

О СУММАХ МАТРИЧНЫХ ИГР

Л. М. БРЭГМАН, И. Н. ФОКИН

(Ленинград)

Пусть имеются матричные игры $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ с матрицами выигрышей $A_1, A_2, \dots, A_n$, причем матрица $A_v = \|a_{i_v j_v}^v\|$ игры Γ_v имеет размеры $m_v \times n_v$, $v = 1, 2, \dots, n$.

Симметричной суммой матричных игр $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ будем называть игру Γ , в которой множества чистых стратегий игроков I и II (обозначим их соответственно через I и J) являются некоторыми множествами наборов $i = (i_1, \dots, i_n)$ и $j = (j_1, \dots, j_n)$, где i_v и j_v — некоторые чистые стратегии первого и второго игроков в игре Γ_v , $i_v = 1, \dots, m_v$; $j_v = 1, \dots, n_v$; $v = 1, \dots, n$, а выигрыш a_{ij} игрока I в ситуации (i, j) определяется следующим образом: $a_{ij} = a_{i_1 j_1}^1 + a_{i_2 j_2}^2 + \dots + a_{i_n j_n}^n$.

Примерами игр такого рода могут служить игровые задачи распределения ресурсов, математической моделью которых являются игры Блотто [1]. В таких играх множества I и J состоят из наборов целых неотрицательных чисел $i = (i_1, \dots, i_n)$ и $j = (j_1, \dots, j_n)$, удовлетворяющих услови-

ям $\sum_{v=1}^n i_v = A$, $\sum_{v=1}^n j_v = B$. Если имеются матричные игры $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$

такие, что матрица выигрышей A_v игры Γ_v имеет размеры $m_v \times l$, $v = 1, \dots, n$, то суммой матричных игр $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ относительно игрока I будем называть такую игру Γ , в которой множество I чистых стратегий игрока I является некоторым множеством наборов $i = (i_1, \dots, i_n)$, $i_v = 1, \dots, m_v$; $v = 1, \dots, n$; игрок II имеет l чистых стратегий, которые обозначим $1, \dots, l$, а выигрыш игрока I в ситуации (i, j) определяется так: $a_{ij} = a_{i_1 j}^1 + a_{i_2 j}^2 + \dots + a_{i_n j}^n$. Если матричные игры $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ таковы, что матрица выигрышей A_v игры Γ_v имеет размеры $m \times n_v$, $v = 1, \dots, n$, то аналогичным образом определяется сумма матричных игр относительно игрока II.

Очевидно, симметричную сумму Γ матричных игр $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ можно рассматривать как сумму матричных игр $\bar{\Gamma}_1, \bar{\Gamma}_2, \dots, \bar{\Gamma}_n$ относительно игрока I (соответственно II), где матрица выигрышей $\bar{A}_v$ игры $\bar{\Gamma}_v$ имеет размеры $m_v \times |J|$ (соответственно $|I| \times n_v$), а выигрыш $\bar{a}_{i_v j}^v = a_{i_v j_v}^v$ (соответственно $\bar{a}_{ij_v}^v = a_{i_v j_v}^v$). Здесь $|I|$ и $|J|$ — число элементов множеств I и J .

Далее нас будет интересовать структура оптимальных стратегий игроков в суммах матричных игр. Так как структура оптимальных стратегий

игрока I не будет зависеть от того, является ли рассматриваемая игра суммой игр относительно игрока I или симметричной суммой, то рассмотрим только суммы игр относительно игрока I и назовем их просто суммами матричных игр. Аналогичную структуру имеют оптимальные стратегии второго игрока в суммах матричных игр относительно игрока II и оптимальные стратегии обоих игроков в симметричных суммах матричных игр.

Лемма 1. В матричной игре Γ с матрицей $A = \|a_{ij}\|$, $i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, l$, для любого $\varepsilon > 0$ существуют ε -оптимальная стратегия x^ε игрока I, число α^ε и вектор $y^\varepsilon = (y_1^\varepsilon, \dots, y_l^\varepsilon)$ такие, что для $i = 1, \dots, m$ имеет место

$$x_i^\varepsilon = \alpha^\varepsilon \exp \left(\sum_{j=1}^l a_{ij} y_j^\varepsilon \right).$$

С помощью леммы 1 непосредственно доказывается

Теорема 1. В игре Γ , являющейся суммой матричных игр $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$, для любого $\varepsilon > 0$ существуют ε -оптимальная стратегия x^ε , число α^ε и смешанные стратегии x^ν первого игрока в играх Γ_ν , $\nu = 1, \dots, n$, такие, что для всех $i \in I$ имеет место

$$x_i^\varepsilon = \alpha^\varepsilon \prod_{\nu=1}^n x_{i_\nu}^\nu, \quad x_{i_\nu}^\nu \geq 0, \quad \sum_{i_\nu=1}^{m_\nu} x_{i_\nu}^\nu = 1. \quad (1)$$

Отсюда, в частности, следует такое представление для значения суммы матричных игр

$$\text{val } \Gamma = \sup_{\{x_{i_\nu}^\nu \mid \sum_{i \in I} \prod_{\nu=1}^n x_{i_\nu}^\nu \neq 0\}} \min_j \frac{\sum_{i \in I} a_{ij} \prod_{\nu=1}^n x_{i_\nu}^\nu}{\sum_{i \in I} \prod_{\nu=1}^n x_{i_\nu}^\nu}.$$

Для оптимальных стратегий в суммах матричных игр представление в виде (1), вообще говоря, имеет место не для всех $i \in I$, а только для $i \in I_1$, где I_1 — множество чистых стратегий i игрока I в игре Γ , для которых существует оптимальная стратегия x^i такая, что $x_i^i > 0$. Справедливы

Лемма 2. В матричной игре Γ с матрицей $A = \|a_{ij}\|$, $i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, l$, существуют оптимальная стратегия x игрока I, число α и вектор $y = (y_1, \dots, y_l)$ такие, что для $i \in I$ имеет место $x_i = \alpha \exp \left(\sum_{j=1}^l a_{ij} y_j \right)$.

Теорема 2. В игре Γ , являющейся суммой матричных игр $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$, существуют оптимальная стратегия x игрока I, число α и смешанные стратегии x^ν первого игрока в играх Γ_ν , $\nu = 1, \dots, n$, такие, что для $i \in I_1$ имеет место

$$x_i = \alpha \prod_{\nu=1}^n x_{i_\nu}^\nu.$$

Эти утверждения мы приводим без доказательства. Они содержатся в [2] или непосредственно следуют из [2].

В том случае, когда не существует оптимальной стратегии, представимой в виде (1), и множество I_1 неизвестно, оптимальную стратегию нельзя достаточно точно приблизить ε -оптимальными стратегиями, представимым в виде (1), так как $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \alpha^\varepsilon = \infty$. В связи с этим вызывает интерес вопрос, каким условиям должно удовлетворять множество I , для того

чтобы независимо от множества стратегий игрока II и матриц $A_1, \dots, A_n$ в игре-сумме существовала оптимальная стратегия вида (1)? Теорема 3 дает соответствующее необходимое и достаточное условие.

Будем называть множество I полным, если при любом множестве чисел стратегий игрока II и при любых матрицах $A_1, \dots, A_n$ в сумме матричных игр Γ существует оптимальная стратегия игрока I, представимая в виде (1).

Каждой чистой стратегии $i \in I$ игрока I поставим в соответствие вектор $y^i = \{y_{\xi_v}^i\}$, $v = 1, \dots, n$; $\xi_v = 1, \dots, m_v$, определенный так

$$y_{\xi_v}^i = \begin{cases} 1, & \text{если } i_v = \xi_v, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

Векторы $y^i \in E^m$, где $m = \sum_{v=1}^n m_v$.

Пусть L — аффинное многообразие, порожденное системой векторов $\{y^i\}_{i \in I}$, т. е. L — множество векторов y вида: $y = \sum_{i \in I} \lambda_i y^i$, $\sum_{i \in I} \lambda_i = 1$. Это множество может быть представлено в виде пересечения конечного числа гиперплоскостей [3].

Обозначим через M пересечение аффинного многообразия с неотрицательным ортантом, а через N — выпуклую оболочку множества $\{y^i\}_{i \in I}$.

Теорема 3. Для того чтобы множество I было полным, необходимо и достаточно, чтобы $M = N$.

Лемма 3. Пусть система уравнений

$$Ax = b \tag{2}$$

имеет решения, но не имеет неотрицательных решений. Тогда существует такое решение этой системы x^0 и вектор u , что $uA \leq 0$, $ub < 0$, и если $x_j^0 > 0$, то $uA_{.j} = 0$ ($A_{.j}$ — j -й столбец матрицы A).

Доказательство. Так как система (2) не имеет неотрицательных решений, то линейная форма ub является неограниченной сверху на множестве $\{u \mid uA \leq 0\}$. Поэтому существует такой базис B , например, $B = \{A_{.1}, \dots, A_{.k}\}$, и такое базисное решение $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k, 0, \dots, 0)$, что $b = \sum_{j=1}^k \bar{x}_j A_{.j}$ и для некоторого j_0 ($1 \leq j_0 \leq k$) будет $\bar{x}_{j_0} < 0$ и коэффициент $\bar{x}_{j_0}$ при $A_{.j_0}$ в разложении любого вектора $A_{.l}$ $l = 1, \dots, n$, по базису является неотрицательным. Такой базис можно построить, например, с помощью двойственного симплекс-метода, используя какой-либо способ устранения заикливания.

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} uA_{.j} &= 0, \quad j = 1, \dots, k; \quad j \neq j_0, \\ uA_{.j_0} &= 1. \end{aligned} \tag{3}$$

Эта система имеет решение, поскольку B — базис. Обозначим через $\bar{u}$ какое-либо решение этой системы. Тогда $\bar{x}$ и $\bar{u}$ образуют пару векторов, существование которых утверждается в лемме. Действительно, $\bar{x}$ — реше-

* Под базисом мы понимаем такую систему линейно независимых вектор-столбцов матрицы A , что все остальные вектор-столбцы матрицы A и вектор b являются линейными комбинациями векторов этой системы.

ние системы (2), $\bar{u}A_{.j} \leq 0$ для $j = 1, \dots, k$,

$$\bar{u}A_{.l} = \bar{u} \left(\sum_{j=1}^k \bar{x}_{jl} A_{.j} \right) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^k \bar{x}_{jl} (\bar{u}A_{.j}) + \bar{x}_{j_0 l} (\bar{u}A_{.j_0}) = -\bar{x}_{j_0 l} \leq 0, \quad l = k+1, \dots, n.$$

Таким образом $\bar{u}A \leq 0$, $\bar{u}b = \bar{u} \left(\sum_{j=1}^k \bar{x}_{.j} A_{.j} \right) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^k \bar{x}_{.j} (\bar{u}A_{.j}) + \bar{x}_{j_0} (\bar{u}A_{.j_0}) = -\bar{x}_{j_0} > 0$, и если $\bar{x}_j > 0$, то $\bar{u}A_{.j} = 0$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Необходимость. Пусть множество I является полным. Предположим, что $M \neq N$. Очевидно, $M \supset N$. Возьмем y такое, что $y \in M$, но $y \notin N$. Тогда система уравнений

$$\sum_{i \in I} \lambda_i y^i = y, \quad (4)$$

$$\sum_{i \in I} \lambda_i = 1$$

имеет решение, но не имеет неотрицательного решения. Следовательно, по лемме существует вектор $u \in E^m$, $m = \sum_{v=1}^n m_v$, число v и решение $\bar{\lambda}$ этой системы, для которых

$$(u, y^i) - v \leq 0 \text{ для } i \in I, (u, y) - v > 0, \text{ и если } \bar{\lambda}_i > 0, \text{ то } (u, y^i) - v = 0. \quad (5)$$

Отсюда следует, что найдется стратегия $i_0 \in I$, для которой выполняется $\bar{\lambda}_{i_0} < 0$ и $(u, y^{i_0}) - v < 0$, ибо в противном случае не может быть $(u, y) - v > 0$.

Обозначим множество тех $i \in I$, для которых $\bar{\lambda}_i > 0$, через I^+ . Рассмотрим следующие матричные игры $\Delta'_1, \Delta'_2, \dots, \Delta'_n$. Игрок II в каждой из этих игр имеет $m = \sum_{v=1}^n m_v$ чистых стратегий. Эти стратегии будем разбивать на n групп таким образом, что p -я группа содержит m_p стратегий. Стратегию с номером q в группе p обозначим через (pq) . Игрок I в игре Δ'_v имеет m_v чистых стратегий. Определим матрицу выигрышей $B^v = \|b_{i_v, (pq)}^v\|$ игры Δ'_v

$$b_{i_v, (pq)}^v = \begin{cases} u_{vi_v} + \delta, & \text{если } v = p, i_v = q, \\ u_{vi_v} & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Число δ выбирается из условия $0 < \delta < v - (u, y^{i_0})$. Таким образом, в матрице B^v столбцы, соответствующие стратегиям игрока II, не содержащимся в группе v , являются одинаковыми, а столбцы подматрицы, соответствующей стратегиям игрока II из группы v , отличаются от всех остальных столбцов тем, что к q -му элементу столбца с номером q из этой группы добавлено число δ , $1 \leq q \leq m_v$.

Определим игру Δ' , являющуюся суммой матричных игр $\Delta'_1, \Delta'_2, \dots, \Delta'_n$, причем множеством чистых стратегий игрока I в игре Δ' является множество I . Нетрудно видеть, что выигрыш игрока I в ситуации $(i, (pq))$ в игре Δ' определяется

$$b_{i, (pq)} = \begin{cases} (u, y^i) + \delta, & \text{если } i_p = q, \\ (u, y^i), & \text{если } i_p \neq q. \end{cases}$$

Как следует из (5), для $i \in I^+$ числа $b_{i(pq)}$ могут быть равными либо v , либо $v + \delta$.

Рассмотрим игру Δ , которая отличается от игры Δ' тем, что в ней отсутствуют те стратегии (pq) игрока II, для которых $b_{i(pq)} = v$ при всех $i \in I^+$. Игра Δ является суммой игр $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$, которые получаются соответствующей редукцией игр $\Delta'_1, \Delta'_2, \dots, \Delta'_n$. $\text{val } \Delta > v$, так как равновероятный выбор стратегий из I^+ гарантирует игроку I ожидаемый выигрыш больший, чем v . Так как множество I полно, то существует оптимальная стратегия $x = \{x_i\}_{i \in I}$, представляемая в виде (1). Ввиду выбора δ страте-

гия i_0 доминируется стратегиями из I^+ и, следовательно, $x_{i_0} = \alpha \prod_{v=1}^n x_{i_v}^v = 0$.

Пусть $x_{i_p}^p = 0$. Для уменьшения в дальнейшем количества индексов обозначим i_p^0 через q . Так как $y_{pq}^i = 1$, $\bar{\lambda}_{i_0} < 0$ и $y_{pq} \geq 0$, то из (4) следует, что найдется $i_1 \in I^+$ такая, что $y_{pq}^{i_1} = 1$, т. е. $i_p^1 = q$. Следовательно, стратегия (pq) игрока II в игре Δ присутствует.

Достаточность. Пусть $M = N$. Представим L в виде пересечения конечных множеств. Как следует из (1) и из того, что $x_q^p = 0$, для всякой стратегии $i \in I$, для которой $i_p = q$, имеет место $x_i = 0$. А так как при $i_p \neq q$ будет $b_{i(pq)} = v$, то значение игры Δ не может быть больше v . Это находится в противоречии с уже доказанным утверждением. Следовательно, $M = N$. Числа гиперплоскостей. Таким образом, M состоит из векторов y , удовлетворяющих условиям

$$(c^s, y) = \gamma_s, \quad s = 1, 2, \dots, r, \quad y \geq 0. \quad (6)$$

Отсюда следует, что для $i \in I$

$$\sum_{v=1}^n c_{vi_v}^s = \gamma_s. \quad (7)$$

Возьмем $\varepsilon > 0$ и рассмотрим ε -оптимальную стратегию x игрока I в игре Γ , представляемую в виде (1): $x_i = \alpha x_{i_1}^1 \dots x_{i_n}^n$, где все $x_i > 0$. Исследуем последовательности $\{a^t\}$ и $\{y^t\}$, определенные следующим образом:

1) $a^0 = \alpha$, $y_{vi_v}^0 = x_{i_v}^v$; 2) если a^t и y^t определены, то выбираем s^t — индекс, на котором достигается $\max_s |(c^s, y^t) - \gamma_s|$, и определяем $y_{vi_v}^{t+1} = y_{vi_v}^t \exp(\lambda c_{vi_v}^{s^t})$, $a^{t+1} = a^t \exp(-\lambda \gamma_{s^t})$, где λ — единственный корень уравнения $(c^{s^t}, y^{t+1}) = \gamma_{s^t}$.

Как следует из [4], последовательность $\{y^t\}$ сходится к y^* , удовлетворяющему (6), т. е. $y^* \in M$, и максимизирующему на множестве M функцию

$$\sum_{v=1}^n \sum_{i_v=1}^{m_v} (y_{vi_v} - y_{vi_v} \ln y_{vi_v} + y_{vi_v} \ln x_{i_v}^v).$$

Кроме того, в соответствии с (7) для всех t и $i \in I$ имеет место:

$$x_i = a^t y_{i_1 i_1}^t y_{i_2 i_2}^t \dots y_{i_n i_n}^t.$$

Для любого $i \in I$ в множестве M существует вектор y , у которого $y_{vi_v} > 0$ для всех $v = 1, \dots, n$ (например, вектор y^t). Тогда легко показать

(аналогично лемме в [2]), что $y_{vi_v}^* > 0$. Поэтому существует $\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha^t = \alpha^*$ и $x_i = \alpha^* y_{1i_1}^* y_{2i_2}^* \dots y_{ni_n}^*$.

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ найдутся ε -оптимальная стратегия x^ε , число α^ε и вектор $y^\varepsilon \in N$ такие, что для всех $i \in I$ $x_i^\varepsilon = \alpha^\varepsilon y_{1i_1}^\varepsilon \dots y_{ni_n}^\varepsilon$. Поэтому

$$\text{val } \Gamma = \sup_{y \in N} \min_j \frac{\sum_{i \in I} a_{ij} \prod_{v=1}^n y_{vi_v}}{\sum_{i \in I} \prod_{v=1}^n y_{vi_v}}. \quad (8)$$

Так как для $y \in N$ хотя бы для одного i будет $\prod_{v=1}^n y_{vi_v} > 0$, то $\min_{y \in N} \sum_{i \in I} \prod_{v=1}^n y_{vi_v} > 0$. Следовательно, супремум в (8) достигается при некотором $\bar{y} \in N$, а

$$\bar{x} = \{\bar{x}_i\}_{i \in I} \quad \text{при} \quad \bar{x}_i = \bar{\alpha} \prod_{v=1}^n \bar{y}_{vi_v},$$

где $\bar{\alpha} = \left(\sum_{i \in I} \prod_{v=1}^n \bar{y}_{vi_v} \right)^{-1}$ будет оптимальной стратегией игрока I, представимой в виде (1). Теорема доказана.

Пример 1. Пусть множество I состоит из всевозможных наборов $i = (i_1, i_2, \dots, i_n)$, где $i_v = 1, \dots, m_v$ для $v = 1, \dots, n$. Это множество является полным, так как

$$M = N = \left\{ y / \sum_{i_v=1}^{m_v} y_{vi_v} = 1 (v = 1, \dots, n), y_{vi_v} \geq 0 \right\}.$$

Пример 2. Рассмотрим игру Γ , являющуюся суммой матричных игр $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$, в каждой из которых игрок I имеет n чистых стратегий. Пусть множество I состоит из тех наборов $i = (i_1, \dots, i_n)$, в которых все i_v различны. Частный случай такой игры рассматривается в [5]. Здесь каждый из y^i представляет собой матрицу подстановок. Очевидно, множество M в данном случае — это множество всех бистochasticеских матриц и, следовательно, по теореме Биркгофа — фон Неймана является выпуклой оболочкой матриц подстановок, а значит совпадает с N . Поэтому для такой игры всегда существует оптимальная стратегия, представимая в виде (1).

В заключение отметим, что такое представление возможно не только для оптимальных стратегий. В случае полноты множества I для любой смешанной стратегии x игрока I существует эквивалентная стратегия $\tilde{x}$, которую можно представить в виде (1). При этом под эквивалентными понимаются такие стратегии, которые дают игроку I одинаковый выигрыш при любой чистой стратегии игрока II.

ЛИТЕРАТУРА

1. D. W. Blackett. Some Blotto Games, Naval Res. Logist. Quart., 1954, v. 1, N 1—2.
2. Л. М. Брэгман, И. Н. Фокин. О структуре оптимальных стратегий в некоторых матричных играх. Докл. АН СССР, 1969, т. 188, № 5.
3. Н. Бурбаки. Алгебра. М., Физматгиз, 1962.
4. Л. М. Брэгман. Релаксационный метод нахождения общей точки выпуклых множеств и его применение для решения задач выпуклого программирования. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1967, т. 7, № 3.
5. D. Gale. Information in Games with Finite Resources, Contributions to the Theory of Games, v. III, Annals of Math. Studies, N 39, Princeton, 1957.

Поступила в редакцию
21 XII 1970