех этапах расчетного периода и может служить основой для оценки силы прямых динамических связей. Аналогично после завершения первого «хода назад» определяются все значения показателей δ_{it} , необходимые для выявления силы обратных динамических связей. Именно эти значения показателей δ_{it} и должны применяться в критерии (7), поскольку на последующих циклах уровень недооптимизации системы только уменьшается: показатели δ_{it} имеют тенденцию снижаться до нуля и поэтому перестают в полной мере характеризовать силу обратных динамических связей.

На основе оценки силы прямых и обратных динамических связей предлагается следующая схема исследования динамических свойств экономических систем (рис. 3).

Для изучаемой экономической системы составляются статические подмодели по каждому году $(1, 2, \dots, T)$ рассматриваемого периода, причем продолжительность периода T выбирается заведомо избыточной. Выпол-

няется последовательный расчет статических подмоделей «ходом вперед» и «ходом назад». На основании этого расчета определяется информация, необходимая для оценки силы прямых и обратных динамических связей системы (т. е. по каждому объекту в каждом году вычисляются показатели типа δ_{it} и ε_{cit} , y_{nt} и ε_{vnt}).

В первую очередь анализу подвергаются *обратные динамические* связи, определяющие необходимость учета эффекта последствия и целесообразность оптимизации развития системы в целом за расчетный период. Так, для рассматриваемой в работе ЕЭС после первой итерации расчетов было получено, что примерно 15% включенных в оптимизацию объектов имеют показатели δ_{it} , отличные от нуля. Анализ значений этих показателей по наиболее крупным объектам (табл. 1) свидетельствует о том,

Таблица 1

Характеристика степени недооптимизации объектов ЕЭС
после первой итерации расчетов (руб/квт) *

Объекты	Этап 1		Этап 2		Этап 3	
	δ_{i1}	ε_{ci1}	δ_{i2}	ε_{ci2}	δ_{i3}	ε_{ci3}
КЭС-1	1,4	6,2			6,3	3,0
КЭС-2	20,7	5,6			8,4	2,8
КЭС-3					12,2	2,8
КЭС-4			9,5	6,4		
ЛЭП 1—2	6,1	1,0			4,2	0,4

* При исследовании ЕЭС относительная погрешность экономических показателей объектов принималась равной $\pm 10-15\%$.

что для ряда из них значения δ_{it} на отдельных этапах расчетного периода существенно превышают абсолютную погрешность собственных экономических показателей объектов (ε_{cit}).

Системы подобного типа, у которых в соответствии с критерием (7) обнаружены сильные обратные динамические связи, могут быть отнесены к классу *динамических систем*, оптимизация развития которых должна осуществляться *в целом за расчетный период*. При оптимизации динамических систем в ряде случаев возникает необходимость решения таких принципиальных вопросов, как определение рациональной продолжительности расчетного периода и выяснение числа (а также длительности) выделяемых в нем этапов. Ответ на эти вопросы можно также получить с использованием предложенных критериев оценки силы динамических связей. Известно, что увеличение продолжительности *расчетного* периода обусловлено стремлением правильно учесть последствие решений, непосредственно принимаемых в течение *планового* периода Π . Поэтому понятно, что рациональной продолжительностью расчетного периода можно считать такой отрезок времени, дальнейшее увеличение которого вызывает уточнение решений на уровне планового периода, не выходящее за пределы влияния погрешности исходных данных.

Как показано выше, влияние последующих этапов расчетного периода на предыдущие проявляется через обратные динамические связи. В соответствии с критерием (7) степень влияния конечных этапов расчетного периода (T , $T-1$, $T-2$, ..., $\Pi+1$) на решения планового периода можно определять по изменению показателя δ_{it} в последнем году планового периода δ_{it} . Для этого целесообразно сначала выяснить влияние на дан-

пый показатель решений, принимаемых в последнем году расчетного периода T , т. е. вычислить составляющую $\delta_{i\Pi}^T$ *

Очевидно, если

$$\delta_{i\Pi}^T \leq \varepsilon_{c_{i\Pi}} \text{ для всех } i, \quad (7')$$

то продолжительность расчетного периода допустимо уменьшить на один год и начать аналогичную проверку влияния года $T-1$. Такое исследование ведется до тех пор, пока не будет нарушено условие (7'). Найденную таким образом продолжительность расчетного периода, по-видимому, можно считать рациональной.

Наличие у системы сильных динамических связей еще не означает, что существенные изменения ее структуры происходят ежегодно. Как правило, в экономических системах изменение потребностей и ресурсов происходит скачками, которые затем сменяются их плавным изменением в течение некоторого периода. Поэтому можно предполагать, что и у систем с сильными динамическими связями в пределах расчетного периода имеются этапы, на протяжении которых они относительно стабильны и их динамические связи слабы. Именно в этой ситуации возникает вопрос о целесообразности уменьшения числа этапов расчетного периода и соответствующем удлинении каждого из них. Сущность предлагаемого способа проверки целесообразности объединения годовых промежутков времени в более продолжительные (двух-, трехлетние и т. д.) этапы состоит в определении силы динамических связей между соседними годами. Для измерения силы обратных динамических связей используется одна из составляющих показателя δ_{it} , зависящая от влияния следующего $t+1$ года — δ_{it}^{t+1} **. Способ же проверки силы прямых динамических связей аналогичен описанному выше при проверке допустимости одношаговой оптимизации.

В соответствии с общими критериями оценки силы прямых и обратных динамических связей (7), (8) проверяются связи каждой пары соседних лет расчетного периода. Если она показывает отсутствие сильных

* Показатели $\delta_{i\Pi}^T$ вычисляются по формуле

$$\delta_{i\Pi}^T = \sum_{i=1}^I \Phi_{i\Pi+1}^T u_{ik}^{\Pi} - \Phi_{i\Pi+1}^T,$$

где

$$\Phi_{i\Pi+1}^T = \sum_{i=1}^i \left\{ \sum_{i=1}^i \left\{ \dots \left[\sum_{i=1}^i \left(\sum_{i=1}^i \Phi_{iT} u_{im}^{T-1} \right) u_{im}^{T-2} \dots \right] \right\} u_{im}^{\Pi+2} \right\} u_{im}^{\Pi+1};$$

Φ_{iT} — показатель экономической эффективности использования объекта i в году T , т. е. экономико-математическая оценка уравнений вида (4); $u_{im}^{T-1}, u_{im}^{T-2}, \dots, u_{im}^{\Pi+2}$

$u_{im}^{\Pi+1}$ — коэффициенты столбцов обратной матрицы оптимального базиса статической подмодели соответствующего года послепланового периода, относящихся к уравнениям (4); u_{ik}^{Π} — то же для уравнений вида (2) статической подмодели последнего года планового периода Π .

** Значения δ_{it}^{t+1} вычисляются по формуле

$$\delta_{it}^{t+1} = \sum_{i=1}^i \Delta \Phi_{it+1} u_{ik}^t - \Delta \Phi_{it+1}, \text{ где } \Delta \Phi_{it+1} = \sum_{i=1}^i c_{it+1} u_{im}^{t+1}.$$

динамических связей, то развитие системы в соответствующие смежные годы имеет статический характер и поэтому допустимо их объединение в двухлетние этапы; в противном случае необходимо рассматривать каждый год в отдельности. Выполнение подобного анализа не только для двухлетних, но и для более продолжительных этапов позволяет в конечном итоге определить минимально допустимое число этапов расчетного периода, которое в дальнейшем необходимо рассматривать при оптимизации развития соответствующей системы.

Предложенный способ проверки допустимости объединения некоторых лет в более продолжительные этапы приведен в табл. 2 применительно к ЕЭС; результаты получены при проверке допустимости объединения первого и второго этапов расчетного периода в единый этап длительностью

5 лет. При выявленном соотношении показателей δ_{it}^{t+1} и ε_{cit} явно следует вывод о недопустимости объединения рассматриваемых этапов.

Таблица 2

Характеристика степени недооптимизации объектов ЕЭС на первом этапе, руб/кВт

Новые объекты, вводимые на первом этапе расчетного периода	Показатели недооптимизации объектов, δ_{it}	Абсолютная погрешность собственных затрат объектов, ε_{cit}
КЭС-1	31,1	6,2
КЭС-2	56,7	5,6
КЭС-3	31,3	6,8
КЭС-1	18,7	9,0
ЛЭП 1—2	30,3	1,0

период может быть сведен к плановому. Вопрос о выборе числа и длительности отдельных этапов планового периода при рассмотрении условно динамических систем значительно менее актуален, чем в динамических системах, так как определение оптимального решения каждого года с помощью математической модели, как правило, гораздо проще последующей «ручной» расписфровки поэтапных решений по годам. Однако в ряде случаев при ограниченном быстроедействии ЭВМ и жестких сроках планирования может оказаться целесообразным определение минимально допустимого числа этапов планового периода — как это делалось выше при рассмотрении динамических систем.

Если же проверка по критерию (8) свидетельствует об относительной слабости прямых динамических связей, это означает, что рассматриваемая система может быть отнесена к классу *статических систем* (см. рис. 3) и для нее допустима одношаговая оптимизация сразу на конец планового периода.

Таким образом, описанный метод исследования силы динамических свойств позволяет дать *классификацию экономических систем* в зависимости от важности динамического фактора и степени его влияния на результаты оптимизации и *правильно сформулировать задачу оптимизации их развития*, т. е. проверить целесообразность ее оптимизации за весь период развития, выбрать продолжительность расчетного периода и степень его детализации.

До сих пор речь шла о системах с сильными обратными динамическими связями. Если же обратные связи слабы, но в соответствии с критерием (8) система обладает сильными прямыми связями (рис. 3), то она может быть отнесена к классу *условно динамических*, оптимизацию которых допустимо вести последовательно этап за этапом. При этом следует заметить, что поскольку в условно динамических системах фактически отсутствуют обратные динамические связи, то необходимость учета последствий от принимаемых решений отпадает и, следовательно, расчетный пе-

3. РАЦИОНАЛЬНЫЕ ОБЛАСТИ ПРИМЕНЕНИЯ РАЗЛИЧНЫХ ТИПОВ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДЛЯ ОПТИМИЗАЦИИ РАЗВИТИЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Исследование динамических свойств экономических систем создает предпосылки для обоснованного выбора инструмента их оптимизации, т. е. типа математической модели и метода ее решения. Важность этой задачи определяется тем, что проведение перспективных расчетов, как правило, связано с многократным использованием математической модели экономической системы. Поэтому, очевидно, следует стремиться к ее максимально возможному упрощению за счет исключения тех динамических связей, влияние которых на результаты оптимизации относительно невелико (т. е. меньше влияния возможной погрешности исходной информации).

В настоящее время для оптимизации перспективного развития экономических систем реально могут использоваться только математические модели, решаемые методами *линейного* программирования. Наиболее общее описание развития системы может быть получено с помощью линейной модели, принципиальная структура которой соответствует приведенной на рис. 1 (в дальнейшем она условно называется *полной динамической моделью*). Эта модель позволяет с требуемой точностью учитывать все динамические связи экономических систем, обусловленные многошаговым характером их развития. Основным недостатком такого типа модели является ее чрезвычайно большая размерность и трудоемкость решения на ЭВМ.

Специфическая структура полной динамической модели (количество связующих переменных в модели относительно невелико, форма связи переменных очень проста) обеспечивает эффективность ее решения методами блочного линейного программирования. По-видимому, для решения полной динамической модели экономических систем в наибольшей мере подходит описанный выше поэтапный метод оптимизации СЭИ, который, во-первых, имеет сравнительно простую вычислительную процедуру, во-вторых, требует малого числа итераций для достижения решения, оптимального с точностью до погрешности исходных данных, в-третьих, позволяет прервать процесс оптимизации на любой итерации, обеспечив при этом строгую сбалансированность варианта развития системы за период в целом и надежную оценку степени его недооптимизации (см. рис. 2).

Выполненные с помощью этого метода расчеты полной динамической модели ЕЭС кратко характеризуются в табл. 3, где показаны оптимальные значения суммарных затрат на развитие ЕЭС в течение расчетного периода (см. первую строку табл. 3).

Таблица 3

Характеристика оптимальных значений суммарных затрат на развитие ЕЭС (функционала Φ), полученных при использовании трех типов моделей

Тип модели	Суммарные затраты		Составляющие затрат по этапам расчетного периода			
	млн. руб.	%	I	II	III	IV
Полная динамическая	9277	100	1192	1448	1916	4721
Компактная динамическая	9532	102,7	1184	1634	1926	4788
Последовательность статических моделей	9612	103,6	1528	1605	1873	4607

Если в формулировку полной динамической модели внести два допущения: об отсутствии консервации и ликвидации объектов в течение расчетного периода (т. е. принять $X_{it}^k = X_{it}^n = 0$ в условиях 1, 2, 3), а также о стабильности способов функционирования каждого объекта на протяжении расчетного периода, то она модифицируется в так называемую *компактную динамическую модель*, получившую достаточно широкое применение (см., например [6]). Первое из этих допущений для большинства экономических систем представляется вполне приемлемым, поскольку трудно предположить, что при оптимизации их развития на 10–15 лет вперед может оказаться целесообразной консервация (недоиспользование) или даже ликвидация (демонтаж) новых, как правило, технически наиболее совершенных объектов. Вторая же предпосылка в ряде случаев может существенно ограничить состав возможных технологических способов эксплуатации объектов в течение расчетного периода и тем самым исказить результаты оптимизации. Возможный же способ преодоления этой условности путем включения в модель всех комбинаций способов эксплуатации объектов приводит к непомерному росту числа переменных и практически реализуем лишь в ограниченных пределах.

Как и полная, компактная динамическая модель позволяет непосредственно учитывать многоэтапность развития системы. Но по сравнению с полной динамической моделью компактная имеет значительно меньшую размерность и соответственно трудоемкость расчета на ЭВМ. Специфическая структура модели (значительно большая плотность матрицы условий и несравненно более высокое число связующих переменных между подмоделями) делают предпочтительным решение ее как единой задачи линейного программирования.

Для оценки сравнительной эффективности применения компактной динамической модели были выполнены расчеты оптимального варианта развития ЕЭС при той же исходной информации, что принималась при расчете полной динамической модели ЕЭС. Во второй строке табл. 3 приведены полученные при этом оптимальные значения суммарных затрат на развитие системы. Сравнение их с функционалом полной модели свидетельствует о довольно существенном повышении затрат (на 2,7%) при принятии указанных выше допущений, поскольку на десятилетний период трудно заранее предсказать возможные способы функционирования объекта (режим их использования, условия топливоснабжения и т. д.). Этот пример свидетельствует о большой опасности чрезмерного загромождения компактной модели и необходимости глубокого анализа при назначении возможных способов функционирования объектов.

Если отказаться от учета обратных динамических связей, то полная динамическая модель (рис. 1) модифицируется в так называемую *последовательность статических моделей*, в которой оптимальный вариант развития системы определяется путем поэтапного расчета (от первого к последнему этапу) статических моделей. В вычислительном отношении этот тип моделей значительно эффективнее полной и компактной динамической модели, во-первых, из-за пропорциональной зависимости между количеством этапов расчетного периода и трудоемкостью расчета (в то время как в полной и компактной динамической модели эта зависимость степенная); во-вторых, из-за меньшей размерности каждой статической модели, поскольку у нее отсутствуют весьма многочисленные условия вида (5). Однако при всех вычислительных преимуществах применение последовательности статических моделей для оптимизации экономических систем может привести к существенному перерасходу затрат. В частности, для ЕЭС такой перерасход, вычисленный по результатам подстановки

статических решений в функционал полной динамической модели, составил 3,6% суммарных затрат на развитие ЕЭС (табл. 3).

Анализ описанных выше типов математической модели с точки зрения учета динамических связей позволяет указать, какому классу экономических систем адекватен тот или иной тип модели.

Для динамических систем, у которых сильны обратные динамические связи, важно выполнить условие совместной оптимизации их развития на всех этапах расчетного периода. Этому условию удовлетворяют полная и компактная динамические модели. Выбор той или иной из них для конкретной системы определяется адекватностью описания условий ее развития и вычислительными возможностями модели. Полная динамическая модель не накладывает существенных ограничений на адекватность описания условий развития системы, однако с вычислительной точки зрения для нее предпочтительны системы с малым числом объектов, поскольку это уменьшает число связующих переменных (следовательно, количество итераций) и размерность каждой подмодели. В противоположность этому вычислительные возможности компактной динамической модели слабо зависят от числа объектов системы, но заметно ухудшаются при наличии у них множества возможных способов функционирования; в последнем случае может быть нарушена и адекватность описания условий развития системы. Таким образом, для динамической системы с относительно небольшим числом объектов, но широкими возможностями изменения технологии их использования (например, электроэнергетика, нефтепереработка) предпочтительнее использование полной динамической модели. Напротив, для системы с большим числом объектов и малыми возможностями варьирования способов их использования (например, угольная промышленность) более удобной может оказаться компактная динамическая модель.

Для условно динамических систем, имеющих сильные прямые и слабые обратные динамические связи, адекватным инструментом оптимизации является последовательность статических моделей; их применение позволяет выполнить основное условие развития этого класса систем — обеспечить преємственность и локальную оптимальность (для каждого этапа) статических решений по годам планового периода.

Для статических систем, у которых слабы не только обратные, но и прямые динамические связи, необходимость использования любого из рассмотренных выше типов математических моделей отпадает. Очевидно лучшим инструментом оптимизации подобных систем является статическая модель, позволяющая находить оптимальное состояние системы одношаговым расчетом на последний год планового периода.

Предложенный метод поэтапной оптимизации и исследования динамических свойств позволяет изучать лишь некоторые формы проявления фактора динамики сложных экономических систем, а именно, *многоэтапный характер их развития во времени* (изменение системы по этапам расчетного периода и взаимозависимость решений, принимаемых на различных этапах). Но и при исследовании этих вопросов данный метод применим пока только к тем системам, у которых связь между соседними годами осуществляется главным образом через производственные мощности объектов и отсутствует одновременность процессов производства и реализации продукции в многолетнем разрезе.

С учетом сказанного для дальнейшего исследования динамических свойств экономических систем наряду с усовершенствованием предложенного метода (уточнение критериев и приемов определения силы прямых и обратных динамических связей, проведение практических исследований ряда экономических систем) было бы целесообразно распространить его

на экономические системы с многолетними разрывами в сроках производства и реализации продукции, т. е. на сложные комплексы, создающие производственные фонды других отраслей.

Наряду с этим для изучения реального процесса развития экономических систем необходимо исследовать и другие формы проявления динамики, в первую очередь дискретный характер развития объектов во времени и обусловленные им нелинейные зависимости затрат на объекты от их производительности в период строительства, а также влияние на результаты оптимального планирования возрастающей во времени неопределенности знаний о будущих условиях развития системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. А. Кузнецов, А. С. Макарова, Ю. П. Сыров, Л. С. Хрилев. Анализ свойства развития во времени больших систем энергетики. В сб. Оптимизация и управление в больших системах энергетики. Иркутск, 1970 (АН СССР, Сиб. отделение, Сиб. энергет. ин-т).
2. А. А. Макаров, В. Н. Ханаева, Н. М. Виленский, С. А. Бричева. Выбор типа математической модели для оптимизации топливно-энергетического баланса района. В кн. Сб. докладов на Всесоюзном совещании по вопросам методики и практики совместной оптимизации топливно-энергетического баланса страны и отдельных экономических районов. Тбилиси, 1970.
3. Н. Е. Байбородин, А. А. Макаров. Один алгоритм блочного метода линейного программирования. В сб. Методы математического моделирования в энергетике. Иркутск, Вост.-Сиб. кн. изд., 1966.
4. Д. Н. Данциг, Ф. Вулф. Алгоритм разложения для задач линейного программирования. Математика, 1964, т. 8, № 1.
5. D. B. Rozen. Primal Partician Programming for Block Diagonal Matricies. Numerische mathematik, 1964, N 6.
6. Ю. П. Сыров, А. С. Макарова, А. Н. Зейлигер, Л. Д. Хабачев. Линейная математическая модель для оптимизации структуры энергетических систем с применением ЭЦВМ. Теплоэнергетика, 1966, № 10.

Поступила в редакцию
8 VI 1971