

ОТРАСЛЕВОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ И УПРАВЛЕНИЕ

ДВУХПЕРИОДНАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА РАЗМЕЩЕНИЯ

Б. Т. ДОВГАЛЬ, А. С. РЕДЬКИН, А. З. РЗАЕВ,
М. И. ФЕДОТОВА

(Москва, Одесса)

Одним из важнейших направлений совершенствования расчетов по размещению производства с использованием экономико-математического моделирования и методов математического программирования является переход от статических моделей к динамическим. В динамических задачах допустимость рассматриваемых вариантов развития системы проверяется в рамках единой задачи для всех лет, ряда характерных моментов (контрольных лет) или ряда отрезков периода планирования. В таких задачах особое значение приобретают связи между последовательными во времени состояниями одного и того же объекта [1].

В динамической задаче возможны два способа взаимной увязки таких состояний.

1. Формирование на стадии подготовки информации «сквозных» вариантов, которые описывают развитие и текущую деятельность объекта (предприятия и т. д.) в течение всего периода планирования или рассматриваемого срока службы объекта, если этот срок не выходит за пределы периода планирования.

2. Формирование вариантов деятельности объекта, которые относятся к отдельным многолетним отрезкам или годам периода планирования. «Сквозной» вариант не задается заранее, а строится в процессе решения задачи путем сочетания вариантов для отдельных отрезков или лет. Взаимная непротиворечивость такого сквозного варианта обеспечивается включением в задачу дополнительных ограничений.

Первый способ более прост. Однако ему присущ серьезный недостаток: число заранее разрабатываемых сквозных вариантов, поддающееся анализу и включению в задачу, не может быть большим, так что при этом способе возрастает вероятность упустить из рассмотрения и не включить затем в решение наиболее рациональные варианты развития отдельных объектов во времени. Поэтому данный способ применим главным образом в случае дискретных, а не непрерывных переменных. В [1] рассматривался исключительно первый способ построения динамической задачи ввиду его простоты; [2, стр. 83—85] и [3] посвящены второму способу, однако внимание в основном уделено здесь математическим, а не экономическим аспектам задачи: в частности, показано, что для ее решения (при линейной постановке) может быть использован метод потенциалов с некоторыми внесенными в него изменениями. Между тем экономические аспекты здесь очень важны: при втором способе возникают трудности экономической оценки плановых вариантов, для устранения которых оказывается необходимым специальный подход.

В настоящей статье рассматривается частный случай динамической задачи размещения, при котором число контрольных лет или отрезков пе-

риода планирования равно двум. Особая важность этого случая объясняется двумя причинами. Во-первых, двухпериодная постановка задачи удобна для часто применяемого десятилетнего периода планирования, так как позволяет расчленить его на два пятилетних отрезка. Во-вторых, благодаря существенному упрощению структуры ограничений двухпериодной задачи при втором способе построения для ее решения применимы, как будет показано, «транспортные» алгоритмы, причем без всяких изменений. Последнее может оказать решающее влияние на выбор постановки задачи при наличии стандартных транспортных программ на ЭВМ и, разумеется, при отсутствии программ для измененных алгоритмов.

Основное внимание уделяется двум вопросам: приведению задачи к такому виду, для которого могут использоваться стандартные транспортные алгоритмы, и методам экономической оценки вариантов. Такие усложнения, как нелинейность целевой функции, дискретность переменных и т. д., не вносят принципиальных изменений в оба вопроса, хотя и требуют перехода к моделям и методам нелинейного программирования. Поэтому для простоты ограничимся линейной постановкой двухпериодной задачи.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Возможны различные, содержательные с экономической точки зрения, варианты постановки двухпериодной динамической задачи; выбор того или иного варианта должен быть обусловлен конкретными особенностями ситуации. Трудно считать какой-либо из вариантов наиболее типичным или «основным», однако детальный анализ удобно ограничить одним из вариантов.

Рассматривается система производства и потребления однородного продукта, допустимость плана развития которой проверяется для двух периодов времени или двух контрольных лет.

Имеется n пунктов потребления, для каждого из которых задана D_j^t , $t = 1, 2$, $j = 1, 2, \dots, n$, потребность в продукте в t -м периоде, которая под-

лежит полному и своевременному удовлетворению. Обозначим $D^t = \sum_{j=1}^n D_j^t$,

$D^2 \geq D^1$. Такая потребность в динамической задаче может устанавливаться как для отдельных контрольных лет, так и для многолетних (например, пятилетних) периодов в целом. Для определенности примем, что D_j^t относится к потребности за пятилетие.

В m пунктах производства продукта имеются исходные производственные мощности $M_i^0 \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, m$; аналогично потребности, они также характеризуют возможный выпуск за пятилетие, а не за один год. Для любого i -го пункта заданы пределы возможного расширения существующих мощностей (или строительства нового предприятия, если для данного i -го пункта $M_i^0 = 0$). При этом различается строительство мощностей, вводимых в эксплуатацию для их использования, начиная и с первого периода и со второго; максимальные пределы возможного нового строительства и ввода мощностей соответственно принимаются равными M_i^1 и M_i^2 единиц продукта. Если для некоторых пунктов и периодов такого ограничения не существует, то M_i^t принимается равным D^t . Кроме того, соблюдается условие возможности построения допустимого плана

$$\sum_{i=1}^m \sum_{\tau=0}^t M_{i\tau} \geq \Delta D^t, \quad t = 1, 2. \quad (1)$$

В рамках описываемой постановки важен общий выпуск продукта за пятилетие, а не его разбиение по годам, поэтому мощности не обязательно должны вводиться к началу периода. Мощности, вводимые в сроки, когда их эксплуатация начинается в t -м периоде, для краткости будем называть «мощностями t -го периода».

Не теряя общности, можно предположить, что для существующих мощностей и для мощностей каждого из периодов технология производства различна, так что, например, текущие издержки на единицу продукта не одинаковы. При этом ограничения по исходным и по вводимым мощностям одновременно оказываются ограничениями по выпуску продукции с использованием различной технологии производства. Наконец, в зависимости от ситуации и от адекватности ее отображения условиями задачи приходится вводить дополнительные ограничения на использование мощностей. Например, при существенной дефицитности выпускаемой продукции можно дополнительно задаться условием недопустимости полного или частичного вывода из эксплуатации имеющихся мощностей, даже если их использование (скажем, ввиду появления новой технологии) представляется в задаче экономически нецелесообразным. В рамках рассматриваемого достаточно общего варианта постановки задачи, который условно назван «основным», возможность такого полного или частичного сокращения выпуска продукции на исходных или вновь построенных мощностях (для краткости назовем его «консервацией» вне зависимости от того, имеет ли место перевод на выпуск другой продукции, демонтаж или консервация) не исключается и считается допустимой. В то же время не разрешено «непоследовательное» использование исходных мощностей, т. е. их консервация в первом периоде с последующей эксплуатацией во втором. Наряду с этим будем считать запрещенным строительство мощностей первого периода «про запас», т. е. с их использованием не в первом, а только во втором периоде.

Перейдем к экономическим показателям.

Известны значения следующих показателей затрат: c_i^t — издержки производства единицы продукта в i -м пункте и в t -м периоде на исходных мощностях, $\tau = 0$, причем $\tau \leq t$, или на мощностях, введенных в эксплуатацию к t -му периоду, $t = 1, 2$; a_{ij}^t — издержки транспортировки единицы продукта от i -го поставщика к j -му потребителю в t -м периоде, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Эти величины считаются не зависящими от объема производства, строительства или перевозок. Таким образом, ограничимся линейной постановкой задачи размещения. Здесь укажем лишь, что они исчисляются как интегральные.

Для построения модели введем следующие обозначения: X_i^t — объем производства продукта в i -м пункте и в t -м периоде на исходных мощностях, $\tau = 0$, причем $\tau \leq t$, или мощностях τ -го периода, $\tau = 1, 2$; X_{ij}^t — объем поставок в t -м периоде из i -го пункта производства j -му потребителю, $t = 1, 2$, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$.

В связи с запрещением строительства мощностей первого периода «про запас» и явной нецелесообразностью строительства избыточных мощностей второго периода можно отказаться от введения особых переменных, характеризующих вновь строящиеся мощности, используя для этой цели непосредственно переменные X_i^t . Требуется найти такой вариант расширения производственных мощностей, производства продукта и его поставок потребителям, при котором потребность каждого из них полностью и без задержки (в течение того же периода) удовлетворяется, а сумма интегральных затрат на производство продукта и его транспортировку является минимальной.

Экономико-математическая модель рассмотренного варианта постановки задачи формулируется следующим образом: найти план, т. е. набор значений $X_i^{\tau t}$ и X_{ij}^t , минимизирующий Z ,

$$Z = \sum_{t=1}^2 \sum_{i=1}^m \left(\sum_{\tau=0}^t c_i^{\tau t} X_i^{\tau t} + \sum_{j=1}^n a_{ij}^t X_{ij}^t \right) \quad (2)$$

и удовлетворяющий условиям

$$X_i^{\tau t} \leq M_i^{\tau}, \quad \tau = 0, 1, 2, \quad \tau \leq t, \quad t = 1, 2, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (3)$$

$$X_i^{\tau 1} \geq X_i^{\tau 2}, \quad \tau = 0, 1, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (4)$$

$$\sum_{\tau=0}^t X_i^{\tau t} = \sum_{j=1}^n X_{ij}^t, \quad t = 1, 2, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^m X_{ij}^t = D_j^t, \quad t = 1, 2, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (6)$$

$$X_i^{\tau t}, X_{ij}^t \geq 0, \quad \tau = 0, 1, 2, \quad \tau \leq t, \quad t = 1, 2, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (7)$$

В этой модели (3) отображает ограниченные возможности строительства мощностей и выпуска продукции; (4) — недопустимость «непоследовательного» использования исходных мощностей и строительства мощностей первого периода «про запас»; (5) — равенство производства продукта в некотором пункте и вывоза продукта из этого пункта; (6) — необходимость полного и своевременного удовлетворения потребности в продукте; (7) — неотрицательность переменных.

2. ПРИВЕДЕНИЕ ДВУХПЕРИОДНОЙ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ К ТРАНСПОРТНОЙ МОДЕЛИ

Для того чтобы преобразовать задачу (2) — (7) к виду, допускающему применение транспортного алгоритма, введем вспомогательные переменные (их неотрицательность очевидна)

$$X_{i0}^{\tau 1} = M_i^{\tau} - X_i^{\tau 1}, \quad \tau = 0, 1, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (8)$$

$$X_{i0}^{\tau 2} = X_i^{\tau 1} - X_i^{\tau 2}, \quad \tau = 0, 1, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (9)$$

$$X_{i0}^{22} = M_i^2 - X_i^{22}, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (10)$$

Кроме того, расчленим поставки во втором периоде X_{ij}^{22} на: поставки из продукции, выработанной на исходных мощностях и мощностях первого периода X_{ij}^{201} , и поставки из продукции, выработанной на мощностях второго периода X_{ij}^{22} , $X_{ij}^{201} \geq 0$ и $X_{ij}^{22} \geq 0$. С помощью вновь введенных переменных преобразуем ограничения (3) — (6). Запишем неравенства (3) для $t = 1$ в виде

$$X_i^{01} + X_{i0}^{01} = M_i^0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (11)$$

$$X_i^{11} + X_{i0}^{11} = M_i^1, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (12)$$

Далее, с учетом (4) и (9) неравенство (3) для $t = 2$, $\tau = 0$ и $\tau = 1$ представим

$$X_i^{02} + X_{i0}^{01} + X_{i0}^{02} = M_i^0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (13)$$

$$X_i^{12} + X_{i0}^{11} + X_{i0}^{12} = M_i^1, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (14)$$

Наконец, учитывая введение переменных X_{ij}^{22} и используя соответствующим образом расчлененное уравнение (5), запишем (3) для $\tau = t = 2$

$$\sum_{j=1}^n X_{ij}^{22} + X_{i0}^{22} = M_i^2, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (15)$$

Поскольку (4) уже учтено в (13) и (14), а (5) для $\tau = t = 2$ — в (15), то (5) для $\tau = 0$ и 1, $t = 1$ и $t = 2$ будет

$$X_i^{01} + X_i^{11} = \sum_{j=1}^n X_{ij}^{11}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (16)$$

$$X_i^{02} + X_i^{12} = \sum_{j=1}^n X_{ij}^{201}, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (17)$$

Уравнения (6), для $t = 1$ и $t = 2$ могут быть

$$\sum_{i=1}^m X_{ij}^{11} = D_j^1, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (18)$$

$$\sum_{i=1}^m (X_{ij}^{201} + X_{ij}^{22}) = D_j^2, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (19)$$

На этом преобразования ограничений (3) — (6) закончены. Однако для построения модели, применительно к которой можно было бы построить транспортную сеть или транспортную матрицу, нужны еще два ограничения.

Обозначив $D^2 - D^1 = \Delta D$, найдем ΔD как разность между просуммированными по j (19) и (18) и произведем необходимые преобразования. Получим

$$\sum_{i=1}^m X_{i0}^{22} + \sum_{i=1}^m (X_{i0}^{02} + X_{i0}^{12}) = \sum_{i=1}^m M_i^2 - \Delta D,$$

или, введя переменную X_0^2 , равную второму слагаемому в левой части уравнения,

$$\sum_{i=1}^m X_{i0}^{22} + X_0^2 = \sum_{i=1}^m M_i^2 - \Delta D. \quad (20)$$

Очевидное неравенство $\sum_{i=1}^m (X_{i0}^{02} + X_{i0}^{12}) \leq \sum_{i=1}^m (M_i^0 + M_i^1)$ представим

в виде уравнения, введя переменную X_0^2 ,

$$\sum_{i=1}^m (X_{i0}^{02} + X_{i0}^{12}) + X_0^2 = \sum_{i=1}^m (M_i^0 + M_i^1). \quad (21)$$

Наконец, дополним систему (11) — (21) условием неотрицательности всех переменных

$$X_i^{01}, X_i^{11}, X_i^{02}, X_i^{12}, X_{ij}^1, X_{ij}^{201}, X_{ij}^{22},$$

$$X_{j0}^{01}, X_{j0}^{11}, X_{j0}^{02}, X_{j0}^{12}, X_{j0}^{22}, X_0^{22}, X_0^2 \geq 0, \quad \text{для всех } i \text{ и } j. \quad (22)$$

Система (11) — (22) построена. Целевую функцию (2) перепишем в несколько измененном виде, соответствующем проделанным преобразованиям

$$\begin{aligned} Z = & \sum_{i=1}^m c_i^{01} X_i^{01} + \sum_{i=1}^m c_i^{11} X_i^{11} + \sum_{i=1}^m c_i^{02} X_i^{02} + \sum_{i=1}^m c_i^{12} X_i^{12} + \\ & + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^1 X_{ij}^1 + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 X_{ij}^{201} + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (c_i^{22} + a_{ij}^2) X_{ij}^{22}. \end{aligned} \quad (23)$$

Нетрудно показать, что задача линейного программирования (11) — (23) имеет сетевой характер и может быть представлена в виде транспортной задачи на сети. Для этого: (11), (12) и (20), (21) оставим без изменения, (13) — (15) и (18), (19) умножим на «-1», в (16), (17) все переменные перенесем в левую часть, причем (16) умножим на «-1».

Правила построения транспортной сети, отображающей модель (11) — (23), продемонстрируем на примере. Пусть в задаче рассматривается 3 пункта производства и 3 потребителя, $i = j = 3$. Значения M_i^r , $r = 0, 1, 2$ и D_j^t , $t = 1, 2$, приведены в таблице, c_i^{rt} и a_{ij}^t приводить не будем, так как проставление цен на дугах приведет к чрезмерному загромождению чертежа, изображающего сеть (рис. 1).

i или j	M_i^r			D_j^t	
	$r = 0$	$r = 1$	$r = 2$	$t = 1$	$t = 2$
1	3	12	15	5	11
2	4	16	15	7	7
3	8	10	5	8	12
Итого	15	38	35	20	30

Строим сеть, изображенную на рис. 1, где вершины показаны кружками, дуги — линиями между вершинами со стрелками, ресурсы или потребности проставлены в прямоугольниках у вершин. Вершины 1—3 отображают уравнения (18); 4—6 — уравнения (16); 7—9 — уравнения (11); 10—12 — уравнения (12); 13—15 — уравнения (13); 16—18 — уравнения (14); 19—21 — уравнения (17); 22—24 — уравнения (19); 25—27 — уравнения (15); 28 — уравнение (20); 29 — уравнение (21). Наконец, сеть замыкает вершина 0. Соответственно в вершинах 1—29 проставляются следующие ресурсы или потребности: в вершинах 1—3 « $-D_j^1$ »; в 7—9 и 13—15, 10—12 и 16—18 соответственно « $+M_i^0$ » и « $-M_i^0$ », « $+M_i^1$ » и « $-M_i^1$ »; в 22—24

« $+D_j^2$ »; в 25—27 « $-M_i^2$ »; в 28 « $\sum_{i=1}^m M_i^2 - \Delta D$ »; в 29 « $\sum_{i=1}^m (M_i^0 + M_i^1)$ ».

Вершине 0 можно не сопоставлять ресурсы или потребности, однако, если это делается, то, как нетрудно убедиться, в ней следует проставить

$$\ll - \sum_{i=1}^m (M_i^0 + M_i^1) \gg.$$

Потоки на дугах сети отображают: на дуге (4, 1) и т. д. — переменные X_{ij}^1 ; на дугах (7, 4) — (9, 6) и (10, 4) — (12, 6) — переменные X_{ij}^{01} и X_{ij}^{11} ; на дугах (7, 13) — (9, 15) и (10, 16) — (12, 18) — переменные X_{ij}^{01} и X_{ij}^{11} ;

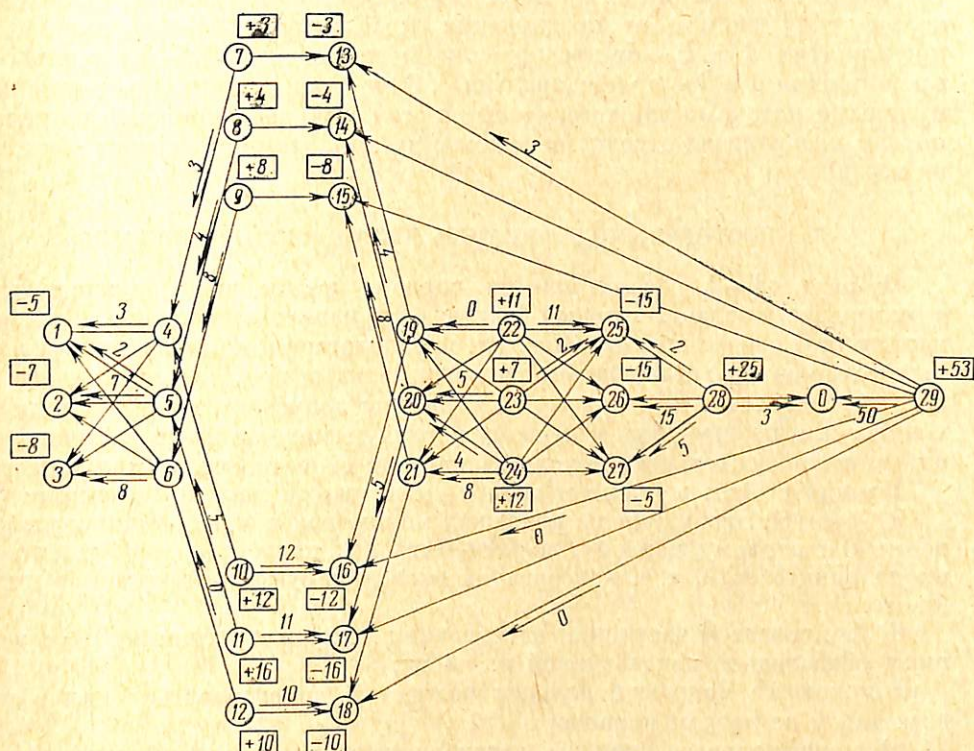


Рис. 1

на дугах (19, 13) — (21, 15) и (19, 16) — (21, 18) — переменные X_{ij}^{02} и X_{ij}^{12} ; на дугах (22, 19) и т. д., (22, 25) и т. д. — переменные X_{ij}^{201} и X_{ij}^{22} ; на дугах (28, 25) — (28, 27) — переменные X_{ij}^{22} ; на дугах (29, 13) — (29, 15) и (29, 16) — (29, 18) — переменные X_{ij}^{02} и X_{ij}^{12} ; на дуге (28, 0) — переменная X_0^{22} ; наконец, на дуге (29, 0) — переменную X_0^2 . Соответственно цены на дугах сети равны: на дугах (4, 1) и т. д., (22, 19) и т. д. — a_{ij}^1 и a_{ij}^2 ; на дугах (7, 4) — (9, 6) и (10, 4) — (12, 6), (19, 13) — (21, 15) и (19, 16) — (21, 18) соответственно c_i^{01} , c_i^{11} , c_i^{02} и c_i^{12} ; на дугах (22, 25) и т. д. — $(c_i^{22} + a_{ij}^2)$; о ценах на дугах (29, 13) — (29, 18) см. разд. 4. На остальных дугах цены равны нулю.

Видимо, можно говорить о том, что изображенная на рис. 1 транспортная сеть построена достаточно экономно: число вспомогательных вершин и дуг в ней невелико; только один лишний раз продублированы дуги для потоков, отображающих X_{ij}^{22} .

Продемонстрируем на рис. 1 один из допустимых планов, построенных для приведенного примера. Пусть в первом периоде полностью использу-

ется исходная мощность всех трех предприятий ($X_1^{01}=3$, $X_2^{01}=4$, $X_3^{01}=8$), а также построено и используется 5 единиц мощности второго предприятия ($X_2^{11}=5$). Во втором периоде ранее эксплуатируемые мощности предприятий 2 и 3 продолжают работать, а предприятия 1 (3 единицы) — консервируются. Вместо этого во втором периоде вводится в эксплуатацию 13 единиц мощности предприятия 1, работающих по новой технологии. Наконец, потребности удовлетворяются следующим образом: в первом периоде потребитель 1 получает 3 единицы от предприятия 1 и 2 единицы — от предприятия 2; потребитель 2 получает 7 единиц от предприятия 2; потребитель 3 — 8 единиц от предприятия 8. Во втором периоде потребитель 1 получает 11 единиц от предприятия 1; потребитель 2 — 2 единицы от предприятия 1 и 5 — от предприятия 2; потребитель 3 — 4 единицы от предприятия 2 и 8 — от предприятия 3. Этот план, дополненный четырьмя нулевыми потоками для того, чтобы он стал базисным, приведен на рис. 1; потоки изображены стрелками рядом с дугами, величина потока — числом на стрелке.

3. НЕКОТОРЫЕ МОДИФИКАЦИИ ДВУХПЕРИОДНОЙ ЗАДАЧИ

В разд. 1—2 рассматривался вариант постановки двухпериодной динамической задачи, который был условно назван «основным». Для него характерны следующие особенности: предполагается наличие трех различных технологий; устанавливаются максимальные пределы возможного нового строительства по каждому из периодов; допускается консервация исходных или построенных к первому периоду мощностей, зато запрещается их «непоследовательное» использование или строительство «про запас».

Наряду с этим вариантом возможны и многие другие, например:

а) выпуск продукции на исходных мощностях или на мощностях, введенных к первому периоду, должен быть для первого и для второго периода одинаковым, т. е. консервация эксплуатируемых мощностей запрещается;

б) допускается частичная консервация исходных мощностей — с заданием обязательно используемой их части;

в) исходные мощности должны полностью использоваться как в первом, так и во втором периоде;

г) максимальные пределы устанавливаются не для объемов нового строительства мощностей, вводимых в эксплуатацию к началу каждого периода, а для общего выпуска продукта предприятием.

Некоторые из таких вариантов постановки, подобно модели (2) — (7) или (11) — (23), полностью вписываются в транспортную задачу; для других вариантов эту задачу приходится дополнять некоторым числом ограничений.

Рассмотрим три варианта, сводимых к транспортной задаче. Первый из них связан с запретом консервации эксплуатируемых мощностей и содержится в а). Модель для этого варианта полностью совпадает с моделью (2) — (7), лишь неравенство (4) заменяется уравнением

$$X_i^{\tau 1} = X_i^{\tau 2}, \quad \tau = 0, 1, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (24)$$

Такая замена позволяет упростить модель задачи и адекватную ей сеть (рис. 1): удастся ликвидировать вершины 0 и 29 и дуги (28, 0), (29, 0) и (29, 13) — (29, 18). При втором варианте постановки (п. б)) вводятся дополнительные ограничения

$$X_i^{0t} \geq p_i M_i^0, \quad t = 1, 2, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (25)$$

где p_i — заданный нижний предел использования исходной мощности, в долях единицы.

Этой модели адекватна та же сеть, что для а). Необходимы лишь два незначительных изменения: обязательная для использования часть исходных мощностей, т. е. $p_i M_i^0$, вычитается из ресурсов и потребностей, предоставленных у вершин 7—9 и 13—15, и соответственно переносятся в вершины 4—6 и 19—21. Так, если для третьего предприятия $p_i = 0,75$, то в вершинах 9 и 15 остаются ресурсы и потребность «+2» и «-2», а в вершинах 6 и 21 проставляются «+6» и «-6».

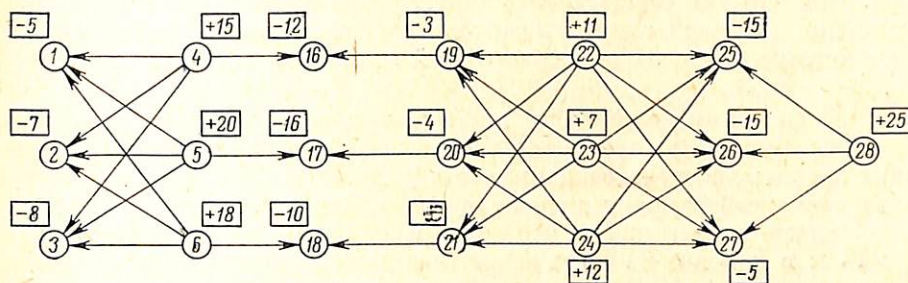


Рис. 2

При третьем варианте постановки исходные мощности M_i^0 полностью используются и в первом, и во втором периоде (п. в)). Это условие, в сочетании с соблюдением (24) для $\tau = 1$, позволяет еще более упростить модель задачи и адекватную ей сеть: удается дополнительно ликвидировать вершины 7—9 и 13—15, а вершины 4—6 совместить с вершинами 10—12. При этом ликвидируются дуги $(7, 4) - (9, 6)$, $(10, 4) - (12, 6)$, $(7, 13) - (9, 15)$ и $(19, 13) - (21, 15)$. В вершинах 4—6 проставляются ресурсы, равные «+ ($M_i^0 + M_i^1$)», в вершинах 16—18 — потребность «- M_i^1 », а в вершинах 19—21 «- M_i^0 ». Цены c_i^{01} прибавляются к ценам a_{ij}^1 на дугах $(4, 1)$ и т. д., а цены c_i^{12} — к ценам a_{ij}^2 на дугах $(22, 19)$ и т. д. Такая весьма простая сеть изображена на рис. 2; номера вершин в ней по возможности сохранены прежними, несмотря на исключение вершин с промежуточными номерами. Условия г) в транспортную модель не вписываются и их приходится учитывать с помощью дополнительных ограничений.

4. ЭКОНОМИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ПЛАНОВЫХ ВАРИАНТОВ В ДВУХПЕРИОДНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ

При экономической оценке плановых вариантов в двухпериодной задаче возникают вовсе не очевидные трудности, не учитывая которые можно в результате решения оптимизационной задачи получить ошибочные результаты, сделать неправильный выбор.

Первая трудность состоит в том, что в динамической задаче с многолетними периодами (отрезками), при любом способе ее построения, будь то с использованием или без использования заранее заданных «сквозных» вариантов развития, экономические показатели модели должны исчисляться на основе специальных приемов, устраняющих потерю сопоставимости [1, стр. 84—91]. При такой постановке данные о потребности в ежегодном разрезе отсутствуют или не учитываются и не ставится вопрос о динамике выпуска продукции, а также о сроках ввода отдельных объектов системы внутри рассматриваемых периодов времени.

Формулы исчисления интегральных затрат [1, стр. 22–23] в такой ситуации непосредственно не применимы. Прежде чем ими пользоваться, необходимо элиминировать влияние различий динамики выпуска для разных объектов в пределах одного и того же пятилетия. Иными словами, при исчислении интегральных экономических показателей динамику выпуска также нельзя учитывать, пользуясь более мелкой единицей времени, чем длительность соответствующего многолетнего отрезка: время не расчленяется на интервалы меньшие, чем выделенные отрезки периода планирования. В связи с этим исчислению интегральных затрат должно предшествовать агрегирование технико-экономических показателей по отрезкам. Его следует осуществлять таким образом, чтобы для каждого из многолетних отрезков оно обеспечивало сопоставимость: а) коэффициентов дисконтирования, б) дисконтируемой величины, т. е. затрат этого отрезка.

Для обеспечения условия а) удобнее и проще всего считать, что в каждом отрезке весь выпуск продукции и перевозки, а значит и соответствующие затраты, сосредоточены в одном условно выбранном году, так что используется коэффициент дисконтирования для этого года.

Необходимо подчеркнуть, что если периоды имеют одинаковую длительность и в каждом из них в качестве «представительного» года или года «условного выпуска» выбирается год с одним и тем же порядковым номером, то безразлично, выбирать ли, например, третий или пятый год пятилетия. Выбор этого года влияет только на масштаб измерения затрат, а не на их соотношение для разных объектов. Что же касается дисконтируемой величины (затрат t -го периода), то для обеспечения ее сопоставимости (условие б)) она должна приниматься не на уровне непосредственных затрат этого периода, а определяться на основе средневзвешенных показателей (одинаковых для всех лет расчетного срока) по (26). Таким образом, интегральные затраты за период на единицу продукта $c_i^{\tau t}$ равны

$$c_i^{\tau t} = Z_i^{\tau} B^t, \quad \tau = 0, 1, 2, \quad \tau \leq t, \quad t = 1, 2, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (26)$$

где Z_i^{τ} — средневзвешенные затраты t -го периода по i -му предприятию в расчете на единицу продукта, выпускаемого на мощностях τ -го периода; B^t — выбранное значение коэффициента дисконтирования. В свою очередь средневзвешенные затраты Z_i^{τ} исчисляются так

$$Z_i^{\tau} = \left[\sum_{t=0}^{\tau} (K_i^{\tau t} + c_i^{\tau t}) B^t \right] : \left(\sum_{t=1}^{\tau} M_i^{\tau t} B^t \right), \quad \tau = 0, 1, 2, \quad \tau \leq t, \\ t = 1, 2, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (27)$$

где $K_i^{\tau t}$ — «полные» капитальные затраты t -го периода по i -му предприятию для строительства мощностей τ -го периода; $c_i^{\tau t}$ — общая сумма текущих затрат t -го периода по i -му предприятию при работе на мощностях τ -го периода; $M_i^{\tau t}$ — выпуск продукта i -м предприятием в t -м периоде при работе на мощностях τ -го периода; T_{pi}^{τ} — длительность расчетного срока для i -го предприятия при работе на мощностях τ -го периода.

Наконец, «полные» капитальные затраты $K_i^{\tau t}$ исчисляются

$$K_i^{\tau t} = K_i^{\tau} \sum_{r=1}^{T_i} \delta_i^{\tau r} (1 + E)^{r-t}, \quad \tau = 0, 1, 2, \quad \tau \leq t, \quad t = 1, 2, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (28)$$

где K_i^r — общая сумма капитальных затрат по i -му предприятию для строительства мощностей r -го периода; T_i — длительность t -го периода; δ_i^{tr} — часть (в долях единицы) общей суммы капитальных вложений K_i^r , приходящаяся на r -й год t -го периода; r_t — год t -го периода, которому соответствует выбранное значение коэффициента дисконтирования B^t ; E — нормативный коэффициент эффективности.

Таким образом, процесс вычисления c_i^{tr} сводится к следующим операциям:

а) для каждого варианта деятельности предприятия (т. е. для ввода мощностей в разные периоды) устанавливается расчетный срок исчисления средневзвешенных показателей;

б) весь расчетный срок разбивается на отрезки, например пятилетние;

в) капитальные и текущие затраты и выпуск продукции считаются сосредоточенными в условно выбранных годах отрезков, причем капитальные затраты отрезков дисконтируются к этим годам;

г) средневзвешенные затраты на единицу продукта исчисляются на основе агрегированных по отрезкам технико-экономических показателей и коэффициентов дисконтирования, соответствующих выбранным «представительным» годам.

Продemonстрируем применение формул (26) — (28) на условном примере.

Пусть мощностям первого периода $\tau = 1$ соответствует расчетный срок $T_{r1}^1 = 18$ лет, из которых 3 года длится строительство и 15 лет — эксплуатация. Ввод мощностей в эксплуатацию осуществляется в году, предшествующем началу первого периода (в «нулевом» году), который и можно выбрать в качестве «представительного» года нулевого периода. Расчетный срок разобьем на 3 пятилетних периода и выберем для агрегирования показателей годы 3, 8 и 13. Коэффициенты дисконтирования исчислим по формуле сложных процентов; тогда (если $E = 0,15$) $B^0 = 1$, $B^1 = 0,6575$, $B^2 = 0,3270$ и $B^3 = 0,1626$. Выпуск в первый и второй годы эксплуатации равен 8 и 9 единицам продукта, в течение остальных 13 лет — по 10 единиц продукта в год. Капитальные затраты (по годам) составляют 30, 40 и 30 млн. руб., а текущие затраты для первых трех лет эксплуатации 20, 19,5 и 19 млн. руб., и для остальных 12 лет — по 18 млн. руб. в год.

Исчислим «полные» капитальные затраты по (28): $K_i^{10} = 30 \cdot 1,15^2 + 40 \cdot 1,15 + 30 \cdot 1 = 115,68$ млн. руб., а Z_i^1 по (27): $Z_i^1 = [115,68 \cdot 1 + (20 + 19,5 + 19 + 2 \cdot 18) \cdot 0,6575 + 5 \cdot 18 \cdot 0,3270 + 5 \cdot 18 \cdot 0,1626] : [(8 + 9 + 3 \cdot 10) \cdot 0,6575 + 5 \cdot 10 \cdot 0,3270 + 5 \cdot 10 \cdot 0,1626] = 221,9 : 55,35 = 4,01$ млн. руб./единицу.

Наконец, по (26) определим c_i^{1t} для $t = 1$ и $t = 2$: $c_i^{11} = 4,01 \cdot 0,6575 = 2,6366$ млн. руб./единицу, $c_i^{12} = 4,01 \cdot 0,3270 = 1,3113$ млн. руб./единицу.

Эти цены и проставляются на соответствующих дугах сети, например для $i = 1$ на дугах (10, 4) и (19, 16). Однако здесь возникает еще одна трудность. В динамических задачах, построенных без использования заранее заданных «сквозных» вариантов, необходимо учесть, что длительность расчетного срока (которая нужна для исчисления средневзвешенных показателей) при некоторых модификациях постановки, например, при описанной в разд. 2, 3 постановке, допускающей консервацию имеющихся мощностей, удастся определить только в результате решения задачи. Так, если в рассмотренном выше примере мощности будут выведены из эксплуатации после первого периода, то расчетный срок составит не 18, а 8 лет, средневзвешенные затраты: $Z_i^1 = (115,68 \cdot 1 + 94,5 \cdot 0,6575) : (47 \cdot 0,6575) = 177,83 : 30,87 = 5,76$ млн. руб./единицу, а интегральные затраты: $c_i^{11} = 5,76 \cdot 0,6575 = 3,7872$ млн. руб./единицу, что на 1,1506 млн.

руб./единицу (или на 44%) превышает ранее исчисленное значение c_i^{11} .

Для отображения этого проставим для $i=1$ цену 1,1506 на дуге (29, 16); тогда всякое единичное сокращение выпуска на мощностях первого периода приводит к соответствующему увеличению затрат. Затраты на перевозку a_{ij} исчисляются проще: они представляют собой экономические показатели транспорта a_{ij} , умноженные на те же B' , на которые умножались средневзвешенные показатели производства, т. е. на 0,6575, 0,3270 и 0,1626.

ЛИТЕРАТУРА

1. Основные положения оптимизации развития и размещения производства. М.—Новосибирск, 1969 (ЦЭМИ АН СССР, ИЭ и ОПП СО АН СССР, СОПС при Госплане СССР).
2. Л. В. Канторович, В. Л. Макаров. Оптимальные модели перспективного планирования. В сб. Применение математики в экономических исследованиях. Т. 3. М., «Мысль», 1965.
3. С. С. Суриц. Динамическая транспортная задача и некоторые ее обобщения. В сб. Экономико-математические методы. Вып. 2. М., «Наука», 1965.

Поступила в редакцию
30 XI 1970