ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ 1973 том IX, вып. 1

НЕЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ. ИГРЫ

ВОГНУТЫЕ ИГРЫ МНОГИХ ЛИЦ
(Примеры реализации)

С. И. ЗУХОВИЦКИЙ, Р. А. ПОЛЯК, М. Е. ПРИМАК

(Москва, Киев)

В настоящей статье приводятся некоторые примеры реализации понятия и методов отыскания нормализованной точки равновесия (н.т.р.) вогнутой игры многих лиц.

Многие задачи математического программирования, теории игр и математической теории экономических моделей тесно связаны с задачей отыскания н.т.р. вогнутой игры многих лиц. Это позволило применить для решения указанных задач развитые в [1—3] численные методы отыскания н.т.р. В разд. 1 для решения задачи выпуклого программирования, рассматриваемой как игра двух лиц, функции выигрышей которых определяются функцией Лагранжа, используется метод, описанный в [3, разд. 2]. Получаемый таким образом сходящийся алгоритм оказывается близким по форме методу «малого шага» [4]. Далее в разд. 1 исследуется классическая задача отыскания седловой точки выпукло-вогнутой функции, т. е. фактически рассматривается выпукло-вогнутая игра двух лиц, стратегии которых выбираются из выпуклых компактов. Для решения этой задачи могут быть применены методы, приведенные в [3, разд. 2—4]. Применительно к данной задаче конкретизируется один из алгоритмов разд. 4 указанной работы. Как уже отмечалось в [3], этот алгоритм является обобщением на случай вогнутой игры многих лиц известного метода условного градиента [5, 6], игровое происхождение которого обнаружил В. А. Волконский в [7]. Мы указываем еще одну возможность получения метода условного градиента путем применения игрового метода [7] к задаче выпуклого программирования, трактуемой как некоторая игра двух лиц с нулевой суммой.

В разд. 2 устанавливается эквивалентность классической модели экономики Вальда [8, 9] некоторой вогнутой игре n лиц. Наличие такой связи позволяет применить для отыскания равновесия в модели Вальда методы [3, разд. 2, 3]. Конкретизация одного из этих методов приводит к алгоритму отыскания равновесия в модели Вальда, который дает возможность наряду с равновесным вектором интенсивностей $x^\bullet$ построить соответствующий ему равновесный вектор $v^\bullet$ цен ресурсов. Затем строится одна динамическая модель производства. Эквивалентность этой модели некоторой вогнутой игре многих лиц позволила для отыскания оптимальной траектории $x^\bullet(t)$ модели применить алгоритмы из [3, разд 4]. Конкретизация одного из двух алгоритмов применительно к нашей модели дает метод отыскания траектории $x^\bullet(t)$ и «динамических» цен $\psi^\bullet(t)$ ресурсов, соответствующих этой траектории. Удается экономически проинтерпретировать используемый в рассматриваемом методе принцип максимума Л. С. Понтрягина [10]. В [11] В. Л. Макаров установил эквивалентность классической модели Эрроу — Дебре [12] некоторой вогнутой игре многих лиц. Используя аналогичные соображения, можно установить подобный факт относительно модели обмена Б. Г. Питтеля [13]. Однако непосредственное применение игровых методов [3] для отыскания равновесия в данных моделях невозможно.

1. ЗАДАЧА ВЫПУКЛОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ И ВЫПУКЛО-ВОГНУТАЯ ИГРА ДВУХ ЛИЦ

1) **Игровой метод решения задачи выпуклого программирования.** Применим описанный в [3, разд. 2] алгоритм наискорейшего спуска к задаче выпуклого программирования, т. е. задаче отыскания

$$\min\{f_0(x)\,|\,f_j(x)\leqslant 0,\quad j=1,\ldots,p\},\tag{1}$$

где все функции $f_j(x)$, $j=0,1,\ldots,p$, выпуклы и дифференцируемы и множество $\{x\,|\,f_j(x)\leqslant 0,\ j=1,\ldots,p\}$ удовлетворяет условию Слейтера. Как известно (см., например, [14]), решение задачи (1) эквивалентно отысканию седловой точки функции Лагранжа $F(x,y)=f_0(x)+\sum_{j=1}^{p}y_jf_j(x)$, $\forall y\geqslant 0$, т. е. точки (x^*,y^*), для которой $\min\limits_x\max\limits_{y\geqslant 0}F(x,y)=\max\limits_{y\geqslant 0}\min\limits_x F(x,y)$, так что

$$f_0(x^*)+\sum_{j=1}^{p}y_jf_j(x^*)\leqslant f_0(x^*)+\sum_{j=1}^{p}y_j^*f_j(x^*)\leqslant$$

$$\leqslant f_0(x)+\sum_{j=1}^{p}y_j^*f_j(x),\ \forall x\in E^n,\ \forall y\geqslant 0.$$

Другими словами, решение задачи выпуклого программирования эквивалентно отысканию н.т.р. (x^*,y^*) вогнутой игры двух лиц со следующими функциями выигрышей игроков: $\varphi_1(x,y)=-F(x,y)$, $\varphi_2(x,y)=F(x,y)$. В этом случае вектор-функция $g(x)$ имеет вид

$$g(x,y)=\left(-\frac{\partial F(x,y)}{\partial x_1},\ldots,-\frac{\partial F(x,y)}{\partial x_n},f_1(x),\ldots,f_p(x)\right).$$

Пусть числа R_1 и R_2 таковы, что $\|x^*\|\leqslant R_1$, $\|y^*\|\leqslant R_2$. Наиболее трудоемкая часть алгоритма [3, разд. 2], связанная с отысканием направления «подъема» в данной игре двух лиц, значительно упрощается, так как на вектор x не наложено никаких ограничений, а вектор y удовлетворяет лишь условию неотрицательности, т. е. $h_j(x,y)\equiv y_j\geqslant 0$, $j=1,\ldots,p$, и эти неравенства определяют Ω в $n+p$-мерном пространстве. В качестве исходного приближения берем вектор (x^0,y^0) такой, что $\|x^0\|\leqslant R_1$, $R_2\geqslant 0$, $\|y^0\|\leqslant R_2$. Пусть уже найдены приближения $(x^0,y^0),\ldots,(x^k,y^k)$. Для отыскания направления движения $(\zeta_x^{k+1},\ \zeta_y^{k+1})$ из точки (x^k,y^k) достаточно решить следующую задачу квадратичного программирования

$$\min\Big\{\|g(x^k,y^k)+\sum_{j\in J(y^k,\lambda_{k+1})}v_je_j\|^2\,|\,v_j\geqslant 0,\qquad j\in J(y^k,\lambda_{k+1})=$$

$$=\{j\,|\,0\leqslant y_j^k<\lambda_{k+1}\}\Big\},\tag{2}$$

где e_j означает $n+p$-мерный орт, $n+j$-я компонента которого равна 1, так как $\nabla h_j(x^k,y^k)=(0,\ldots,0,\ldots,\alpha_{n+j}=1,0,\ldots,0)$. Как нетрудно убедиться, набор чисел

$$v_j^{k+1} = \begin{cases} -f_j(x^k), & \text{если } f_j(x^k) \leqslant 0, \\ 0, & \text{если } f_j(x^k) > 0, \quad j \in J(y^k, \lambda_{k+1}), \end{cases}$$

является решением задачи (2) и

$$\zeta_x^{k+1} = -\nabla f_0(x^k) - \sum_{j=1}^{p} y_j^k \nabla f_j(x^k),$$

$$\zeta_{y,j}^{k+1} = \begin{cases} 0, \text{ если } y_j^k < \lambda_{k+1},\ f_j(x^k) \leqslant 0, \\ f_j(x^k) \text{ — в остальных случаях.} \end{cases}$$

Для отыскания нового приближения вычисляем сначала

$$t'_{k+1} = \min\left\{-\frac{y_j^k}{f_j(x^k)} > 0\right\}, \qquad t_{k+1} = \min\{t'_{k+1}, \lambda_{k+1}\}$$

и полагаем $\tilde{x}^{k+1} = x^k - [\nabla f_0(x^k) + \sum_{j=1}^{p} y_j^k \nabla f_j(x^k)]t_{k+1}$,

$$\tilde{y}_j^{k+1} = \begin{cases} y_j^k, \text{ если } y_j^k < \lambda_{k+1}, f_j(x^k) \leqslant 0, \\ y_j^k + t_{k+1} f_j(x^k) \text{ — в остальных случаях.} \end{cases}$$

Находим новое приближение (x^{k+1}, y^{k+1})

$$x^{k+1} = \begin{cases} \tilde{x}^{k+1}, & \text{если } \|\tilde{x}^{k+1}\| \leqslant R_1, \\ R_1 \dfrac{\tilde{x}^{k+1}}{\|\tilde{x}^{k+1}\|}, & \text{если } \|\tilde{x}^{k+1}\| > R_1 \end{cases}$$

$$y^{k+1} = \begin{cases} \tilde{y}^{k+1}, & \text{если } \|\tilde{y}^{k+1}\| \leqslant R_2, \\ R_2 \dfrac{\tilde{y}^{k+1}}{\|\tilde{y}^{k+1}\|}, & \text{если } \|\tilde{y}^{k+1}\| > R_2. \end{cases}$$

Так как $g(x, y)$ не удовлетворяет условию строгого убывания [3, (1.1)], то вопрос о сходимости приведенного алгоритма требует самостоятельного изучения и решается следующей теоремой.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия:* 1) *функции* $f_j(x)$, $j = 1, \ldots, p$, *выпуклы и непрерывно дифференцируемы*; 2) $f_0(x)$ *строго выпукла*; 3) *множество* $\{x \mid f_j(x) \leqslant 0, j = 1, \ldots, p\}$ *удовлетворяет условию Слейтера. Тогда последовательность* $\{x^k\}$ *содержит подпоследовательность* $\{x^{k_i}\}$, *сходящуюся к решению* x^* *задачи* (1).

Доказательство. Предположим противное, т. е. что существует $\varepsilon > 0$, для которого $\|x^k - x^*\| \geqslant \varepsilon > 0$. Имеем

$$\|x^k - x^*\|^2 - \|\tilde{x}^{k+1} - x^*\|^2 + \|y^k - y^*\|^2 - \|\tilde{y}^{k+1} - y^*\|^2 =$$

$$= t_{k+1}\Big[-2\Big(\nabla f_0(x^k) + \sum_{j=1}^{p} y_j^k \nabla f_j(x^k), x^* - x^k\Big) - t_{k+1}\Big\|\nabla f_0(x^k) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{p} y_j^k \nabla f_j(x^k)\Big\|^2\Big] + t_{k+1}\Big[2\sum_{j=1}^{p} f_j(x^k)(y_j^* - y_j^k) -$$

$$-2 \sum_{y_j^k < \lambda_{k+1},\, f_j(x^k) \leqslant 0} f_j(x^k)(y_j^* - y_j^k) - t_{k+1} \sum_{k < \lambda_{k+1},\, f\ (x^k) > 0} f_j^2(x^k) -$$

$$-t_{k+1}\sum_{y_j^k\geqslant\lambda_{k+1}} f_j^2(x^k)\Big]\geqslant 2t_{k+1}\Big[-\Big(\nabla f_0(x^k)+\sum_{j=1}^{p} y_j^k\nabla f_j(x^k), x^*-x^k\Big)+$$

$$+\sum_{j=1}^{p} f_j(x^k)(y_j^*-y_j^k)-\sum_{y_j^k<\lambda_{k+1},\, f_j(x^k)\leqslant 0} f_j(x^k)(y_j^*-y_j^k)\Big]\geqslant$$

$$\geqslant 2t_{k+1}\Big[-\Big(\nabla f_0(x^k)+\sum_{j=1}^{p} y_j^k\nabla f_j(x^k), x^*-x^k\Big)+$$

$$+\sum_{j=1}^{p} f_j(x^k)(y_j^*-y_j^k)+\sum_{y_j^k<\lambda_{k+1},\, f_j(x^k)\leqslant 0} f_j(x^k)y_j^k\Big].$$

В соответствии со сделанным выше предположением о строгой выпуклости функции $F(x, y^*)$ существует $\mu>0$ такое, что

$$F(x^k, y^*)-F(x^*, y^*)\geqslant\mu>0. \tag{3}$$

В силу выпуклости функции $F(x, y^k)$

$$-\Big(\nabla f_0(x^k)+\sum_{j=1}^{p} y_j^k\nabla f_j(x^k), x^*-x^k\Big)+\sum_{j=1}^{p} f_j(x^k)(y_j^*-y_j^k)\geqslant$$

$$\geqslant F(x^k, y^k)-F(x^*, y^k)+F(x^k, y^*)-F(x^k, y^k)=$$

$$=F(x^k, y^*)-F(x^*, y^k)=F(x^k, y^*)-F(x^*, y^*)+F(x^*, y^*)-$$

$$-F(x^*, y^k)\geqslant F(x^k, y^*)-F(x^*, y^*)\geqslant\mu>0. \tag{4}$$

Учитывая $\|\tilde{x}^{k+1}-x^*\|^2\geqslant\|x^{k+1}-x^*\|^2$, $\|\tilde{y}^{k+1}-y^*\|^2\geqslant\|y^{k+1}-y^*\|^2$, а также (3) и (4), получим для достаточно больших k неравенство $\|x^k-x^*\|^2-\|x^{k+1}-x^*\|^2+\|y^k-y^*\|^2-\|y^{k+1}-y^*\|^2\geqslant\mu t_{k+1}$, из которого следует, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} t_k$ сходится. Но из самого выбора шага t_k следует, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} t_k$ расходится. Таким образом, получено противоречие, доказывающее теорему.

2) **Седловая точка выпукло-вогнутой функции.** Тесная связь между вогнутыми играми и задачей выпуклого программирования особенно ярко проявляется в задаче отыскания седловой точки выпукло-вогнутой функции $\varphi(x, y)$, т. е. отыскания точки (x^*, y^*), для которой

$$\varphi(x, y^*)\leqslant\varphi(x^*, y^*)\leqslant\varphi(x^*, y),\quad \forall(x, y)\in\Omega_x\times\Omega_y, \tag{5}$$

где $\varphi(x, y)$ — вогнутая по $x\in\Omega_x\subset E^m$ и выпуклая по $y\in\Omega_y\subset E^n$ функция, а Ω_x и Ω_y — выпуклые компакты.

Как известно (см., например, [15]), при перечисленных условиях седловая точка существует. Для решения задачи (5) в [7] имеется метод, являющийся обобщением известного метода Брауна — Робинсон решения матричной игры двух лиц. Вариант метода [7] заключается в построении пары последовательностей $\{x^k\}$, $\{y^k\}$ из условий

$$x^{k+1}=x^k+\lambda_{k+1}(\theta_1(x_k)-x^k),\quad y^{k+1}=\theta_2(y^2), \tag{6}$$

где $\theta_1(x^k)$ и $\theta_2(y^k)$ определяются в результате решения следующих задач выпуклого программирования: $\varphi(\theta_1(x^k)), \quad y_k = \max\{\varphi(x, \ y^k) \mid x \in \Omega_x\}$, $\varphi(x^{k+1}, \theta_2(y^k)) = \min\{\varphi(x^{k+1}, y) \mid y \in \Omega_y\}$, а неотрицательная последовательность $\{\lambda_k\}$ выбирается из условий

$$\lambda_k \to 0, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k = \infty. \tag{7}$$

Применим этот процесс к задаче выпуклого программирования, предварительно сведя ее к игре двух лиц с нулевой суммой. Пусть требуется отыскать

$$f(x^*) = \max\{f(x) \mid x \in \Omega\}, \tag{8}$$

где $f(x)$ — вогнутая и гладкая функция, а Ω — выпуклый компакт в E^n. Поскольку $f(x) = \min\limits_{y \in \Omega}\{f(y) + (\nabla f(y), \ x - y)\}$, то задача (8) эквивалентна отысканию x^* и $y^\cdot$, для которых

$$f(y^*) + (\nabla f(y^*), x^* - y^*) = \max_{x \in \Omega} \min_{y \in \Omega}\{f(y) + (\nabla f(y), x - y)\},$$

причем если Ω строго выпукло, то $x^\cdot = y^\cdot$. Легко заметить, что

$$\max_{x \in \Omega} \min_{y \in \Omega}\{f(y) + (\nabla f(y), x - y)\} = \min_{y \in \Omega} \max_{x \in \Omega}\{f(y) + (\nabla f(y), x - y)\}, \tag{9}$$

т. е. решение задачи (8) эквивалентно отысканию седловой точки функции $\varphi(x, \ y) = f(y) + (\nabla f(y), \ x - y)$. Используем для решения последней игры метод (6). Получим пару последовательностей

$$x^{k+1} = x^x + \lambda_{k+1}(\theta_1(x^k) - x^k), \quad y^{k+1} = x^{k+1}, \tag{10}$$

где $\theta_1(x^k)$ определяется при решении следующей задачи: $(\nabla f(x^k), \theta_1(x^k) - x^k) = \max\{(\nabla f(x^k), \ x - x^k) \mid x \in \Omega\}$, т. е. последовательность $\{x^k\}$ совпадает с последовательностью приближений к вектору $x^\cdot$, получающейся в результате применения к задаче (7) метода условного градиента.

Таким образом, применение игрового метода [7] к задаче выпуклого программирования (8), трактуемой как игра (9), позволило получить известный метод условного градиента [5, 6], отличительной особенностью которого является выбор величины шага из (7). Оказалось [3], что такого рода метод, примененный к игре многих лиц, позволяет построить последовательность, сходящуюся к нормализованной точке равновесия $x^\cdot$.

Используем теперь указанный метод для отыскания седловой точки выпукло-вогнутой функции. Заметим предварительно, что задача отыскания н.т.р. для рассматриваемой игры двух лиц заключается по определению в отыскании такой точки $(x^\cdot, \ y^\cdot)$, для которой $\max\{\Phi(x^*, \ y^\cdot; \ x, \ y) \mid (x, \ y) \in \Omega\} = \Phi(x^*, y^\cdot; x^\cdot, y^\cdot)$, т. е.

$$\max\{\varphi_1(x, \ y^\cdot) + \varphi_2(x^\cdot, \ y) \mid (x, \ y) \in \Omega\} = \max\{\varphi_1(x, \ y^*) \mid x \in \Omega_x\} + \\ + \max\{\varphi_2(x^\cdot, \ y) \mid y \in \Omega_y\} = \varphi_1(x^\cdot, \ y^\cdot) + \varphi_2(x^\cdot, \ y^\cdot) = 0. \tag{11}$$

Как уже отмечалось в [3, разд. 1, п. 1], н.т.р. $(x^\cdot, \ y^\cdot)$ является также обычной точкой равновесия, т. е. для $(x^\cdot, \ y^*)$ имеют место равенства

$$\varphi(x^\cdot, \ y^\cdot) = \varphi_1(x^\cdot, \ y^\cdot) = \max\{\varphi_1(x, \ y^\cdot) \mid (x, \ y^\cdot) \in \Omega\} = \max\{\varphi(x, \ y^\cdot) \mid x \in \Omega_x\},$$
$$-\varphi(x^\cdot, \ y^\cdot) = \varphi_2(x^\cdot, \ y^*) = \max\{\varphi_2(x^\cdot, \ y) \mid (x^\cdot, \ y) \in \Omega\} = \\ = \max\{-\varphi(x^\cdot, \ y) \mid y \in \Omega_y\} = -\min\{\varphi(x^\cdot, \ y) \mid y \in \Omega_y\}, \tag{12}$$

т. е. для вектора (x^*, y^*) имеем $\varphi(x, y^*) \leqslant \varphi(x^*, y^*) \leqslant \varphi(x^*, y)$, $\forall (x, y) \in \Omega_x \times \Omega_y$. Таким образом, каждая н.т.р., являясь точкой равновесия рассматриваемой игры двух лиц, есть также седловая точка функции $\varphi(x, y)$ на Ω. Аналогично убеждаемся, что каждая седловая точка функции $\varphi(x, y)$ на Ω — точка равновесия рассматриваемой игры двух лиц, а следовательно, и н.т.р., так что задача отыскания седловой точки выпукло-вогнутой функции эквивалентна отысканию нормализованной точки равновесия некоторой вогнутой игры двух лиц. В рассматриваемой игре двух лиц роль вектор-функции $g(x)$ (см. [3]) играет вектор $g(x, y) = (\nabla_x\varphi_1(x, y), \nabla_y\varphi_2(x, y))$.

Применение метода условного градиента [3] с шагом, выбираемым из (7), приводит к паре последовательностей

$$x^{k+1} = x^k + \lambda_{k+1}(\theta_1(x^k) - x^k),\ y^{k+1} = y^k + \lambda_{k+1}(\theta_2(y^k) - y^k), \qquad (13)$$

где $\theta(x^k, y^k) = (\theta_1(x^k), \theta_2(y^k))$ — решение следующей задачи выпуклого программирования: $\max\{(\nabla_x\varphi_1(x^k, y^k), x - x^k) + (\nabla_y\varphi_2(x, y), y - y^k) \mid (x, y) \in \Omega = \Omega_x \times \Omega_y\}$, т. е.

$$(\nabla_x\varphi_1(x^k, y^k), \theta_1(x^k) - x^k) = \max\{(\nabla_x\varphi_1(x^k, y^k), x - x^k) \mid x \in \Omega_x\},$$
$$(\nabla_y\varphi_2(x^k, y^k), \theta_2(y^k) - y^k) = \max\{(\nabla_y\varphi_2(x^k, y^k), y - y^k) \mid y \in \Omega_y\}.$$

Из [3, теорема 4] следует, что последовательности $\{x^k\}$ и $\{y^k\}$ содержат сходящиеся к x^* и y^* подпоследовательности. Таким образом, применение метода условного градиента с шагом, выбираемым из (7), к задаче (5) позволяет вместо решения на каждом шаге двух задач выпуклого программирования, заключающихся в отыскании $\max\{\varphi(x, y^k) \mid x \in \Omega_x\}$ и $\min\{\varphi(x^{k+1}, y) \mid y \in \Omega_y\}$, сделать лишь один шаг метода условного градиента в соответствующих задачах выпуклого программирования, как это имеет место в процессе (13).

2. ВОГНУТАЯ ИГРА n ЛИЦ И МОДЕЛЬ ПРОИЗВОДСТВА ВАЛЬДА

1) Эквивалентность модели Вальда вогнутой игре n лиц. Рассмотрим классическую модель производства Вальда [8, 9], заключающуюся в следующем. Пусть в некоторой экономике производится n продуктов и используется r ресурсов, имеющихся в количествах соответственно $a_1, \ldots, a_r$. Величина a_{ij}, $i = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, r$, указывает затраты j-го ресурса, необходимые для производства единицы i-го продукта. Однако в отличие от классической задачи о максимальной рентабельности предприятий [16], цены производимых продуктов не постоянны, а зависят от количеств произведенных продуктов. Пусть функция $f_i(x) = f_i(x_1, \ldots, x_n)$ указывает цену единицы i-го продукта при условии, что продукты произведены в количествах $x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n$. В [8] Вальд при некоторых предположениях относительно функций $f_i(x)$ и того, что множество $\Omega_0 = \{x \mid \sum\limits_{i=1} a_{ij}x_i \leqslant a_j,$ $j = 1, \ldots, r,\ x_i \geqslant 0,\ i = 1, \ldots, n\}$ является многогранником, установил существование неотрицательного вектора продуктов $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ и неотрицательного вектора оценок ресурсов $v^* = (v_1^*, \ldots, v_r^*)$ таких, что

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i^* \leqslant a_j \quad j = 1, \ldots, r; \qquad \sum_{j=1} a_{ij}v_j^* \geqslant f_i(x^*), \quad i = 1, \ldots, n,$$

$$\left(a_j - \sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i^*\right)v_j^* = 0, \qquad j = 1, \ldots, r. \qquad (14)$$

$$\left(\sum_{j=1}^{r} a_{ij}v_j^* - f_i(x^*)\right)x_i^* = 0, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

В [9] Г. Кун, считая Ω_0 многогранником, а функции $f_i(x)$ неотрицательными и непрерывными на Ω_0, доказал существование вектора продуктов $x^* \in \Omega_0$, являющегося решением задачи линейного программирования

$$\max\left\{\sum_{i=1}^{n} f_i(x^*)x_i | x \in \Omega_0\right\} = \sum_{i=1}^{n} f_i(x^*)x_i^*. \tag{15}$$

Существование векторов x^* и v^*, удовлетворяющих (14), есть простое следствие (15) и теорем двойственности линейного программирования. Оказывается, что вектор x^*, устанавливающий равновесие в модели производства Вальда, является н.т.р. вогнутой игры n лиц, в которой функции выигрышей имеют вид $\varphi_i(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = \int\limits_0^{x_i} f_i(x_1, \ldots, t, \ldots, x_n)\,dt$, $i = 1, \ldots, n$, при условии, что игроки в качестве своих стратегий выбрали соответственно значения $x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n$, где $x = (x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) \in \Omega_0$, т. е., положив $\Phi(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{n} \varphi_i(x_1, \ldots, y_i, \ldots, x_n)$, получим для равновесного вектора x^*

$$\Phi(x^*, x^*) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x^*) =$$

$$= \max\left\{\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x_1^*, \ldots, y_i, \ldots, x_n^*) \,|\, (y_1, \ldots, y_i, \ldots, y_n) \in \Omega_0\right\}. \tag{16}$$

Точнее, имеет место следующая

Теорема 2. *Если каждая функция $f_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$, непрерывна по совокупности переменных и не возрастает по соответствующей переменной x_i и Ω_0 — многогранник, то для того, чтобы точка x^* была решением задачи* (15), *необходимо и достаточно, чтобы эта точка была решением задачи* (16).

Необходимость. Прежде всего заметим, что $g(x) = \nabla_y\Phi(x, y)|_{y=x} = (f_1(x), \ldots, f_i(x), \ldots, f_n(x))$. Пусть x^* — решение задачи (15), т. е. $\max\{\sum\limits_{i=1}^{n} f_i(x^*)x_i | x \in \Omega_0\} = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i(x^*)x_i^* = (g(x^*), x^*)$, так что

$$\max\{(g(x^*), x - x^*) \,|\, x \in \Omega_0\} = 0. \tag{15'}$$

Из условия невозрастания $f_i(x_1, \ldots, y_i, \ldots, x_n)$ по y_i, $i = 1, \ldots, n$, вытекает вогнутость функции $\varphi_i(x_1, \ldots, y_i, \ldots, x_n)$ по y_i. Следовательно, $\Phi(x^*, y)$ вогнута по y. Таким образом, (15′) означает, что для вектора x^* выполняется критерий оптимальности в задаче отыскания $\max\{\Phi(x^*, y) \,|\, y \in \Omega_0\}$, являющейся задачей выпуклого программирования, т. е. $\max\{\Phi(x^*, y) \,|\, y \in \Omega_0\} = \Phi(x^*, x^*)$ и вектор x^* — решение задачи (16).

Достаточность. Пусть x^* — решение задачи (16), т. е. $\max\{\Phi(x^*, y) \,|\, y \in \Omega_0\} = \Phi(x^*, x^*)$. Тогда для x^* должен выполняться критерий оптимальности в предыдущей задаче выпуклого программирования $\max\{(g(x^*),$

$x-x^*) \mid x \in \Omega_0\} = 0$. Следовательно,

$$\max\left\{\sum_{i=1}^{n} f_i(x^*)x_i \mid x \in \Omega_0\right\} = \sum_{i=1}^{n} f_i(x^*)x_i^*,$$

что и требовалось доказать.

Теорема справедлива, если многогранник Ω_0 заменить ограниченным замкнутым выпуклым множеством Ω.

2) Алгоритм для отыскания равновесия в модели производства Вальда. Рассмотрим теперь применительно к модели Вальда алгоритм, описанный в [3, разд. 2]. Обозначим $J(x, \lambda) = \{j \mid a_i - \lambda < \sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i \leqslant a_j\}$, $J(x) = \{j \mid \sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i = a_j\}$, $I(x, \lambda) = \{i \mid 0 \leqslant x_i < \lambda\}$, $I(x) = \{i \mid x_i = 0\}$, $g(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$, $A_j = (a_{1j}, \ldots, a_{nj})$, e_i — n-мерный орт, i-я компонента которого равна 1.

В качестве исходного приближения возьмем произвольную точку $x^0 \in \Omega_0$. Пусть уже проделано k шагов алгоритма и получены приближения $x^0, \ldots, x^k \in \Omega_0$. Для отыскания $k+1$-го приближения

1. Решаем задачу квадратичного программирования

$$\min\left\{\left\| g(x^k) - \sum_{j\in J(x^k,\lambda_{k+1})} v_j A_j + \sum_{i\in I(x^k,\lambda_{k+1})} w_i e_i\right\|^2 \mid v_j \geqslant 0, w_i \geqslant 0\right\} =$$

$$= \left\| g(x^k) - \sum_{j\in J(x^k,\lambda_{k+1})} v_j^{k+1} A_j + \sum_{i\in I(x^k,\lambda_{k+1})} w_i^{k+1} e_i\right\|^2 = \mu_{k+1}.$$

Если $\mu_{k+1} > 0$, то полагаем $\zeta^{k+1} = g(x^k) - \sum_{j\in J(x^k,\lambda_{k+1})} v_j^{k+1} A_j + \sum_{i\in I(x^k,\lambda_{k+1})} w_i^{k+1} e_i$, $z^{k+1} = \zeta^{k+1} / \|\zeta^{k+1}\|$

и переходим к действию 2. При $\mu_{k+1} = 0$ повторяем действие 1, но вместо $J(x^k, \lambda_{k+1})$, $I(x^k, \lambda_{k+1})$ берем $J(x^k)$, $I(x^k)$. Если снова $\mu_{k+1} = 0$, то x^k — равновесный вектор продуктов. В случае же $\mu_{k+1} > 0$ переходим к действию 2.

2. Новое приближение вычисляем по формуле $x^{k+1} = x^k + t_{k+1}z^{k+1}$, где

$$t_{k+1} = \min\left\{\lambda_{k+1}, \frac{a_j - (A_j, x^k)}{(A_j, z^{k+1})} > 0, \left(-\frac{x_i^k}{z_i^{k+1}}\right) > 0\right\}.$$

Если Ω_0 содержит внутренние точки и для вектор-функции $g(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$ условие строгого убывания выполнено, то существуют подпоследовательности x^{k_i} и v^{k_i+1}, сходящиеся соответственно к равновесному вектору продуктов x^* и к равновесным оценкам ресурсов v^*.

3) Одна динамическая модель производства. Рассмотрим экономику [17], в которой используется r производственных способов и затрачивается (выпускается) n видов ресурсов, в дальнейшем расходуемых для производства n видов продуктов. Пусть величины $b_{ik}(t)$, $i = 1, \ldots, n$; $k = 1, \ldots, r$, указывают затраты $b_{ik}(t) < 0$ либо выпуск $b_{ik}(t) > 0$ ресурса i-го вида при использовании k-го производственного способа с единичной интенсивностью; $a_{ij}(t)$ и $c_{ij}(t)$, $i = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, n$, — соответственно расходы i-го ресурса, необходимые для производства единицы j-го продукта и увеличения на единицу скорости роста j-го продукта в год t; $u(t) = (u_1(t), \ldots, u_r(t))$ — интенсивности использования производственных способов; $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ — выпуски продуктов; $\dot{x}(t) = (\dot{x}_1(t), \ldots, \dot{x}_n(t))$ — скорости роста продукта каждого вида в год t. Пусть в момент времени t_0 запас продуктов определяется вектором $x(t_0) = x_0$. Будем считать, что рассматриваемая экономика описывается следующей системой дифференциальных уравнений: $C(t)\dot{x}(t) + A(t)x(t) = B(t)u(t)$, $x(t_0) = x_0$. Предположим далее, что $|C(t)| \neq 0$, $\forall t \in [0, T]$, тогда эту систему можно переписать в виде

$$\dot{x}(t) = \bar{A}(t)x(t) + \bar{B}(t)u(t),\ x(t_0) = x_0, \tag{17}$$

где $\bar{A}(t) = C^{-1}(t)A(t)$, $\bar{B}(t) = C^{-1}(t)B(t)$. Будем считать, что вектор управления $u(t) = (u_1(t), \ldots, u_r(t))$ может выбираться из некоторого множества $U \subset E^r$, причем (17) и множество U таковы, что

1. Множество достижимости

$$\Omega_T = \left\{x(T)\,|\,x(T) = Y(T)\left(x_0 + \int_0^T Y^{-1}(t)\bar{B}(t)u(t)\,dt\right),\ u(t) \in U\right\}$$

ограничено, замкнуто и строго выпукло. Здесь $Y(t)$ — фундаментальная матрица системы (17), т. е. $\dot{Y}(t) = \bar{A}(t)Y(t)$, $Y(0) = E$.

2. Решение системы $x(t)$ и производная этого решения $x(t)$ неотрицательны для $\forall u(t) \in U$.

Пусть, как и в модели Вальда, функции $f_i(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$, $i = 1, \ldots, n$, определяют цены продуктов.

Рассмотрим задачу отыскания такого уравнения $u^*(t) = (u_1^*(t), \ldots, u_2^*(t))$, для которого траектория $x^*(t) = (x_1^*(t), \ldots, x_n^*(t))$ системы (17) в момент времени $t = T$ определяет точку, реализующую $\max\{\sum_{i=1}^n f_i(x^*(T))x_i \mid x \in \Omega_T\} = \sum_{i=1}^n f_i(x^*(T))x_i^*(T)$. Другими словами, ищется некоторое управление $u^*(t)$ экономикой, которое приводит в момент времени $i = T$ к производству таких количеств $x_i^*(T)$, $i = 1, \ldots, n$, продуктов, что при ценах, определенных для этих количеств, вектор $x^*(T)$ максимизирует стоимость произведенной продукции. Для отыскания вектора x^*, существование которого следует из существования нормализованной точки равновесия соответствующей вогнутой игры n лиц, может быть использован любой из приведенных в [3, разд. 4] алгоритмов, причем на каждом шаге этих алгоритмов решается линейная задача оптимального управления [10], состоящая в отыскании максимума линейной функции на множестве концов траектории Ω_T. Остановимся подробнее на первом из них.

В качестве исходного приближения выбираем вектор $x^0(T) = x_0$. Пусть уже построены приближения $x^1(T), \ldots, x^k(T)$. Для отыскания очередного приближения поступаем так

1. Решаем систему

$$\frac{d\psi}{dt} = -\bar{A}^*(t)\psi \tag{*}$$

с начальными условиями

$$\psi_j^k(T) = f_j(x^k(T)),\ j = 1, \ldots, n.$$

2. Отыскиваем вектор $u^k(T)$ из условия, чтобы в любой момент времени $t \in [0, T]$ имело место равенство $(\psi^k(t), \bar{B}(t)u^k(t)) = \max\{(\psi^k(t), \bar{B}(t)u) \,|\, u \in U\}$, т. е. вектор $u^k(t)$ находится на основании принципа мак-

симума А. С. Понтрягина [10].

3. Определяем $\bar{x}^k(T) = Y(T)(x_0 + \int\limits_0^T Y^{-1}(t)\bar{B}(t)u^k(t)dt)$.

4. Новое приближение $x^{k+1}(T)$ находим по формуле $x^{k+1}(T) = x^k(T) + \lambda_{k+1}(\bar{x}^k(T) - x^k(T))$, где а) $0 < \lambda_k \leqslant 1$, $\lambda_k \to 0$; б) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k = \infty$.

Вопрос о сходимости приведенного алгоритма решается в [3, теорема 7, п. 1], согласно которой последовательность $\{x^k(T)\}$ содержит сходящуюся к $x^*(T)$ подпоследовательность.

Остановимся вкратце на экономическом смысле полученных результатов. Компоненты вектора $\psi^*(t) = (\psi_1^*(t), \ldots, \psi_n^*(t))$, являющегося решением системы (*) с начальными условиями $\psi(T) = f(x^*(T))$, можно трактовать как «динамические» цены продуктов. В этих условиях принцип максимума трансформируется в следующий принцип оптимального функционирования экономики, описываемой (17). Для того чтобы экономика функционировала оптимально, необходимо в каждый момент времени $t \in [0, T]$ выбирать интенсивности использования производственных способов таким образом, чтобы стоимость в динамических ценах $\psi^*(t)$ ресурсов, вкладываемых в развитие экономики, была максимальной. Выбираемое из указанного принципа управление порождает такую траекторию $x^*(t)$, для которой в каждый момент времени $t \in [0, T]$ стоимость произведенных продуктов в ценах $\psi^*(t)$ максимальна.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. И. Зуховицкий, Р. А. Поляк, М. Е. Примак. Два метода отыскания точек равновесия вогнутых игр n лиц. Докл. АН СССР, 1969, т. 185, № 1.
2. С. И. Зуховицкий, Р. А. Поляк, М. Е. Примак. О вогнутой игре n лиц и одной модели производства. Докл. АН СССР, 1970, т. 191, № 6.
3. С. И. Зуховицкий, Р. А. Поляк, М. Е. Примак. Вогнутые игры многих лиц (численные методы). Экономика и матем. методы, 1971, т. VII, вып. 6.
4. К. Эрроу, Л. Гурвиц, Х. Удзава. Исследования по линейному и нелинейному программированию. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
5. M. Frank, P. Wolfe. An Algorithm for Quadratic Programming. Nav. Res. Log., 1956 Quart. 3.
6. В. Ф. Демьянов, А. М. Рубинов. Приближенные методы решения экстремальных задач. Л., Изд-во ЛГУ, 1968.
7. В. А. Волконский. Оптимальное планирование в условиях большой размерности. Экономика и матем. методы, 1965, т. I, вып. 2.
8. A. Wald. Über einige Gleichungssysteme der mathematischen Ökonomie. Z. Nationalökonomie, 1936, v. 7, N 5. Английский перевод: Econometrica, 1951, 19, N 4.
9. Г. У. Кун. Об одной теореме Вальда. В сб. Линейные неравенства и смежные вопросы. М., Изд-во иностр. лит., 1959.
10. Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко. Математическая теория оптимальных процессов. М., Физматгиз, 1961.
11. В. Л. Макаров. О модели конкурентного экономического равновесия. Кибернетика, 1969, № 5.
12. K. J. Arrow, G. Debreu. Existence of an Equilibrium of the Competative Economy. Econometrica, 1954, v. 22.
13. Б. Г. Питтель. Об одной модели обмена. Экономика и матем. методы, 1967, т. III, вып. 3.
14. С. И. Зуховицкий, Л. И. Авдеева. Линейное и выпуклое программирование. М., «Наука», 1967.
15. Фань Цзи. Теоремы о минимаксе. В сб. Бесконечные антагонистические игры. М., Физматгиз, 1963.
16. Л. В. Канторович. Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. М., Изд-во АН СССР, 1959.
17. В. М. Ефимов. Динамическая модель планирования. В сб. Моделирование экономических процессов. Вып. 2. М., Изд-во МГУ, 1968.

Поступила в редакцию
30 X 1970