ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ 1973 том IX, вып. 2

МОДЕЛЬ МЕХАНИЗМА ИЗМЕНЕНИЯ ЦЕН В ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ СЕТИ

Э. М. БРАВЕРМАН

(Москва)

1. ВВЕДЕНИЕ

В [1] изучены состояния равновесия сети, состоящей из «производственных» элементов, в предположении, что цены на отдельные продукты фиксированы. В настоящей статье, являющейся непосредственным продолжением [1], предлагается модель механизма изменения цен в сети. Предполагается, что каждый элемент сети может изменить цену на выпускаемый этим элементом продукт таким образом, чтобы повысить «ожидаемую прибыль».

Термин «ожидаемая прибыль» весьма неопределенен. Действительно, при изменении цены c_i элементом $\mathbf{P}_i$ на «свой» продукт прибыль Π_i этого элемента зависит не только от вариации c_i, но и от изменения объема потребления данного продукта другими элементами. Кроме того, другие элементы могут сами менять цены на свои продукты в ответ на изменение цены продукции данного элемента; это в свою очередь может сказаться на прибыли Π_i рассматриваемого элемента как непосредственно, так и из-за нового объема потребления продукта P_i. Таким образом, при уточнении термина «ожидаемая прибыль» можно принять во внимание последствия изменения отдельным элементом цены на проводимый им продукт разной «глубины». Для учета более далеких последствий необходимо знать, как изменят цены остальные элементы сети в ответ на изменение цены данным элементом и какое состояние сети в результате установится. При этом нужно иметь не только всю информацию о характеристиках отдельных элементов, но и о «тактике поведения» каждого из них. Если предположить, что элементы не обладают всеми этими данными, а принимают решение, исходя из менее полной, «локальной» информации о «непосредственной» реакции остальных элементов на изменение цены данным элементом, то возникают своеобразные эффекты, изучению которых и посвящена настоящая работа.

В п. 2 работы формулируются предположения о возможных траекториях цен и соответствующих траекториях состояний сети. Эти предположения формализуют указанное выше представление об учете лишь «непосредственной» реакции остальных элементов при принятии решения об изменении цены на продукцию какого-либо элемента. В п. 3 приводятся примеры сетей, в которых соответствующие траектории цен на все или часть продуктов могут оказаться неограниченно возрастающими даже при снижении выпуска этих продуктов до нуля. Возникающий эффект интересен тем, что в отличие от обычных экономических представлений, согласно которым падение спроса должно сопровождаться падением цен, в данном случае «спрос» падает на фоне роста цен как результат такого роста, не оказывая обратного «стабилизирующего» влияния на цены.

Существенной особенностью элементов этих сетей является комплектный характер потребления продуктов. В связи с этим замечанием интересно отметить, что комплектный характер потребления может возникнуть не только в силу технологических особенностей производства, но и, как показывает пример 2 разд. 3, в силу решения локальных задач $U_i\{c\}$, фигурирующих в определении состояния равновесия сети [1], когда технология сама по себе допускает взаимозаменяемость потребляемых продуктов *.

Мы сохранили определения и обозначения, введенные в [1].

2. ДОПУСТИМЫЕ ТРАЕКТОРИИ ВЕКТОРА ЦЕН

Ниже формулируются два предположения для уточнения зависимости состояния сети от изменения цен и выбора вектора $c(t+dt)$ в момент времени $t+dt$, если известно состояние сети в момент времени t и вектор $c(t)$. Будем рассматривать лишь сети, имеющие при любом векторе цен состояние равновесия в смысле определения [1].

Предположение 1. В каждый момент времени t состояние $(\{\tilde{y}_i(t), \tilde{x}_i(t)\})$ является состоянием равновесия сети с вектором цен $c(t)$. Это означает, что переход сети из одного состояния равновесия в другое происходит существенно быстрее, нежели меняются цены.

Приводимое ниже предположение 2 конкретизирует информацию, используемую при выборе направления изменения цены, причем при оценке «выгодности» того или иного направления изменения цены $c_i(t)$ учитывается лишь характер изменения спроса на продукт P_i со стороны его непосредственных потребителей в предположении, что все остальные цены и состояния всех элементов, кроме непосредственных потребителей продукта P_i и самого элемента $\mathbf{P}_i$, остаются неизменными.

Прежде чем сформулировать предположение 2, введем некоторые понятия. Пусть в момент времени t в сети имеет место вектор цен $c(t)$, состояние равновесия $(\{\tilde{y}_i(t), \tilde{x}_i(t)\})$ и множество дефицитных продуктов $I(t)$. В соответствии с предположением 1 состояние $\{\tilde{y}_k(t), \tilde{x}_k(t)\}$ элемента $\mathbf{P}_k$ определяется решением локальной задачи $U_k(c(t))$. Выделим некоторый элемент $\mathbf{P}_i$, проварьируем цену $c_i(t)$ на продукт P_i, дав ей приращение δc_i, а остальные цены оставим без изменения. Проварьированный таким образом вектор цен будет иметь вид

$$\begin{aligned}\{c(t), \delta c_i\} = \{&c_1(t), c_2(t), \ldots, c_{i-1}(t), \\ &c_i(t)+\delta c_i, c_{i+1}(t), \ldots, c_N(t)\}.\end{aligned} \tag{1}$$

Для каждого элемента $\mathbf{P}_k$, $k \neq i$, решим новую локальную задачу, отличающуюся от соответствующей исходной локальной задачи $U_k\{c(t)\}$ только вектором цен (1). Обозначим эту новую локальную задачу через

---

* Поскольку в рассматриваемой модели сети предполагается, что каждый продукт производится одним элементом, то комплектный характер потребления порождает монопольный характер производства. В экономической науке давно известно, что наличие монополий приводит к повышению цен по сравнению с равновесными ценами; этот эффект получил название «монопольного эффекта». В имеющихся теоретических моделях монопольного эффекта (см., например, [2]) оказывается, однако, что цены всегда стабилизируются или колеблются около некоторого уровня. В отличие от этого в настоящей работе показывается, что при определенных предположениях рост цен может оказаться неограниченным. Это различие объясняется главным образом тем, что обычно рассматриваются модели, в которых монополии работают на некоторый стабильный рынок, в то время как в настоящей работе рассматривается сеть элементов, только часть которых непосредственно связана с внешним потребителем, а продукция остальных элементов потребляется целиком внутри сети.

$U_k\{c(t),\ \delta c_i\}$, компоненту ξ_{ik} ее решения — через $\xi_{ik}(c,\ \delta c_i)$. Тогда сумма

$$\bar{y}_i(c(t),\delta c_i)=\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{N}\xi_{ik}(c(t),\delta c_i)+F_i(\{c(t),\delta c_i\},x_{i0}) \tag{2}$$

покажет, каков был бы спрос на продукт P_i при ценах (1), если все остальные ограничения на выбор состояний элементов $\mathbf{P}_k$ остались без изменения.

В данном выше определении локальной задачи $U_k\{c,\ \delta c_i\}$ существенно предполагалось, что $k\neq i$. В качестве задачи $U_i\{c,\ \delta c_i\}$ рассмотрим задачу, которая определяет состояние элемента $\mathbf{P}_i$ при векторе цен (1), спросе (2) и неизменных остальных ограничениях

$$(c_i(t)+\delta c_i)y_i-\sum_j c_j(t)\xi_{ji}=\max, \tag{3}$$

$$\{y_i,x_i\}\in G_i,$$

$$\xi_{ji}\leqslant\tilde{\xi}_{ji}(t),\quad j\in I(t),$$

$$y_i\leqslant\bar{y}_i(c,\delta c_i). \tag{4}$$

Компоненту y_i решения задачи $U_i\{c(t),\delta c_i\}$ обозначим через $y(c(t),\ \delta c_i)$. Предположим, что существуют односторонние (и слева, и справа) пределы

$$\lim_{\delta c_i\to 0}\frac{y_i(c(t),\delta c_i)-\tilde{y}_i(t)}{\delta c_i}$$

и

$$\lim_{\delta c_i\to 0}\frac{\Pi_i(c(t),\delta c_i)-\Pi_i(c(t))}{\delta c_i},$$

где $\Pi_i(c(t),\ \delta c_i)$ — значение функции (3) на решении задачи (3), (4), $\Pi_i(c(t))$ — прибыль элемента P_i в состоянии $\{\tilde{y}_i(t),\tilde{x}_i(t)\}$, $\delta c_i\to -0$ (левосторонний предел) либо $\delta c_i\to +0$ (правосторонний предел). Назовем эти пределы локальными левосторонними либо правосторонними производными соответствующих величин и обозначим

$$\frac{\delta y_i}{\delta c_i}=\lim_{\delta c_i\to 0}\frac{y_i(c(t),\delta c_i)-\bar{y}_i(t)}{\delta c_i},$$

$$\frac{\delta\Pi_i(c(t))}{\delta c_i}=\lim_{\delta c_i\to 0}\frac{\Pi_i(c(t),\delta c_i)-\Pi_i(c(t))}{\delta c_i}. \tag{5}$$

Предположение 2. Траектория вектора цен $c(t)$ является кусочно-гладкой функцией времени, удовлетворяющей для всех i, $i=1,2,\ldots,N$, условию

$$\frac{\delta\Pi_i(c(t))}{\delta c_i}\dot{c}_i\geqslant 0, \tag{6}$$

где под $\dfrac{\delta\Pi_i(c(t))}{\delta c_i}$ имеется в виду правосторонний предел, если $\dot{c}_i(t)\geqslant 0$, и левосторонний, если $\dot{c}_i(t)\leqslant 0$. Условие (6), очевидно, является условием «выгодности» изменения цены для элемента $\mathbf{P}_i$ в каждый момент времени, если при подсчете прибыли учитывается лишь непосредственное изменение спроса на продукт P_i, вызванное изменением цены c_i, и не принимаются во внимание более далекие последствия, вызванные таким изменением, в частности изменение спроса, связанное с изменением потоков продуктов между другими элементами.

Определение. Назовем вектор-функции $c(t)$ и $(\{\tilde{y}_i(t), \tilde{x}_i(t)\})$ допустимой траекторией, если они удовлетворяют предположениям 1 и 2.

3. ПРИМЕРЫ СЕТЕЙ

Пример 1. Сеть, содержащая элементы с комплектным потреблением. Элементом P_k с комплектным потреблением назовем элемент, допустимая область G_k которого определяется соотношениями

$$\xi_{ik} \geqslant \varphi_{ik}(y_k), \quad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{7}$$

Очевидно, в состояниях равновесия при положительных ценах, поскольку при этом максимизируется прибыль Π_k, соотношения (7) выполняются как равенства, поэтому для элемента с комплектным потреблением его потребность в продукции других элементов однозначно определяется выпуском y_k.

Обозначим через S_j множество индексов k элементов $\mathbf{P}_k$, таких, что $\xi_{jk} > 0$ при некотором $y_k > 0$. Таким образом, множество элементов $\mathbf{P}_k$, таких, что $k \in S_j$, это множество «непосредственных потребителей» продукта P_j.

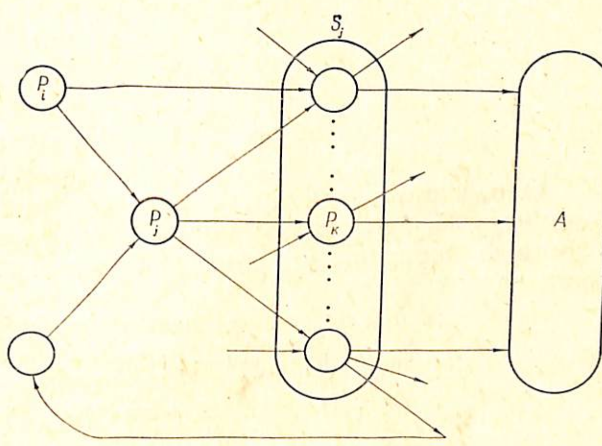

Рис. 1. А — Внешний спрос

Теорема 1. *Пусть в сети существует такой элемент* $\mathbf{P}_j$, *что*

1°. *Функция спроса*

$$F_j(c, x_{j0}) \equiv 0. \tag{8}$$

2°. *Все элементы* $\mathbf{P}_k$ *такие, что* $k \in S_j$ *являются элементами с комплектным потреблением, причем соответствующие функции* $\varphi_{ik}(y_k)$, $i = 1, 2, \ldots, N$, *выпуклы, дифференцируемы при* $y_k \geqslant 0$ *и монотонно не убывают.*

3°. *Для каждого элемента* $\mathbf{P}_k$, $k \in S_j$, *при любом векторе цен и соответствующем состоянии равновесия сети существует правосторонняя локальная производная* $\delta y_k / \delta c_k$.

Тогда существует допустимая траектория $c(t)$, *такая, что хотя бы одна из функций* $c_j(t)$ *и* $c_k(t)$, $k \in S_j$, *стремится к бесконечности.*

Доказательство теоремы приведено в Приложении 1.

Замечание к теореме 1. Условие 1° теоремы означает, что продукция элемента $\mathbf{P}_j$ не поступает вовне, так что весь продукт P_j распределяется между элементами $\mathbf{P}_k$, $k \in S_j$. Рис. 1 иллюстрирует взаимоотношение между элементом $\mathbf{P}_j$, элементами $\mathbf{P}_k$, $k \in S_j$, и остальными элементами сети, определяемое условиями теоремы.

Простым частным случаем сети, удовлетворяющей условиям теоремы 1, является сеть, показанная на рис. 2. Она включает среди прочих два таких элемента, что вся продукция первого элемента $\mathbf{P}_j$ потребляется вторым элементом $\mathbf{P}_k$ и никаких других входов у $\mathbf{P}_k$ нет. Указанная связь между элементами означает выполнение следующих соотношений

$$\xi_{jk} = y_j, \tag{9}$$

$$\xi_{ik} = 0, \quad i \neq j, \tag{10}$$

$$\xi_{jk} \geqslant \varphi_{jk}(y_k). \tag{11}$$

Взаимоотношения между двумя элементами, определяемые условиями (9) и (10), естественно назвать цепочкой элементов, на примере которой легко пояснить утверждение теоремы, опустив некоторые математические тонкости.

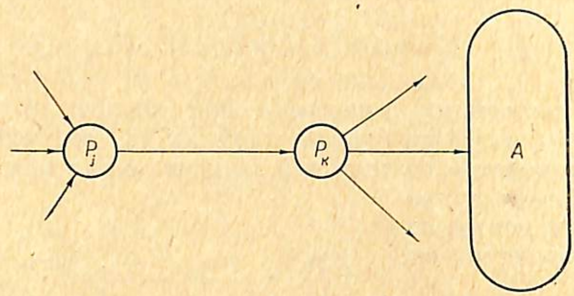

Рис. 2. А — Внешний спрос

Определим величину $y_{k\,\max}$ — оптимальное с точки зрения максимума прибыли Π_k количество продукта P_k. Величина $y_{k\,\max}$ при строгой выпуклости функции $\varphi_{jk}(y_k)$ однозначно определяется ценами c_j и c_k из решения задачи

$$\Pi_k = c_k y_k - c_j \varphi_{jk}(y_k) = \max, \tag{12}$$

так что $y_{k\,\max}$ — корень уравнения

$$c_k - c_j \varphi_{jk}{}'(y_{k\,\max}) = 0. \tag{13}$$

Рассмотрим теперь некоторое состояние элемента $\mathbf{P}_k$ с выпуском $\tilde{y}_k$. Возможны два случая: а) $\tilde{y}_k < y_{k\,\max}$, когда выпуск продукта P_k лимитирован потреблением этого продукта либо поставкой продукта P_j; б) $\tilde{y}_k = y_{k\,\max}$, когда выпуск продукта P_k не лимитирован.

Пусть $y_{k\,\max}$ — непрерывная функция c_j. Тогда в случае а) при достаточно малой вариации δc_j цены c_j вариация $\delta y_{k\,\max}$ мала и будет иметь место соотношение

$$\tilde{y}_k < y_{k\,\max} + \delta y_{k\,\max}. \tag{14}$$

Соотношение (14) показывает, что $\tilde{y}_k$ останется решением локальной задачи $U_k\{c, \delta c_j\}$ и, следовательно, спрос на продукт P_j останется неизменным. Но тогда

$$\frac{\delta \Pi_j}{\delta c_j} = \tilde{y}_j > 0$$

и траектория, определяемая условиями

$$\dot{c}_j(t) > 0, \quad \dot{c}_k(t) = 0, \tag{15}$$

является допустимой при а).

В случае б) с учетом (12) и (13) имеем

$$\frac{\delta \Pi_k}{\delta c_k} = y_{k\,\max} + (c_k - c_j \varphi_j{}'_k(y_{k\,\max}))\frac{\delta y_{k\,\max}}{\delta c_k} = y_{k\,\max} > 0,$$

откуда следует, что при б) траектория

$$\dot{c}_j(t) = 0, \quad \dot{c}_k(t) > 0 \tag{16}$$

допустима.

Объединяя (15) и (16), убеждаемся в том, что при наличии цепочки элементов в сети существует допустимая траектория, на которой хотя бы одна из цен $c_j(t)$ или $c_k(t)$ стремится к бесконечности.

Условие а) может иметь место и когда продукт P_j дефицитен, и в том случае, когда этот продукт не дефицитен, но спрос на продукт P_k ограничен и поэтому элемент $\mathbf{P}_k$ вынужден работать «с недогрузкой». Таким образом, даже если элемент $\mathbf{P}_j$ работает «с недогрузкой», все равно может оказаться «выгодным» повышать цену $c_j(t)$ на продукт P_j.

Пример 2. Модель с линейными элементами. Линейным элементом будем называть такой элемент $\mathbf{P}_i$, у которого допустимая область G_i — многогранник с конечным числом граней. Модель сети с линейными элементами интересна в первую очередь потому, что в отличие от предыдущего примера здесь допускается взаимозаменяемость потребляемых товаров. Это должно порождать «конкуренцию» между ними, что в свою очередь в соответствии с обычными представлениями будет ограничивать рост цен. Ниже, однако, показано, что так бывает не всегда.

Далее рассматривается сеть, состоящая лишь из линейных элементов и такая, что все элементы могут быть разбиты на две группы следующим образом: все элементы потребляют только продукты, производимые элементами первой группы, а внешний спрос удовлетворяется только продуктами, производимыми элементами второй группы. Назовем продукты, производимые элементами первой группы, производственными продуктами, а производимые элементами второй — потребительскими.

Допустимое множество в любой локальной задаче $U_i\{c\}$ будет также выпуклым многогранником с конечным числом граней, поскольку в такой задаче допустимое множество задается пересечением множества G_i и некоторого параллелепипеда, соответствующего ограничениям на количество потребляемых дефицитных продуктов и, если $i \notin I$, на количество выпускаемого продукта.

Рассмотрим множество таких векторов $c > 0$, что хотя бы для одного состояния равновесия решение соответствующей локальной задачи $U_i\{c\}$ будет неединственно, т. е. что гиперплоскость

$$c_i y_i - \sum_{k=1}^{N} c_k \xi_{ki} = c_i \tilde{y}_i - \sum_{k=1}^{N} c_k \tilde{\xi}_{ki} \tag{17}$$

проходит через одно из ребер допустимого многогранника задачи $U_i\{c\}$. Множество векторов $c > 0$, удовлетворяющих этому условию для одного фиксированного ребра (т. е. ортогональных этому ребру), представляет собой пересечение некоторого подпространства N-мерного пространства и положительного ортанта, причем это множество не изменяется при параллельном переносе ребра. При переборе всевозможных ограничений на потребляемые и выпускаемые элементом $\mathbf{P}_i$ продукты, различных, с точностью до параллельного переноса, ребер допустимых многогранников может быть лишь конечное число. Поэтому множество векторов $c > 0$, таких, что гиперплоскость (17) может пройти через одно из ребер допустимого многогранника хотя бы одной из задач $U_i\{c\}$, является пересечением объединения конечного числа подпространств и положительного ортанта. Обозначим это множество через E_i. Для него характерно то, что если $c \notin E_i$, то при достаточно малой вариации вектора c решение соответствующей локальной задачи $U_i\{c\}$, как известно из теории линейного программирования, не изменяется. Таким образом, хотя в принципе потребляемые линейным элементом продукты взаимозаменяемы, однако при изменении цен в некоторой окрестности любого вектора $c \notin E_i$ (т. е. почти для всех векторов c) линейный элемент ведет себя как элемент с комплектным потреблением. Именно это обстоятельство позволяет далее установить существование расходящихся допустимых траекторий вектора цен в сети, состоящей из линейных элементов.

Теорема 2. *Пусть все элементы сети являются линейными элементами, причем эти элементы могут быть разбиты на две группы: элементы, производящие производственные продукты, и элементы, производящие потребительские продукты. Пусть, кроме того, для любого i, $i = 1, 2, \ldots, N$:*

1°. *Допустимая область G_i содержит начало координат;*

2° *Функция спроса $F_i(c, x_{i0})$ является дифференцируемой функцией цены c_i.*

Тогда существует допустимая траектория $c(t)$ такая, что все компоненты вектора $c(t)$ не убывают и хотя бы одна компонента $c_j(t) \to \infty$ при $t \to \infty$.

Доказательство теоремы 2 приведено в Приложении 2.

Замечание. Из доказательства теоремы 2 можно видеть, что, во-первых, допустимая траектория может начинаться почти в любой точке $c(0) \geqslant 0$ и, во-вторых, эти траектории «грубы» в следующем смысле: вдоль каждой траектории существует «трубка» допустимых траекторий, удовлетворяющих утверждению теоремы. Оба эти факта являются следствием указанного выше обстоятельства, заключающегося в том, что в окрестности почти любого вектора цен линейный элемент в определенном смысле ведет себя как элемент с комплектным потреблением.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Доказательство теоремы 1. Заметим сначала, что в силу условий 2° и 3° теоремы существуют локальные производные $\delta\Pi_k / \delta c_k$ для всех $k \in S_j$. Действительно, поскольку элемент $\mathbf{P}_k$ по предположению является элементом с комплектным потреблением, то его прибыль Π_k имеет вид

$$\Pi_k = c_k \tilde{y}_k - \sum_{i=1}^{N} c_i \varphi_{ik}(\tilde{y}_k). \tag{18}$$

Из (18), дифференцируемости функций $\varphi_{ik}(y_k)$ и существования локальных производных $\delta y_k / \delta c_k$ имеем

$$\frac{\delta\Pi_k}{\delta c_k} = \tilde{y}_k - \frac{\partial\Pi_k}{\partial y_k}\frac{\delta y_k}{\delta c_k} = \tilde{y}_k + (c_k - \Sigma c_i \varphi_{ik}'(\tilde{y}_k))\frac{\delta y_k}{\delta c_k}. \tag{19}$$

Здесь и далее под локальными производными будем иметь в виду правосторонние локальные производные.

Определим теперь функции $c_j(t)$ и $c_k(t)$, $k \in S_j$, так.

$$\dot{c}_j(t) = \begin{cases} 1, \text{ если для всех } k,\ k \in S_j,\ \dfrac{\partial\Pi_k}{\partial y_k} > 0, \\ 0 \text{ — в противном случае,} \end{cases} \tag{20}$$

$$\dot{c}_k(t) = \begin{cases} 1, \text{ если } \dfrac{\delta\Pi_k}{\delta c_k} \geqslant 0, \\ 0 \text{ — в противном случае.} \end{cases} \tag{21}$$

Функции $c_k(t)$, в соответствии с (21), удовлетворяют определению допустимой траектории. Покажем, что и функция $c_j(t)$, характеризуемая (20), также удовлетворяет определению допустимой траектории. С этой целью необходимо доказать, что (20) удовлетворяет соотношению (6), а для этого достаточно установить, что если при всех k, $k \in S_j$,

$$\frac{\partial \Pi_k}{\partial y_k} = c_k - \sum_{i=1}^{N} c_i \varphi_{ik}'(\tilde{y}_k) > 0, \tag{22}$$

то

$$\frac{\delta \Pi_j}{\delta c_j} \geqslant 0. \tag{23}$$

Если будет показано, что из условия (22) следует для достаточно малых $\delta c_j > 0$ неравенство

$$\delta \xi_{jk} \geqslant 0, \quad k \in S_j, \tag{24}$$

то с учетом предположения 1° теоремы, в силу которого $\delta\xi_{j0} = 0$, $\tilde{y}_j$ является допустимым решением локальной задачи $U_j\{c(t), \delta c_j\}$. Это в свою очередь означает, что

$$\Pi_j(c(t),\ \delta c_j) \geqslant (c_j + \delta c_j)\tilde{y}_j - \Sigma c_i \tilde{\xi}_{ij} = \Pi_j(c(t)) + \delta c_j \tilde{y}_j \tag{25}$$

или

$$\frac{\delta \Pi_j}{\delta c_j} \geqslant \tilde{y}_j \geqslant 0.$$

Последнее неравенство совпадает с (23). Следовательно, для доказательства (23) достаточно показать, что из (22) при $\delta c_j > 0$ следует неравенство (24). Так как по предположению 2° теоремы функции $\varphi_{ik}(y_k)$ являются неубывающими, то для установления неравенства (24) достаточно установить, что при $\delta c_j > 0$ и выполнении (22)

$$\delta y_k \geqslant 0, \tag{26}$$

если $\tilde{y}_k + \delta y_k$ — соответствующая компонента решения задачи $U_k\{c, \delta c_j\}$.

Пусть (26) не имеет места и $\delta y_k < 0$. Тогда для достаточно малых $\delta c_j > 0$ из (18) и (22) получим

$$\delta \Pi_k = \frac{\partial \Pi_k}{\partial y_k} \delta y_k + \frac{\partial \Pi_k}{\partial y_j} \delta c_j = (c_k - \Sigma c_i \varphi_{ik}'(\tilde{y}_k)) \delta y_k - \delta c_j \varphi_{jk}'(\tilde{y}_k) < 0. \tag{27}$$

Из (27) с помощью известного неравенства для выпуклых функций, примененного к функциям $\varphi_{ik}(y_k)$,

$$\varphi_{ik}(\tilde{y}_k + \delta y_k) - \varphi_{ik}(\tilde{y}_k) \geqslant \varphi_{ik}'(\tilde{y}_k)\delta y_k \tag{28}$$

получим

$$c_k \delta y_k - \Sigma c_i (\varphi_{ik}(\tilde{y}_k + \delta y_k) - \varphi_{ik}(\tilde{y}_k)) - \\ -\delta c_j (\varphi_{jk}(\tilde{y}_k + \delta y_k) - \varphi_{jk}(\tilde{y}_k)) < 0$$

или

$$c_k(\tilde{y}_k + \delta y_k) - \Sigma c_i \varphi_{ik}(\tilde{y}_k + \delta y_k) - \delta c_j \varphi_{jk}(\tilde{y}_k + \delta y_k) < \\ < c_k \tilde{y}_k - \Sigma c_i \varphi_{ik}(\tilde{y}_k) - \delta c_j \varphi_{jk}(\tilde{y}_k). \tag{29}$$

Левая часть (29) есть значение прибыли Π_k при $\tilde{y}_k + \delta y_k$, а правая — значение прибыли Π_k при $\tilde{y}_k$. Так как $\tilde{y}_k$ является допустимым решением задачи $U_k\{c, \delta c_j\}$, то из (29) следует, что $\tilde{y}_k + \delta y_k$ при $\delta y_k < 0$ не может быть решением этой задачи. Таким образом, установлено, что из (22) следует (26), а следовательно, и (23), и тем самым функция $c_j(t)$, определяемая условием (20), является допустимой. Для завершения доказательства теоремы достаточно показать, что правые части (20) и (21) не могут обращаться в нуль одновременно.

Пусть в момент t $\dot{c}_j(t) = 0$. Это означает, что для некоторого k^*, $k^* \in S_j$, $\partial \Pi_{k^*} / \partial y_{k^*} = c_{k^*} - \Sigma c_j \varphi_{jk^*}(\tilde{y}_{k^*}) = 0$. Для этого k^* из (19) имеем $\delta \Pi_{k^*} / \delta c_{k^*} \geqslant 0$ и, следовательно, в силу (21) $\dot{c}_{k^*}(t) = 1$. Теорема доказана.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Доказательство теоремы 2. Перенумеруем элементы таким образом, чтобы индексы элементов, производящих производственные продукты, изменялись от 1 до M, а индексы элементов, производящих потребительские продукты,— от $M+1$ до N. Если в некотором состоянии равновесия сети $(\{\tilde{y}_i, \tilde{x}_i\})$ с вектором цен c существует такой индекс i^* потребительского продукта (т. е. $M+1 \leqslant i^* \leqslant N$), что $\tilde{y}_{i^*} = \xi_{i^*0} = F_{i^*}(c, \tilde{x}_{i^*})$, то, вообще говоря, безразлично, определить ли множество I таким образом, что $i^* \in I$, либо так, чтобы $i^* \notin I$. Под множеством I далее всегда понимается такое множество индексов, что если $i \in I$ и $M+1 \leqslant i \leqslant N$, то

$$\tilde{y}_i = \xi_{i0} < F_i(c, \tilde{x}_{i0}). \tag{30}$$

Рассмотрим теперь некоторый элемент $\mathbf{P}_i$, $M+1 \leqslant i \leqslant N$, производящий потребительский продукт. Пусть при некотором векторе цен c имеет место состояние элемента $\{\tilde{y}_i, \tilde{x}_i\}$, соответствующее вершине допустимого многогранника локальной задачи* $U_i\{c\}$. Выделим все такие ребра допустимого многогранника, исходящие из этой вершины, вдоль которых величина y_i убывает. Пусть число таких ребер равно k_i. Так как по предположению область G_i содержит начало координат, то $k_i > 0$. По определению элемента, производящего потребительские товары, можно считать допустимый многогранник задачи $U_i\{c\}$ помещенным в $M+1$-мерное пространство. Поэтому орты, направленные вдоль выделенных ребер, можно обозначить через

$$e_{ik} = \{\zeta_{ik}, \zeta_{1k}, \ldots, \zeta_{Mk}\}, \quad k = 1, 2, \ldots, k_i, \tag{31}$$

причем

$$\zeta_{ik} < 0. \tag{32}$$

Поскольку состояние элемента по определению есть решение задачи $U_i\{c\}$, то вдоль ортов (32) значение Π_i не возрастает

$$c_i\zeta_{ik} - \sum_{j=1}^{M} c_j\zeta_{jk} \leqslant 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, k_i. \tag{33}$$

Выберем теперь такой орт e_{ik^*}, что

$$\varepsilon_i = \frac{1}{\zeta_{ik^*}}\left(c_i\zeta_{ik^*} - \sum_{j=1}^{M} c_j\zeta_{jk^*}\right) = \min_k \frac{1}{\zeta_{ik}}\left(c_i\zeta_{ik} - \sum_{j=1}^{M} c_j\zeta_{jk}\right), \tag{34}$$

в силу (32) и (33)

$$\varepsilon_i \geqslant 0. \tag{35}$$

* В данном случае допустимым многогранником задачи $U_i\{c\}$ является исходный многогранник G_i с дополнительными гранями, соответствующими ограничениям на количество потребляемых дефицитных продуктов и, если $i \notin I$,— на количество выпускаемого продукта.

Используем теперь числа ε_i, $M+1 \leqslant i \leqslant N$, определенные в (34), для формирования допустимой траектории вектора цен. Положим для i таких, что $M+1 \leqslant i \leqslant N$,

$$\dot{c}_i(t) = \begin{cases} c_i(t), \text{ если } i \notin I \text{ либо } \varepsilon_i \leqslant -\dfrac{\tilde{y}_i}{2\dfrac{\partial F_i(c, \tilde{x}_{i0})}{\partial c_i}}, \\ 0 - \text{в противном случае,} \end{cases} \tag{36}$$

а для j таких, что $1 \leqslant j \leqslant M$,

$$\dot{c}_j(t) = \begin{cases} 0, \text{ если хотя бы для одного } i, M+1 \leqslant i \leqslant N, \\ \text{имеет место условие } i \notin I \text{ или } \varepsilon_i = 0, \\ c_j(t) - \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{37}$$

Кроме (36) и (37) для определения допустимой траектории вектора цен $c(t)$ зададим еще вектор $c(0)$. С этой целью рассмотрим M-мерное пространство, соответствующее подвектору $c^M = \{c_1, c_2, \ldots, c_M\}$ вектора цен. Для каждого элемента $\mathbf{P}_j$, $1 \leqslant j \leqslant M$, возьмем такие векторы c^M, что хотя бы для одного состояния равновесия сети решение соответствующей локальной задачи $U_j\{c\}$ неединственно, т. е. гиперплоскость

$$c_j y_j - \sum_{k=1}^{M} c_k \xi_{ki} = c_j \tilde{y}_j - \sum_{k=1}^{M} c_k \tilde{\xi}_{ki} \tag{38}$$

проходит через одно из ребер допустимого многогранника задачи $U_j\{c\}$. Множество векторов c^M, удовлетворяющих (38) для одного ребра, представляет собой подпространство M-мерного пространства, причем при параллельном переносе ребра это подпространство не меняется. Так как при переборе всевозможных локальных задач $U_j\{c\}$, различных с точностью до параллельного переноса ребер допустимых многогранников, может быть лишь конечное число, то множество векторов c^M, таких, что гиперплоскость (38) может пройти через одно из ребер одного из допустимых многогранников, является объединением конечного числа подпространств M-мерного пространства. Обозначим это множество через E_j.

Аналогичное множество E_i для элементов $\mathbf{P}_i$, $M+1 \leqslant i \leqslant N$, определим иначе. Рассмотрим всевозможные допустимые многогранники задач $U_i\{c\}$, соответствующие разным векторам c и различным состояниям равновесия сети. Как указывалось выше, эти многогранники расположены в $M+1$-мерном пространстве. Спроектируем теперь множество допустимых многогранников на M-мерное пространство с осями $\{\xi_{1i}, \xi_{2i}, \ldots, \xi_{Mi}\}$. В качестве множества E_i, $M+1 \leqslant i \leqslant N$, возьмем множество векторов c^M, таких, что гиперплоскость

$$\sum_{k=1}^{M} c_k \tilde{\xi}_{ki} = \sum c_k \tilde{\xi}_{ki} \tag{39}$$

параллельна хотя бы одному из ребер одного из спроектированных многогранников. Очевидно, множество E_i в данном случае есть также объединение конечного числа подпространств M-мерного пространства.

В качестве вектора $c(0)$ можно рассматривать любой вектор, удовлетворяющий условиям

$$c^M(0) \notin \bigcup_{i=1}^{N} E_i, \; c(0) > 0. \tag{40}$$

В силу (37) вектор $c^M(t)$ лежит на луче, проходящем через начало координат и точку $c^M(0)$, поэтому в любой момент времени t

$$c^M(t) \notin \bigcup_{i=1}^{N} E_i. \tag{41}$$

Чтобы доказать теорему, необходимо установить два факта: 1) траектория $c(t)$, определяемая соотношениями (36), (37) и (40), допустима, т. е. удовлетворяет (6), и 2) вдоль этой траектории хотя бы для одного i $c_i(t) \to \infty$ при $t \to \infty$, что немедленно следует из (36), (37) и (40), так как в любой момент времени t из этих соотношений

$$\sum_{i=1}^{N} \dot{c}_i(t) \geqslant \min_{1 \leqslant i \leqslant N} c_i(0) > 0.$$

Для установления 1) докажем сначала, что (36) удовлетворяют (6). С этой целью рассмотрим элемент $\mathbf{P}_i$, $M+1 \leqslant i \leqslant N$, производящий потребительский продукт и находящийся в состоянии $\{\tilde{y}_i, \tilde{x}_i\}$. По определению прибыли Π_i вариация $\delta\Pi_i$ равна

$$\delta\Pi_i = c_i \delta y_i - \sum_{j=1}^{M} c_j \delta \xi_{ji} + \delta c_i \tilde{y}_i. \tag{42}$$

Если $i \in I$, то имеет место (30); в силу предположенной дифференцируемости функции $F_i(c, x_{i0})$ по c_i следует, что при $\delta c_i > 0$ $\delta y_i = \delta \xi_{ji} = 0$, $j = 1, \ldots, M$.

Подставив теперь это соотношение в (42), получим

$$\delta\Pi_i = \delta c_i \tilde{y}_i. \tag{43}$$

Таким образом, если $i \in I$, то из (43) имеем $\delta\Pi_i / \delta c_i = \tilde{y}_i \geqslant 0$, доказывающее выполнение (6).

Пусть теперь $i \notin I$, $M+1 \leqslant i \leqslant N$. В этом случае при вариации δc_i цены c_i решение локальной задачи $U_i\{c, \delta c_i\}$ в силу (2) и (4) будет определяться новым ограничением на количество выпускаемого продукта P_i

$$\bar{y}_i \leqslant F_i + \frac{\partial F_i}{\partial c_i} \delta c_i. \tag{44}$$

Если $\partial F_i / \partial c_i \geqslant 0$, то при $\delta c_i > 0$ состояние $\{\tilde{y}_i, \tilde{x}_i\}$ остается допустимым для задачи $U_i\{c, \delta c_i\}$ и поэтому в силу (42) $\delta\Pi_i / \delta c_i \geqslant \tilde{y}_i \geqslant 0$. Таким образом, если $i \notin I$, $M+1 \leqslant i \leqslant N$, и $\partial F_i / \partial c_i \geqslant 0$, то (36) также удовлетворяет (6).

Пусть, наконец, $i \notin I$, $M+1 \leqslant i \leqslant N$, $\partial F_k / \partial c_i \leqslant 0$ и $\delta c_i > 0$. В этом случае состояние $\{\tilde{y}_i + \delta y_i, \tilde{x}_i + \delta x_i\}$, являющееся решением задачи $U_i\{c, \delta c_i\}$, очевидно, определится из решения задачи

$$\delta\Pi_i = \max, \tag{45}$$

$$\delta y_i \leqslant \frac{\partial F_i}{\partial c_i} \delta c_i \tag{46}$$

при дополнительном условии: вектор $\{\tilde{y}_i + \delta y_i, \tilde{x}_i + \delta y_i\}$ принадлежит допустимому многограннику задачи $U_i\{c\}$. Задача максимизации выражения

(45) при условии (46) эквивалентна в силу (42) задаче

$$c_i \delta y_i - \sum_{j=1}^{M} c_j \delta \xi_{ji} = \max, \tag{47}$$

$$\delta y_i = \frac{\partial F_i}{\partial c_i} \delta c_i. \tag{48}$$

при том же дополнительном условии. По определению (34) орта e_{ik^*}, решение этой задачи есть точка, смещенная от вершины $\{\tilde{y}_i, \tilde{x}_i\}$ вдоль орта * e_{ik^*} на такое расстояние, что имеет место (48). Таким образом, вектор $\{\delta y_i, \delta x_i\}$ определяется соотношением

$$\{\delta y_i, \delta x_i\} = \frac{\partial F_i}{\partial c_i} \delta c_i e_{ik^*}. \tag{49}$$

Подставим теперь (49) в (42) и воспользуемся определением (34). Получим

$$\delta \Pi_i = \frac{\partial F_i}{\partial c_i} \varepsilon_i \delta c_i + \tilde{y}_i \delta c_i$$

или

$$\frac{\partial \Pi_i}{\partial c_i} = \frac{\partial F_i}{\partial c_i} \varepsilon_i + \tilde{y}_i. \tag{50}$$

Если теперь $\varepsilon_i \leqslant -\dfrac{\tilde{y}_i}{2\dfrac{\partial F_i}{\partial c_i}}$, то из (50) следует соотношение $\delta \Pi_i / \delta c_i \geqslant 0$, которое устанавливает выполнение условия (6). Таким образом показано, что в любом случае (36) удовлетворяют (6).

Покажем теперь, что (37) и (40) удовлетворяют (6). Рассмотрим некоторый элемент $\mathbf{P}_j$, $j = 1, 2, \ldots, M$, производящий производственный продукт P_j. Докажем, что во всех случаях, когда $\dot{c}_j > 0$

$$\delta \xi_{ji} = 0, \ i = 1, 2, \ldots, N. \tag{51}$$

Если (51) будет доказано, то тем самым будет доказано, что при $\dot{c}_j > 0$ в силу (42) $\delta \Pi_j / \delta c_j = \tilde{y}_j \geqslant 0$ и условие (6) выполнено. Тем самым теорема 2 доказана.

Доказательство (51) проведем отдельно для $i = 1, 2, \ldots, M$ и для $i = M + 1, \ldots, N$; при этом в соответствии с (37) доказательство соотношения (51) для $i = M + 1, \ldots, N$ следует проводить лишь для случая, когда для всех $i = M + 1, \ldots, N$ одновременно имеют место условия

$$i \notin I, \ i = M + 1, \ldots, N, \tag{52}$$

и

$$\varepsilon_i > 0, \ i = M + 1, \ldots, N. \tag{53}$$

Докажем сначала (51) для $i = 1, 2, \ldots, M$. Так как в силу (41) $c^M(t) \notin \notin \bigcup_{i=1}^{M} E_i$, то в каждой локальной задаче $U_i\{c\}$, $i = 1, \ldots, M$, гиперплоскость (38) не проходит через какое-либо ребро допустимого многогранника этой

* Вообще говоря, могло оказаться, что существует несколько векторов e_{ik}, удовлетворяющих определению (34). В этом случае решение задач (47), (48) на допустимом многограннике задачи $U_i\{c\}$ было бы неединственным. Однако, если вектор цен в любой момент времени t удовлетворяет (41), этого быть не может.

задачи, а это в свою очередь означает, что при малых вариациях вектора $c^M(t)$ решение задачи $U_i\{c, \delta c_j\}$ совпадает с решением задачи $U_i\{c\}$, т. е.

$$\delta\xi_{ji} = 0, \ j = 1, 2, \ldots, M. \tag{54}$$

Таким образом, (51) для $i = 1, 2, \ldots, M$ доказано.

Докажем теперь (51) для $i = M+1, \ldots, N$ при выполнении (52) и (53). С этой целью рассмотрим некоторый элемент P_i, $i = M+1, \ldots, N$, находящийся в состоянии $\{\tilde{y}_i, \tilde{x}_i\}$, и покажем, что при выполнении (52) и (53) гиперплоскость

$$c_i y_i - \sum_{k=1}^{M} c_k \xi_{ki} = c_i \tilde{y}_i - \sum_{k=1}^{M} c_k \tilde{\xi}_{ki} \tag{55}$$

не проходит ни через одно ребро допустимого многогранника задачи $U_i\{c\}$. Из этого факта сразу будет следовать (51), а вместе с ним и доказательство теоремы.

Вообще говоря, из точки допустимого многогранника задачи $U_i\{c\}$, соответствующей состоянию $\{\tilde{y}_i, \tilde{x}_i\}$, могут исходить три типа ребер: 1) ребра, вдоль которых y_i растет; 2) ребра, вдоль которых

$$y_i = \tilde{y}_i; \tag{56}$$

3) ребра, вдоль которых y_i уменьшается.

Поскольку имеет место (52), то задача $U_i\{c\}$ включает ограничение вида $y_i \leqslant \tilde{y}_i$ и, следовательно, ребра типа 1) в этом случае отсутствуют.

По определению множества E_i, гиперплоскость (55) не может проходить через ребро допустимого многогранника задачи $U_i\{c\}$, определяемое условием (56). Действительно, если бы это было так, то в силу (54) вдоль этого ребра имело бы место соотношение

$$\sum_{k=1}^{M} c_k \xi_{ki} = \sum_{k=1}^{M} c_k \tilde{\xi}_{ki}, \tag{57}$$

которое означает, что вектор $c^M(t)$ проходит вдоль многогранника, полученного проектированием исходного допустимого многогранника на M-мерное пространство $\{\xi_{1i}, \xi_{2i}, \ldots, \xi_{Mi}\}$. Поэтому (57) противоречит (41). Таким образом, показано, что гиперплоскость (55) не проходит вдоль ребра (56). Гиперплоскость (55) не может проходить также через ребро типа 3), так как это значило бы, что $\varepsilon_i = 0$, что противоречит условию (53), что и доказывает теорему.

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. М. Браверман. Модель производства с неравновесными ценами. Экономика и матем. методы, 1972, т. VIII, вып. 2.

2. Э. Х. Чемберлин. Теория монополистической конкуренции. Реориентация теории стоимости. М., Изд-во иностр. лит., 1959.

Поступила в редакцию
11 V 1971