

ЛИТЕРАТУРА

1. T. Haavelmo. Methods of Measuring the Marginal Propensity to Consume. В сб. Econometric methods Studies. N. Y., 1953.

Поступила в редакцию
16 V 1972

О ПРИМЕНЕНИИ РЕЗУЛЬТАТОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ ТРЕХФАЗНОЙ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

В. А. КОЛЕМАЕВ, П. Д. ПАЩЕНКО

(Москва)

Для современного производства характерно совместное функционирование машины, автоматически выполняющей основные рабочие операции, и человека, который управляет машиной, настраивает ее. Ниже исследуется человеко-машинная система, состоящая из m одинаковых приборов (станков, аппаратов) и человека-оператора, который выполняет начальную и заключительную операции (скажем, производит установку заготовки и снимает готовую деталь со станка). Каждое требование, поступающее в такую систему, последовательно проходит три фазы обслуживания: начальную (подготовительную), основную и заключительную, причем время обслуживания на каждой фазе является случайной величиной (что определяется как входящим потоком требований, так и самой системой) с заданным законом распределения.

Ставится задача оптимального синтеза этой системы, т. е. установления оптимального количества аппаратов и оптимальной организации входящего потока требований. Последнее означает возможность целесообразного изменения последовательности поступления требований в систему. Далее предполагается, что на входе всегда имеется определенное количество требований, тем самым запуск очередного требования в систему определяется только ее готовностью к приему. Процессы первоначального заполнения и заключительного освобождения не исследуются, так как предполагается, что соответствующие промежутки времени составляют незначительную часть общего времени функционирования системы. В качестве критерия оптимальности могут быть выбраны различные варианты по максимизации (при некоторых ограничениях) производительности либо по минимизации общих потерь (издержек производства) при заданной производительности.

1. ПРОЦЕСС МАШИННОГО ДОЕНИЯ КАК ТРЕХФАЗНАЯ СИСТЕМА МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Система представляет собой доильную установку, состоящую из m параллельных станков и m аппаратов, обслуживаемых одним человеком. На первой фазе поступившее на обслуживание животное готовится к процессу машинного доения (основная, вторая фаза) и подготавливается доильный аппарат. Заключительная, третья фаза включает в себя операции по машинному или ручному дою, массажу и отключению аппарата, после выполнения которых очередное требование покидает систему.

Полагаем, что оператор имеет возможность практически безошибочно определить момент окончания обслуживания требования в любой фазе. Случайный характер длительности обслуживания в каждой фазе определяется как индивидуальными свойствами животных (большая или меньшая склонность отдельных особей к машинному доению, большая или меньшая степень тугодойности и т. п.), так и самой системой. Ниже будут рассмотрены случаи, когда времена обслуживания следуют показательному либо нормальному законам распределения.

Примем неизменной следующую совокупность правил функционирования системы:

- 1) обслуживание требования в любой фазе не может быть прервано и производится до полного завершения, при этом во второй фазе возможны даже «перехватки» («сухое доение»), т. е. такие ситуации, когда требование находится во второй фазе сверх необходимого времени — до тех пор, пока оператор не переведет его на обслуживание в третью фазу;

2) по завершении обслуживания очередного требования (в первой и третьей фазе) оператор а) в первую очередь переходит к обслуживанию в третьей фазе требования с наибольшим временем «передержки»; б) приступает к обслуживанию в первой фазе, если в данный момент в системе нет требований, нуждающихся в обслуживании в третьей фазе; в) простаивает, если все аппараты заняты (либо на входе уже нет требований) и отсутствуют требования, обслуженные во второй фазе;

3) из совокупности свободных аппаратов берется аппарат с наименьшим порядковым номером*.

Предполагается, что последовательность поступления требований в систему является результатом случайного выбора. Оптимальный синтез системы в этом случае сводится к оптимальному выбору числа аппаратов, обслуживаемых одним оператором. Понятно, что этот оптимальный выбор зависит от характеристик обслуживаемой совокупности требований и самой системы.

При построении критерия оптимальности необходимо принять во внимание ряд противоположных тенденций, характеризующих функционирование системы. Увеличение числа аппаратов означает увеличение нагрузки оператора, что приводит к росту производительности, сокращению простоев оператора и к увеличению длительности «передержек» и суммарного времени простоев аппаратов. Уменьшение же числа аппаратов дает падение производительности, увеличение времени простоя оператора, зато сокращает передержки и суммарное время простоев аппаратов. В критерии должны найти отражение последствия всех этих противоречивых тенденций. Подробнее об этом будет сказано ниже.

В следующем разделе производится аналитическое исследование системы при экспоненциальных законах времен обслуживания.

Поскольку в ряде экспериментальных работ [1, 2] приводятся данные, свидетельствующие о распределении времен доения по нормальному закону, то далее будет исследован и этот случай с применением методов статистического моделирования [3].

2. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ

Рассмотрим систему, используя классические методы [4]. Прежде всего определим возможные состояния системы.

Из сформулированных выше правил обслуживания вытекает, что система имеет конечное число состояний и каждое из них может быть задано тройкой (κ, i, j) . Первая компонента характеризует состояние оператора: $\kappa = +1$ соответствует тому случаю, когда оператор обслуживает требование в первой фазе, $\kappa = -1$ — в третьей фазе; $\kappa = 0$ означает, что оператор простаивает (все аппараты уже заняты и ни один из них еще не закончил обслуживания во второй фазе). Последние две компоненты описывают состояние аппаратов: i — общее число занятых аппаратов**; j — количество занятых аппаратов, в которых требования находятся сверх необходимого времени; $i \geq j$, $i, j = 0, 1, \dots, m$.

Обозначим через p_{ij} , q , r_{ij} вероятности нахождения системы при установившемся режиме в состояниях $(+1, i, j)$, $(0, m, 0)$, $(-1, i, j)$ соответственно. Будем предполагать, что время обслуживания в любой фазе подчиняется показательному распределению; интенсивности обслуживания в первой, второй и третьей фазах равны λ , μ , ν . Ниже приводится система соотношений между вероятностями состояний в установившемся режиме, аналогичная полученной в [4], что исключает необходимость дополнительных пояснений: $-(\lambda + i\mu)p_{i0} + \nu r_{i0} + (1 - \delta_{i0})\lambda p_{i-1,0} = 0$, $-(\nu + i\mu)r_{i0} + \lambda p_{i1} + (1 - \delta_{i,m-1})\nu r_{i+1,1} + \delta_{i,m-1}m\mu q = 0$, $i = 0, 1, \dots, m-1$, $-(\lambda + (i-j)\mu)p_{ij} + (i-j+1)\mu p_{i,j-1} = 0$, $-(\nu + (i-j)\mu)r_{ij} + (i-j+1)\mu r_{i,j-1} + (1 - \delta_{i,m-1})\nu r_{i+1,j+1} + (1 - \delta_{ij})\lambda p_{i,j+1} = 0$, $0 < j \leq i$; $i = 0, 1, \dots, m-1$, $-m\mu q + \lambda p_{m-1,0} = 0$. Определитель матрицы этой однородной системы из $(m^2 + m + 1)$ уравнений с $(m^2 + m + 1)$ неизвестными равен нулю, поскольку оказываются равными друг другу ее первый и последний столбцы после конечного числа перестановок строк и деления первого на λ , а последнего — на $m\mu$. Поэтому при отбрасывании последнего уравнения не будет потеряно ни одного нетривиального решения системы, заменив же его на естественное соотношение между вероятностями

* Это правило, принятое для определенности и упрощения исследования, основано на пренебрежении длительностью перемещений оператора между станками, оборудованных доильными аппаратами, а также износом последних при эксплуатации.

** Перевод требования на обслуживание в третью фазу равнозначен освобождению занимаемого им до этого аппарата.

$p_{00} + r_{00} + p_{10} + p_{11} + r_{10} + \dots + r_{m-1, m-1} + q = 1$, получим окончательно линейную систему из $(m^2 + m + 1)$ уравнений для определения вероятностей состояний в установившемся режиме.

Для произвольного m не удастся получить аналитического решения системы уравнений, поэтому необходимо численно решать эту систему для каждого конкретного набора параметров m, λ, μ, ν .

Если известны потери в единицу времени α, β, γ от передержек требований во второй фазе, а также от простоя аппаратов и оператора и рассчитаны вероятности установившихся состояний $p_{00}(m), r_{00}(m), p_{10}(m), p_{11}(m), r_{10}(m), \dots, q(m)$ (для ряда значений m), то общие средние потери в единицу времени равны

$$W(m) = \alpha \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^i j(p_{ij} + r_{ij}) + \beta \sum_{i=0}^{m-1} (m-i) \sum_{j=0}^i (p_{ij} + r_{ij}) + \gamma q.$$

Оптимальное количество аппаратов в установке определяется из условия минимума потерь при обеспечении заданной производительности: $W(m^*) = \min_{m \in M} W(m)$,

$M = \{m : \pi(m) \leq \pi_0\}$, где $\pi(m)$ — средние затраты времени на обслуживание одного требования. Зачастую расчет коэффициентов потерь оказывается затруднительным, тогда можно использовать критерий максимума производительности при выполнении ряда требований. Для принятой нами интерпретации весьма существенны значения величины передержек, поскольку они в высшей степени отрицательно сказываются на молокоотдаче животных и функционировании самого процесса обслуживания в будущем. Условия эксплуатации требуют отвести некоторое время оператору для устранения мелких неполадок (которые прямо не учтены в модели), так что нецелесообразно сводить на нет простоя оператора. Кроме того, желательно также, чтобы была достаточно высокая степень использования аппаратов.

Итак, пусть исходя из конкретных условий эксплуатации указаны: τ_0 — максимально допустимое среднее время «сухого доения» в расчете на одно животное; h_0 — максимально допустимая степень простоя одного аппарата; q_0 — минимально допустимая доля времени простоя оператора. Поскольку производительность установки возрастает с увеличением m , то с учетом сказанного выше критерий максимума производительности установки формулируется так: найти $m^* = \max_{m \in M} m$, где

$$M = \{m : \tau(m) \leq \tau_0, h(m) \leq h_0, q(m) \geq q_0\}.$$

Для конкретизации этого критерия необходимо выразить величины $\tau(m), h(m)$ через вероятности установившегося режима. Введем обозначения (справедливые для установившегося режима): Δ — среднее время пребывания одного требования в системе; s — среднее полезное время обслуживания одного требования; π — средние затраты времени на обслуживание одного требования; u — среднее число требований в системе; v — среднее число простаивающих требований; T — достаточно длинный интервал времени; N — число требований, обслуженных за это время системой. Тогда имеют место следующие соотношения

$$N\Delta \approx T \left[\sum_{i=0}^{m-1} (i+1) \sum_{j=0}^i (p_{ij} + r_{ij}) + mq \right] = Tu,$$

$$N\tau \approx T \left[\sum_{j=1}^{m-1} j \sum_{i=j}^{m-1} (p_{ij} + r_{ij}) \right] = Tv$$

— общие суммарные времена пребывания (простоя) N требований в системе.

Используя метод расчета предельных соотношений, описанный, например, в [5], получаем в нашем случае $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T}{N} = \pi$, $\Delta = \pi u$, $\tau = \pi v$. Поскольку $\Delta = s + t$ ($s = 1/\lambda + 1/\mu + 1/\nu$), то

$$\tau(m) = \frac{sv(m)}{u(m) - v(m)}, \quad \pi(m) = \frac{s}{u(m) - v(m)},$$

$$\text{где } u(m) = \sum_{i=0}^{m-1} (i+1) \sum_{j=0}^i (p_{ij} + r_{ij}) + mq, \quad v(m) = \sum_{j=1}^{m-1} j \sum_{i=j}^{m-1} (p_{ij} + r_{ij}).$$

Степень простоя одного аппарата h непосредственно выражается через вероятность состояний

$$h(m) = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} (m-i) \sum_{j=0}^i (p_{0j} + r_{0j}).$$

Пусть, например, требуется определить число аппаратов в установке, если интенсивности обслуживания первой и последней фаз (выполняются оператором) равны 1 мин^{-1} и $1/2 \text{ мин}^{-1}$, а соответствующая величина для аппарата — $1/6 \text{ мин}^{-1}$. Кроме того, заданы верхние границы длительности «сухого доения» $\tau_0 = 1,1 \text{ мин.}$ и простоя аппарата $h_0 = 0,4$, а также нижняя допустимая граница для простоя оператора $q_0 = 0,15$. В табл. 1 представлены результаты решения уравнений и рас-

Таблица 1

m	p_{00}	r_{00}	p_{01}	r_{01}	p_{02}	r_{02}	p_{03}	r_{03}	p_{04}	r_{04}	p_{05}	r_{05}	q	τ , мин.	h	π , мин.
1	1/9	2/9	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2/3	0	0,333	9
2	7/177	14/177	21/177	4/177	42/177	11/177	—	—	—	—	—	—	72/177	0,514	0,356	5,06
3	0,031	0,062	0,064	0,011	0,088	0,062	0,111	0,033	0,006	0,172	0,096	0,032	0,228	1,077	0,396	3,89

чета величин, определяющих критерий. Из таблицы видно, что в соответствии с критерием $m^* = \max_{m \in M} m$, $M = \{m: \tau(m) \leq 1,1 \text{ мин.}, h \leq 0,4, q \geq 0,15\}$ оптимальное значение $m^* = 3$, т. е. установка должна состоять из трех аппаратов. В установившемся режиме на обслуживание одного требования в этой установке затрачивается 3,89 мин., т. е. ее производительность — 15 животных в час.

3. СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ТРЕХФАЗНОЙ УСТАНОВКИ

Как уже отмечалось, статистические обследования дают возможность увидеть, что время молокоотдачи (а именно оно в основном определяет время обслуживания животных на фермах) распределено по нормальному закону [1]. Поэтому необходимо также исследовать поведение человеко-машинной системы и при нормальных законах распределения времен обслуживания, причем наиболее целесообразно воспользоваться методами статистического моделирования. Моделирующий алгоритм основан на сформулированных в разделе 1 правилах функционирования системы. Алгоритм реализован на ЭВМ «Мир», длительности обслуживания имитировались с помощью датчиков «псевдослучайных» чисел, основывающихся на методе, изложенном в [6].

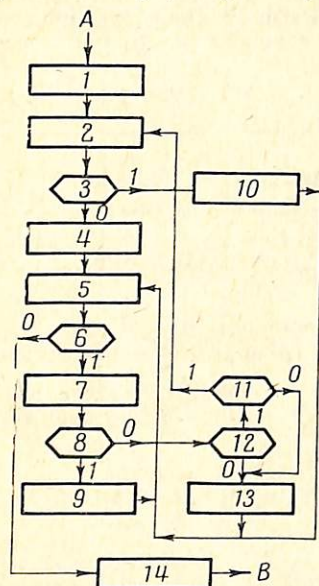
Предусмотрены случаи как зависимости, так и независимости длительностей обслуживания фаз. В блок-схеме алгоритма (рисунок) используются следующие обозначения: T_1, T_2, T_3 — реализация длительностей обслуживания фаз; N — число имитируемых требований; J_1, J_2, J_3 — текущее число требований, прошедших через соответствующие фазы (далее всегда $J_2 = J_1$, а $J_3 = J_1$); i — текущий номер аппарата, $i = 1, \dots, m$; D_i, C_i — требуемое и фактическое текущее время обслуживания требования i -м аппаратом,

$$E_i = \begin{cases} D_i, & D_i = 0, \\ D_i - C_i, & D_i > 0, \end{cases} \quad D = \max_{1 \leq i \leq m} D_i;$$

Λ — текущее число свободных аппаратов; U, V, W — суммарное время простоя оператора, простоя аппаратов и общая длительность сухого доения; S — общее время функционирования модели системы при имитации прохождения через систему N требований.

(A — вход, B — выход): 1. Установление начальных значений параметров $J_1 := = J := S := U := V := W := 0$; $\Lambda := m$; $C_i := D_i := 0$, $i = 1, \dots, m$. 2. Счетчик требований, обслуженных в первой фазе, $J_1 := J_1 + 1$. 3. Проверка условия $J_1 > N$. 4. Обращение к датчикам T_1, T_2 ; изменение текущей длительности обслуживания требования во второй фазе на время обслуживания очередного требования в первой фазе $C_i := C_i + T_1$, если $D_i > 0$, $i = 1, \dots, m$; запись потребного во второй фазе времени для заявки, обслуженной в первой фазе, $D_i := T_2$, где $i_1 = \min \{i: D_i = 0\}$; изменение значений счетчиков: времени простоя аппаратов в первой фазе, общего времени работы системы и текущего числа свободных аппаратов $V := V + \Lambda \times T_1$; $S := S + T_1$; $\Lambda := \Lambda + 1$. 5. Определение D . 6. Проверка

условия $D > 0.7$. Подсчет E_i , $i = 1, \dots, m$, определение $E_{i2} = \min E_i = E$. 8. Проверка условия $E \leq 0$. 9. Обращение к датчику ТЗ; счетчик требований, обслуженных в третьей фазе, $J := J + 1$; счетчик времени сухого доения $W := W + E$; освождение аппарата при переходе требования в третью фазу $C_{i2} := D_{i2} := 0$, $\Lambda := \Lambda + 1$, $V := V + \Lambda \times T3$; изменение текущего времени обслуживания требования во второй фазе на время обслуживания третьей фазы $C_i := C_i + E3$, если $D_i > 0$, $i = 1, \dots, m$; $S := S + T3$. 10. $J1 := J1 - 1$. 11. Проверка $J1 = N$. 12. Проверка $\Lambda > 0$. 13. Изменение текущей длительности обслуживания требования во второй фазе на текущее время простоя оператора $C_i := C_i + E$, если $D_i > 0$, $i = 1, \dots, m$; изменение счетчика общего времени работы системы на простоя оператора $S := S + E$; счетчик общего времени простоя оператора $U := U + E$. 14. Подсчет $\tau := W/N$; $h := V/(M \times S)$; $q := U/S$; вывод S , U , V , W , J , τ , h , q .



Блок-схема моделирующего алгоритма (см. текст)

Приведем ряд результатов моделирования, осуществленного на ЭВМ «Мир». Поскольку ресурсы машинного времени ограничены, то было выбрано $N = 50$. Проведенные в некоторых случаях дублирующие расчеты при $N = 100$ показали малые различия в величинах, которые определяют критерий. Понятно, что при жестких требованиях к точности результатов моделирования следует выбирать большее число N . При моделировании специально было принято, что длительности обслуживания различных фаз находятся в линейной зависимости. Приняты неизменными отклонения длительностей фаз: $\sigma_1 = 0,07$ мин.; $\sigma_2 = 0,3$ мин., $\sigma_3 = 0,1$ мин. В табл. 2 представлены результаты моделирования для тех же средних времен обслуживания: $A1 = 1$ мин., $A2 = 6$ мин., $A3 = 2$ мин., как и в примере разд. 2, что позволяет произвести сопоставление.

Если воспользоваться тем же критерием, что и в примере разд. 2, то оптимальное решение по-прежнему будет $m^* = 3$, причем в этом случае производительность установки оказывается несколько ниже, чем при показательном распределении длительностей.

В табл. 3 приводятся результаты еще одной серии имитаций процесса машинного доения для следующих средних длительностей обслуживания: $A1 = 0,7$ мин., $A2 = 5$ мин., $A3 = 1$ мин.

При тех же параметрах критерия, что и выше, получаем оптимальное значение $m^* = 4$, при этом лимитирующим фактором является повышение нагрузки на человека (при $m = 4$ доля простоя оператора равна 0,186, а при $m = 5$ — уже 0,145, т. е. меньше допустимой границы — 0,15), в то время как в предыдущем примере лимитирующим фактором была средняя длительность сухого доения. Производительность оптимальной установки, как видно из табл. 3, — 29 животных в час.

Таблица 2

m	q	τ , мин.	h	δ , мин.
1	0,661	—	0,26	8,58
2	0,457	0,511	0,318	5,43
3	0,309	0,841	0,398	4,3
4	0,216	1,477	0,447	3,8
5	0,117	1,966	0,471	3,37
Критические значения	0,15	1,1	0,4	—

Таблица 3

m	q	τ , мин.	h	δ , мин.
1	—	—	—	—
2	0,515	0,085	0,147	3,46
3	0,336	0,243	0,218	2,52
4	0,186	0,243	0,286	2,06
5	0,145	0,478	0,377	1,96
Критические значения	0,15	1,1	0,4	—

В дальнейшем, по-видимому, целесообразно исследовать функционирование рассмотренной человеко-машинной системы при больших возможностях для управления. Например, следует проработать вопрос об оптимальной последовательности требований, выбираемых из заданной популяции, если поиск нужного требования сопряжен со случайными затратами времени оператора. В таком случае, по существу, предметом исследования является четырехфазная система, текущее состояние которой определяется ее состояниями за несколько (а не за один) предшеству-

ющих моментов времени, так что в распоряжении исследователя фактически остается только метод статистических испытаний.

Авторы благодарят А. Д. Терехова, оказавшего большую помощь в выполнении расчетов на машине «Мир».

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. М. Тихомирёв, М. П. Воробьев. Рационализация механического доения коров в совхозе им. Фрунзе. Животноводство, 1953, № 6.
2. Н. А. Петухов. Теоретическое исследование эксплуатационных параметров доильных установок. Научные труды Сиб. фил. Всес. ин-та механизации. Вып. 5. Новосибирск, 1968.
3. Н. П. Бусленко. Моделирование сложных систем. М., «Наука», 1968.
4. А. Я. Хинчин. Работы по математической теории массового обслуживания. М., Физматгиз, 1963.
5. В. С. Мит. Теория восстановления. Математика, 1961, № 3.
6. Н. М. Коробов. Приближенное вычисление кратных интегралов с помощью методов теории чисел. Докл. АН СССР, 1957, т. 115, № 6.

Поступила в редакцию
23 X 1971

О ВОЗМОЖНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ АВТОКОДА «ИНЖЕНЕР» ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НА ЭВМ «МИНСК-22»

Е. М. БОГУСЛАВСКИЙ, А. М. ХАЗАНОВ

(Ленинград)

Рассмотрим представление массивов информации при составлении автокодовой программы (АП).

В начале АП массивы информации описываются операторами типа:

МАССИВ — $A1(K1), A2(K2), \dots, AN(KN), B(2)\bar{X}$; где $A1, A2, \dots, AN, B$ — названия массивов; $K1, K2, \dots, KN$ — размеры массивов $A1, A2, \dots, AN$; 2 — условный размер массива B .

Транслятор отведет память под элементы этих массивов соответственно их размерам, а также запомнит их начальные адреса ($A1N, A2N, \dots, ANNBN$) для дальнейшего использования. В этом случае описания массивов $A1, A2, \dots, AN, B$ должны удовлетворять требованиям АКИ, т. е. $S_m = K1 + K2 + \dots + KN + 2 \leq 3458^*$, где S_m — общее количество элементов массивов. В случае большой рабочей программы (РП) S_m должно быть еще меньше, чтобы оставить место в первом блоке МОЗУ для ее размещения.

Массивы $A1, A2, \dots, AN$ — действительные массивы, которые непосредственно используются в программе, а массив B — фиктивный, введение которого позволяет значительно увеличить использование оперативной памяти машины. Рассмотрим, как будут строиться транслятором АКИ команды рабочей программы, в которых производятся операции с элементами массивов. Предположим, что используется пятый элемент массива $A3$ ($A3[5]$). В соответствующей команде РП будет сформирован действительный адрес элемента $A3[5]$ как $A3N + 4$. Если в АП будет употреблено выражение типа $B[7]$, то в команде РП подобным же образом будет сформирован адрес этого элемента как $BN + 6$, несмотря на то, что в описании массива B размер его равен двум. Но из-за того, что в адресной части команды не может быть числа более 7777₈, можно сформировать только адрес первого блока МОЗУ.

Теперь представим, как будет строиться рабочая программа, если использовать элементы массивов с буквенными индексами. Предположим, что используется элемент $A2[I]$. В команде РП адрес этого элемента будет формироваться с помощью индексной ячейки: в адресной части команды будет стоять начальный адрес массива $A2(A2N)$, а в индексной ячейке — номер используемого элемента массива $A2$ без единицы. В этом случае ограничения на формирующийся адрес снимаются и он может изменяться до $AN + 7777_8$. Это позволяет, не употребляя в РП адресов более 7777₈, располагать элементами массивов информации во втором блоке МОЗУ, используя фиктивный массив B с условной размерностью 2 элемента. Таким образом, заняв всего две ячейки памяти из общего количества ячеек, отводимых АП под S_m в пер-

* Всюду, где нет специального указания, все числа представлены в десятичной системе счисления.