ЭКОНОМИКА
И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

1973
том IX, вып. 2

ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

СВОЙСТВА ЦЕН, ВЫТЕКАЮЩИЕ ИЗ ПРИНЦИПА ВЗАИМОВЫГОДНОСТИ ОБМЕНА

Л. Ю. ШАХМУНДЕС

(Ленинград)

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Задача сформулирована в [1]. Рассматриваются система, состоящая из m ячеек, и полный набор n продуктов, пригодных для потребления ячейками. Ячейки, располагая ресурсом единого вида, могут производить любой продукт, часть его потреблять, часть обменивать с ячейками системы на продукты другого вида. Отдельной ячейке приписывается стремление иметь как можно большее значение целевой функции

$$f_i(Q_{i1}, Q_{i2}, \ldots, Q_{in}), \quad i=1, 2, \ldots, m. \tag{1}$$

Приняты следующие обозначения: Q_{ik} — количество продукта k-го вида, потребляемое i-й ячейкой; x_{ik} — количество ресурса, затрачиваемое i-й ячейкой на производство продукта k-го вида; T_{ik} — производительность в натуральных единицах продукта на единицу ресурса при изготовлении i-й ячейкой продукта k-го вида; τ_{ik} — затраты ресурса на изготовление i-й ячейкой единицы продукта k-го вида; D_{ik} — количество продукта k-го вида, производимое i-й ячейкой; B_{ikj} — количество продукта k-го вида, передаваемое i-й ячейкой в порядке обмена j-й ячейке; A_{ikj} — количество продукта k-го вида, получаемое i-й ячейкой в порядке обмена от j-й ячейки; X_i — полное количество ресурса, которым располагает i-я ячейка.

В соответствии с определениями выполняются соотношения

$$Q_{ik}=D_{ik}+\sum_{j=1}^{m}(A_{ikj}-B_{ikj}), \qquad D_{ik}=x_{ik}T_{ik},$$

$$\tau_{ik}=\frac{1}{T_{ik}}, \qquad \sum_{k=1}^{n}x_{ik}\leqslant X_i, \qquad B_{iki}=A_{iki}=0, \tag{2}$$

$$B_{ikj}\equiv A_{jki} \tag{3}$$

для всех $i, j=1, 2, \ldots, m$; $k=1, 2, \ldots, n$.

Обменное отношение

$$\frac{z_{ilj}}{z_{jki}}=\frac{B_{ikj}}{A_{ilj}}=\frac{A_{jki}}{B_{jli}} \tag{4}$$

определяется количествами взаимно обмениваемых продуктов. Величину z_{ilj} можно трактовать как цену, по которой j-я ячейка получает продукт l-го вида от j-й ячейки. Производительности T_{ik}, $i=1, 2, \ldots, m$, $k=1, 2, \ldots, n$, предполагаются фиксированными, а целевые функции (1) — выпуклым и неубывающими по всем аргументам с непрерывными первыми частными производными. Увеличение ячейкой своей целевой функции перераспределением ресурса между производством отдельных продуктов назовем внутренней оптимизацией, изменением количества обмениваемых продуктов — обменной оптимизацией.

Обмен подразумевается удовлетворяющим принципу взаимовыгодности, который заключается в том, что всякое изменение количеств обмениваемых продуктов приводит к возрастанию целевых функций обеих ячеек-партнеров. Цель работы заключается в выявлении условий возникновения и в изучении процесса развития определенной обменной связи.

2. ВНУТРЕННЯЯ ОПТИМИЗАЦИЯ

Предположим, что весь ресурс X_i расходуется i-й ячейкой на производство продуктов и рассмотрим возможности повышения целевой функции изменением потребления отдельных продуктов только за счет изменения объемов производства, т. е. примем $\Delta Q_{ik}=\Delta D_{ik}$, $k=1, 2, \ldots, n$. Если ячейка производит продукт k-го вида, то его производство может быть уменьшено, т. е. изменено на некоторую величину $\Delta D_{ik}<0$. Полагая это изменение малым, для приращения целевой функции запишем $\Delta f_{ik}=\frac{\partial f_i}{\partial Q_{ik}}\Delta Q_{ik}=\frac{\partial f_i}{\partial Q_{ik}}\Delta D_{ik}$. Высвободившееся количество ресурса по (2) составит $\Delta x_{ik}=\Delta D_{ik}/T_{ik}$. Оно может быть израсходовано на увеличение производства и потребления $\Delta Q_{il}=T_{il}\Delta x_{il}=-T_{il}\Delta x_{ik}$ продукта l-го вида. Это даст прирост целевой функции $\Delta f_{il}=\frac{\partial f_i}{\partial Q_{il}}\Delta Q_{il}$. Ячейка выигрывает от такого перераспределения, если $\Delta f_i=\Delta f_{ik}+\Delta f_{il}>0$, т. е. если

$$\frac{\partial f_i}{\partial Q_{il}}T_{il}>\frac{\partial f_i}{\partial Q_{ik}}T_{ik}. \tag{5}$$

Поэтому справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1. Если найдется хотя бы один производимый ячейкой продукт k-го вида и хотя бы один из всех других продуктов l-го вида, для которых при фактическом состоянии ячейки выполняется (5), то возможна внутренняя оптимизация.

Внутренне оптимальное состояние i-й ячейки при полном расходе ресурса X_i определяется задачей на условный экстремум для функции (1) с неотрицательными аргументами, которая с учетом (2) может быть записана

$$F_i=\max_{\sum_{k=1}^{n}x_{ik}=X_i} f_i\Big(T_{i1}x_{i1}+\sum_{j=1}^{m}(A_{i1j}-B_{i1j}), \ldots, T_{in}x_{in}+\sum_{j=1}^{m}(A_{inj}-B_{inj})\Big). \tag{6}$$

Здесь X_i и все A_{ikj}, B_{ikj} зафиксированы, а x_{ik}, $k=1, 2, \ldots, n$, являются искомыми неотрицательными величинами. Решая задачу (6), установим, что в оптимальном состоянии для всех производимых i-й ячейкой продуктов выполняются равенства

$$\frac{\partial f_i}{\partial Q_{ik}}T_{ik}=\varepsilon_i, \tag{7}$$

а для всех непроизводимых продуктов — неравенства

$$\frac{\partial f_i}{\partial Q_{il}}T_{il}\leqslant\varepsilon_i. \tag{8}$$

Все частные производные подразумеваются вычисленными в точке фактического состояния. Нам потребуются далее известные или легко получаемые с использованием [2, гл. 18] выражения

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial F_i}{\partial \tau_{ik}} = -D_{ik}\varepsilon_i, \qquad \frac{\partial F_i}{\partial X_i} = \varepsilon_i, \\
\frac{\partial^2 F_i}{\partial \tau_{ik}^2} = -D_{ik}\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \tau_{ik}} - \varepsilon_i \frac{\partial D_{ik}}{\partial \tau_{ik}}, \\
\frac{\partial^2 F_i}{\partial X_i^2} = \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial X_i}, \\
\frac{\partial^2 F_i}{\partial \tau_{ik}\,\partial X_i} = \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \tau_{ik}} = -D_{ik}\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial X_i} - \varepsilon_i \frac{\partial D_{ik}}{\partial X_i}, \\
\frac{\partial D_{ik}}{\partial \tau_{ik}} = -D_{ik}\frac{\partial D_{ik}}{\partial X_i} + \varepsilon_i \frac{A_{ik}}{A_i}, \qquad k = 1, 2, \ldots\ n,
\end{gathered}
\tag{9}
$$

где A_{ik} — алгебраическое дополнение соответствующего диагонального элемента определителя,

$$
A_i = \begin{vmatrix}
0 & \tau_{i1} & \tau_{i2} & \ldots & \tau_{in} \\
\tau_{i1} & \dfrac{\partial^2 f_i}{\partial Q_{i1}\,\partial Q_{i1}} & \dfrac{\partial^2 f_i}{\partial Q_{i1}\,\partial Q_{i2}} & \ldots & \dfrac{\partial^2 f_i}{\partial Q_{i1}\,\partial Q_{in}} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\tau_{in} & \dfrac{\partial^2 f_i}{\partial Q_{in}\partial Q_{i1}} & \dfrac{\partial^2 f_i}{\partial Q_{in}\partial Q_{i2}} & \ldots & \dfrac{\partial^2 f_i}{\partial Q_{in}\partial Q_{in}}
\end{vmatrix}.
$$

Заметим, что равенство $\varepsilon_i = 0$ при оговоренной выпуклости целевой функции означает абсолютную удовлетворенность i-й ячейки в том смысле, что ни в увеличении ресурса X_i, ни в изменении количеств обмениваемых продуктов она не заинтересована. Исключим из рассмотрения случай абсолютной удовлетворенности хотя бы одной ячейки системы, полагая, что этим совершенно не сузится практическая применимость результатов. Абсолютной удовлетворенностью i-й ячейки продуктом k-го вида назовем состояние, в котором $\partial f_i / \partial Q_{ik} = 0$. При непрерывных первых производных целевой функции приходим к такому утверждению.

Утверждение 2. Если во внутренне оптимальном состоянии отсутствует абсолютная удовлетворенность ячейки хотя бы по одному продукту, то эта ячейка не имеет абсолютной удовлетворенности ни по одному из производимых продуктов.

3. ОБМЕННАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ

Ячейка j может изменить значение целевой функции на величину $\Delta f_j = \frac{\partial f_j}{\partial Q_{jk}}\Delta Q_{jk} + \frac{\partial f_j}{\partial Q_{jl}}\Delta Q_{jl}$, если снизит потребление продукта l-го вида на $-\Delta Q_{jl}$, путем обмена $\Delta B_{jli} = -\Delta Q_{jl}$ с i-й ячейкой получит продукт k-го вида в количестве ΔA_{jki} и на эту же величину $\Delta Q_{jk} = \Delta A_{jki}$ увеличит его потребление. Условие выгодности такого обмена для j-й ячейки выражается неравенством $\Delta f_j > 0$. Принимая во внимание обменное отношение

(4), для обмена по схеме (см. рисунок) получим

$$\Delta f_j = \frac{\partial f_j}{\partial Q_{jk}} \Delta A_{jki} - \frac{\partial f_j}{\partial Q_{jl}} \Delta B_{jli} = \left(\frac{\partial f_j}{\partial Q_{jk}} \frac{z_{ilj}}{z_{jki}} - \frac{\partial f_j}{\partial Q_{jl}} \right) \Delta B_{jli}.$$

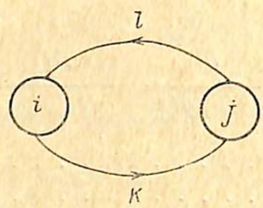
Условие $\frac{\partial f_j}{\partial Q_{jk}} \frac{z_{ilj}}{z_{jki}} - \frac{\partial f_j}{\partial Q_{jl}} > 0$ необходимо и достаточно для выгодности обмена с позиций j-й ячейки. Сопоставляя его с необходимым и достаточным условием $\frac{\partial f_i}{\partial Q_{il}} \frac{z_{jki}}{z_{ilj}} - \frac{\partial f_i}{\partial Q_{ik}} > 0$ выгодности рассматриваемого обмена с позиций i-й ячейки, сформулируем следующее утверждение.

Утверждение 3. Выполнение неравенств

$$\frac{\partial f_j/\partial Q_{jl}}{\partial f_j/\partial Q_{jk}} < \frac{z_{ilj}}{z_{jki}} < \frac{\partial f_i/\partial Q_{il}}{\partial f_i/\partial Q_{ik}} \tag{10}$$

необходимо и достаточно для взаимовыгодности обмена по схеме, указанной на рисунке.

Процесс обменной оптимизации для j-й ячейки сводится к выявлению такой пары продуктов и такой ячейки-партнера, для которых обмен



взаимовыгоден; к развитию обмена — увеличению обмениваемых количеств продуктов — до тех пор, пока выполняется (10) или пока ячейки располагают продаваемыми продуктами; к выявлению другой пары продуктов и партнера и т. д. При определенных правилах ценообразования обменная оптимизация может включать и определение взаимовыгодного обменного отношения. При рассмотрении обменной связи обозначим

$$\xi = \frac{z_{ilj}}{z_{jki}}. \tag{11}$$

4. ОБМЕН ПРИ ВНУТРЕННЕ ОПТИМАЛЬНЫХ СОСТОЯНИЯХ ЯЧЕЕК

Если состояния ячеек внутренне оптимальны, то условия (10) при использовании равенств (7), подразумевающих производство продуктов обоих видов обеими ячейками, примут вид

$$\frac{T_{jk}}{T_{jl}} < \xi < \frac{T_{ik}}{T_{il}}. \tag{12}$$

Если приобретаемый продукт i-й ячейкой не производится, то, согласно (8), $\partial f_i / \partial Q_{ik} : \partial f_i / \partial Q_{il} \geqslant T_{il} / T_{ik}$.

Мы пришли к следующим утверждениям.

Утверждение 4. Если состояния ячеек внутренне оптимальны и каждая ячейка производит продукт обоих видов, то необходимое и достаточное условие взаимовыгодности обмена по схеме, приведенной на рисунке, не зависит от целевых функций и выражается через производительности неравенствами (12).

Утверждение 5. Если состояния ячеек внутренне оптимальны и каждая ячейка производит продаваемый продукт, то условия (12) необходимы для взаимовыгодности обмена.

После обмена, описанного в разд. 3, в результате которого j-я ячейка в соответствии с (4), (11) получает продукт k-го вида в количестве

$$\Delta A_{jki} = \xi \Delta B_{jli}, \tag{13}$$

ее состояние в общем случае окажется неоптимальным. Переход к новому внутренне оптимальному состоянию, если оба продукта производятся, можно представить состоящим из двух этапов: Первый — переход к старому составу потребления, для чего должно быть увеличено производство и потребление продукта l-го вида на $\Delta D_{jl} = \Delta B_{ilj}$ и уменьшено производство и потребление продукта k-го вида на $-D_{jk} = \Delta A_{jki}$. Если в исходном состоянии расходовался ресурс в количестве $X_j^{(0)}$, в новом с тем же составом потребления — в количестве $X_j^{(1)}$, то величина

$$\Delta X_j = X_j^{(0)} - X_j^{(1)} = -(\Delta x_{jl} + \Delta x_{jk}) = -\frac{\Delta B_{jli}}{T_{jl}} + \frac{\Delta A_{jki}}{T_{jk}} \tag{14}$$

представляет снижение расхода ресурса при фиксированном составе потребления. С учетом (13)

$$\Delta X_j = \left(-\frac{1}{T_{jl}} + \xi \frac{1}{T_{jk}}\right) \Delta B_{jli}. \tag{15}$$

или

$$\Delta X_j = \left(\frac{1}{T_{jk}} - \frac{1}{\xi} \frac{1}{T_{jl}}\right) \Delta A_{jki}. \tag{16}$$

Вследствие (12) $\Delta X_j > 0$.

Второй этап перехода — распределение ресурса ΔX_j на производство продуктов для собственного потребления. Часть его в силу оговоренной непрерывности первых производных функций (1) и в предположении единственности решения задачи (6) пойдет на увеличение производства (если оно существовало и до возникновения обмена) продукта l-го вида. Следовательно, в итоге обмена и последующей внутренней оптимизации производство продаваемого продукта увеличится. Производство приобретаемого продукта изменится на величину

$$\Delta D_{jk} = -\Delta A_{jki} + \Delta D_{jk}^{*}, \tag{17}$$

где ΔD_{jk}^{*} — прирост производства продукта k-го вида, вызванный использованием части выигранного ресурса ΔX_j. Так как заведомо $\Delta D_{jk}^{*} \leqslant T_{jk} \Delta X_j$, то из (17) с учетом (14) следует, что $\Delta D_{jk} \leqslant -\Delta A_{jki} + T_{jk} \Delta X_j = -\frac{T_{jk}}{T_{jl}} \Delta B_{jli} < 0$. Следовательно, производство приобретаемого продукта уменьшится.

Запишем последние результаты в виде двух утверждений.

Утверждение 6. Если ячейка производит приобретаемый продукт и возникновение или увеличение обмена сопровождается внутренней оптимизацией, то производство приобретаемого продукта обязательно уменьшится.

Утверждение 7. Если до возникновения обмена существовало производство продаваемого продукта, то в условиях утверждения 6 его производство обязательно увеличится.

5. ВЫИГРЫШ ЯЧЕЙКИ И СИСТЕМЫ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОБМЕНА

Из постановки задачи следует, что непосредственным измерителем выигрыша ячейки выступает приращение величины ее целевой функции. Иметь дело с этим измерителем нецелесообразно по двум причинам. Во-первых, весьма проблематично его использование как практического измерителя. Во-вторых, определение выигрыша системы по выигрышам ячеек в этом случае невозможно без рассмотрения дополнительных факторов, сильно усложняющих анализ поставленной задачи.

Примем за измеритель выигрыша, получаемого ячейкой в результате обмена, количество высвобождающегося ресурса при зафиксированном на исходном (предшествующем возникновению обменной связи) уровне значении целевой функции, полагая состояние ячейки внутренне оптимальным. Выигрыш системы определим как сумму выигрышей ячеек. Если в различных внутренне оптимальных состояниях ячейки одинаков набор производимых продуктов, то при единственности решения задачи (6) неизменной величине целевой функции отвечает неизменный состав потребления. Выигрыш от увеличения количеств обмениваемых продуктов дается при этом выражениями (15) или (16). При неизменном обменном отношении обе ячейки заинтересованы в развитии обмена по крайней мере до тех пор, пока справедливы выражения (15) или (16) для их выигрыша. В силу утверждения 6 развитие обмена приведет к прекращению производства приобретаемого продукта одной или обеими ячейками. Если, к примеру, первой прекратила производство j-я ячейка, то ее выигрыш на этой стадии развития обмена

$$\Delta X_j = \left(\frac{1}{T_{jk}} - \frac{1}{\xi}\frac{1}{T_{jl}}\right) D_{jk}^{(0)}, \tag{18}$$

выигрыш i-й ячейки

$$\Delta X_i = \left(-\frac{1}{T_{ik}} + \frac{1}{\xi}\frac{1}{T_{il}}\right) D_{jk}^{(0)}, \tag{19}$$

так как в этом случае $\Delta A_{jki} = A_{jki} = D_{jk}^{(0)}$ (нулевой индекс — значение в исходном состоянии). Выигрыш системы

$$\Delta X = \Delta X_i + \Delta X_j = \left[\frac{1}{T_{jk}} - \frac{1}{T_{ik}} + \frac{1}{\xi}\left(\frac{1}{T_{il}} - \frac{1}{T_{jl}}\right)\right] D_{jk}^{(0)}. \tag{20}$$

При дальнейшем развитии обмена равенство (16), поскольку оно отражает высвобождение ресурса за счет сокращения производства приобретаемого продукта, теряет силу, поэтому перейдем к определению выигрыша ячейки в более общем случае, рассматривая развитие обмена и после прекращения производства приобретаемого продукта.

С позиций j-й ячейки обмен по схеме, приведенной на рисунке, можно трактовать как производство продукта k-го вида посредством затрат ресурса на изготовление продукта l-го вида. Величина

$$S_{jki} = \frac{A_{jki}}{B_{jli}/T_{jl}} = \xi T_{jl} \tag{21}$$

(см. (4), (11)) выступает как производительность ресурса при таком обменном производстве. Если развитие обмена не останавливается i-й ячейкой-партнером, то объем обменного производства определится оптимизационной задачей (6) (переписанной для j-й ячейки), в которой следует заменить величину T_{jk} на S_{jkl} и положить $A_{jki} = 0$. Такую оптимизационную задачу назовем конечной в отличие от исходной задачи (6). Конечная задача и определит внутренне оптимальное состояние j-й ячейки по окончании развития обмена. Так как в исходном состоянии $A_{jki} = 0$, две оптимизационные задачи различаются только величиной производительности по продукту k-го вида. В нашем примере j-я ячейка полностью переходит на обменное производство продукта k-го вида, в конечном оптимальном состоянии равенство из (7), соответствующее этому продукту, примет вид

$$\frac{\partial f_j}{\partial Q_{jk}} S_{jkl} = \varepsilon_j, \text{ или, по (21), } \frac{\partial f_j}{\partial Q_{jk}} \xi T_{jl} = \varepsilon_j.$$

Как следует из определения выигрыша ячейки, в конечном состоянии он представляет собой величину ΔX_j, компенсирующую изменение производительности $\Delta T_{jk} = S_{jkl} - T_{jk}$, или изменение удельных затрат ресурса $\Delta\tau_{jk} = 1/S_{jkl} - 1/T_{jk}$ таким образом, что $\Delta F_j = 0$. Разложим приращение ΔF_j в ряд по степеням $\Delta\tau_{jk}$, ΔX_j до членов 2-го порядка относительно этих величин

$$\Delta F_j = \frac{\partial F_j}{\partial \tau_{jk}} \Delta\tau_{jk} - \frac{\partial F_j}{\partial X_j} \Delta X_j + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_j}{\partial \tau_{jk}^2} \Delta\tau_{jk}^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_j}{\partial X_j^2} \Delta X_j^2 - \frac{\partial^2 F_j}{\partial \tau_{jk} \partial X_j} \Delta\tau_{jk} \Delta X_j. \tag{22}$$

Если в последнее равенство подставить ΔX_j, определяемое по (18), или с учетом (21) $\Delta X_j = -D_{jk}^{(0)\prime} \Delta\tau_{jk}$, то с использованием (9) получим: $\Delta F_j = \frac{1}{2} \varepsilon_j \frac{A_{jk}}{A_j} \Delta\tau_{jk}^2$. Это означает, что при достаточно малом $\Delta\tau_{jk}$, когда можно пренебречь членами второго порядка в (22) по сравнению с компенсируемым слагаемым $(\partial F_j / \partial\tau_{jk}) \Delta\tau_{jk}$, т. е. при

$$\Delta\tau_{jk} \ll \frac{2D_{jk}^{(0)} A_j}{A_{jk}} \tag{23}$$

можно считать $\Delta F_j = 0$. Таким образом, при условии (23) количество ресурса (18) измеряет выигрыш j-й ячейки в конечном состоянии. Мы пришли к следующему утверждению.

Утверждение 8. Если развитие обмена прекращается j-й ячейкой, то при малом различии между обменной производительностью и производительностью собственного производства по приобретаемому ею продукту выигрыш ячеек в конечном состоянии близок к величинам (18), (19), а выигрыш системы — к величине (20).

6. СОПОСТАВЛЕНИЕ ПРИНЦИПА ВЗАИМОВЫГОДНОСТИ С КРИТЕРИЕМ СИСТЕМЫ

Обмен целесообразен с позиций системы, если выигрыш $\Delta X > 0$. Обменное отношение, дающее в конечном состоянии наибольшую величину выигрыша, т. е. представляющее для обменной связи (рисунок) решение оптимизационной задачи

$$\max_{\xi} \Delta X, \tag{24}$$

оптимально по критерию системы. Выигрыш системы на любой стадии развития обмена по отношению к исходному состоянию на основании (14) и (3)

$$\Delta X = \left(\frac{1}{T_{jk}} - \frac{1}{T_{ik}}\right) A_{jki} + \left(\frac{1}{T_{il}} - \frac{1}{T_{jl}}\right) A_{ilj}^{\bullet}, \tag{25}$$

для конечного состояния, если развитие обмена останавливается j-й ячейкой,

$$\Delta X = \left[\frac{1}{T_{jk}} - \frac{1}{T_{ik}} + \frac{1}{\xi}\left(\frac{1}{T_{il}} - \frac{1}{T_{jl}}\right)\right] A_{jki}^{\bullet}, \tag{26}$$

и если развитие обмена останавливается i-й ячейкой

$$\Delta X=\left[\xi\left(\frac{1}{T_{jk}}-\frac{1}{T_{ik}}\right)+\left(\frac{1}{T_{il}}-\frac{1}{T_{jl}}\right)\right]A^{*}_{ilj}. \tag{27}$$

Звездочкой помечены соответствующие величины по окончании развития обмена.

Как мы уже выяснили $A^{*}_{jki}\approx D^{(0)}_{jk}$, если развитие обмена останавливается j-й ячейкой, и $A^{*}_{ilj}\approx D^{(0)}_{il}$ — во втором случае. На этом основании пренебрежем далее зависимостью A^{*}_{jki} или A^{*}_{ilj} от ξ. Неравенства

$$T_{ik}<T_{jk},\qquad T_{il}>T_{jl} \tag{28}$$

в силу (12) несовместны. Это значит, что обмен по схеме, приведенной на рисунке, не может возникнуть на основе взаимовыгодности, если у обеих ячеек производительность по приобретаемому продукту выше, чем у ячейки-партнера. Такой обмен неоправдан и с позиций системы, так как при (28) в силу (25) $\Delta X<0$. Возможны еще три сочетания производительностей

$$T_{ik}>T_{jk},\qquad T_{il}<T_{jl}, \tag{29}$$

$$T_{ik}<T_{jk},\qquad T_{il}<T_{jl}, \tag{30}$$

$$T_{ik}>T_{jk},\qquad T_{il}>T_{jl}. \tag{31}$$

Случай (29) характерен тем, что производительность по продаваемому продукту у каждой ячейки выше, чем у ячейки-партнера. Будем в этом случае называть ячейки равноразвитыми. В остальных двух случаях одна из ячеек имеет более высокую производительность по обоим обмениваемым продуктам. Эту ячейку будем называть развитой, ее партнера — отсталой, а саму ситуацию — обменом между неравноразвитыми ячейками.

Перейдем к анализу задачи (24). Выберем любое обменное отношение ξ_0, удовлетворяющее условию взаимовыгодности, и представим себе, что развитие обмена закончилось. Для равноразвитых ячеек, если развитие обмена остановлено j-й ячейкой, из (29) и (26) видно, что уменьшение обменного отношения по сравнению с ξ_0 увеличит выигрыш системы. Наряду с увеличением ΔX в силу (4) и (11) и неизменности A^{*}_{jki} возрастет количество продукта l-го вида, приобретаемое i-й ячейкой. При дальнейшем уменьшении ξ i-я ячейка прекратит производство этого продукта. Аналогичное рассуждение приведет к прекращению производства продукта k-го вида j-й ячейкой, если первой при отношении ξ_0 развитие обмена остановит i-я ячейка. Это произойдет, как видно из (27), при увеличении обменного отношения. Таким образом, в оптимальном с позиций системы состоянии $A^{*}_{jki}\approx D^{(0)}_{jk}$, $A^{*}_{ilj}\approx D^{(0)}_{il}$, следовательно, в случае (29) $\xi_{\text{опт}}\approx D^{(0)}_{jk}/D^{(0)}_{il}$. Сопоставление этого равенства с условиями (12) показывает, что при выполнении неравенства $D^{(0)}_{jk}/D^{(0)}_{il}<T_{jk}/T_{jl}$ или неравенства $D^{(0)}_{jk}/D^{(0)}_{il}>T_{ik}/T_{il}$ оптимальная цена невзаимовыгодна. Рассуждения по такому же плану для случаев (30) и (31) обмена между неравноразвитыми ячейками приводят к отрицательному обменному отношению и к состоянию, когда одна (развитая) ячейка передает другой (отсталой) оба продукта. Во всех случаях при оптимальном обменном отношении прекращается производство приобретаемых продуктов и выигрыш системы дается выражениями

$$\Delta X = \begin{cases} \left(\frac{1}{T_{jk}} - \frac{1}{T_{ik}}\right) D_{jk}^{(0)} + \left(\frac{1}{T_{il}} - \frac{1}{T_{jl}}\right) D_{il}^{(0)} & \text{при } T_{ik} > T_{jk},\ T_{il} < T_{jl}, \\ \left(\frac{1}{T_{ik}} - \frac{1}{T_{jk}}\right) D_{ik}^{(0)} + \left(\frac{1}{T_{il}} - \frac{1}{T_{jl}}\right) D_{il}^{(0)} & \text{при } T_{ik} < T_{jk},\ T_{il} < T_{jl}, \\ \left(\frac{1}{T_{jk}} - \frac{1}{T_{ik}}\right) D_{jk}^{(0)} + \left(\frac{1}{T_{jl}} - \frac{1}{T_{il}}\right) D_{jl}^{(0)} & \text{при } T_{ik} > T_{jk},\ T_{il} > T_{jl}. \end{cases}$$

В двух последних случаях $\xi_{\text{опт}}$ отрицательно и, следовательно, не удовлетворяет необходимым условиям (12) взаимовыгодности обмена.

7. ОБМЕН ПРОДУКТА НА РЕСУРС

До сих пор речь шла об обмене продуктами; для цен z_{ilj}, z_{jkl} определялось только их отношение (4). Допуская возможность передачи ресурса между ячейками, определим цену

$$z_{ilj} = \frac{X_{ilj}}{A_{ilj}} \tag{32}$$

как количество ресурса, передаваемого i-й ячейкой за единицу продукта l-го вида, получаемого от j-й ячейки. Обмен продуктами по схеме, приведенной на рисунке, можно представить как частный случай двух обменов продукта на ресурс, а именно, при передаче обеими ячейками одинаковых количеств ($X_{ilj} = X_{jki}$) ресурса. При этом, согласно (3), (4) и (32), $A_{jki} / A_{ilj} = z_{ilj} / z_{jki} = \xi$.

Получая от j-й ячейки количество продукта A_{ilj} и передавая ей ресурс X_{ilj}, i-я ячейка получает за счет сокращения собственного производства продукта l-го вида на A_{ilj} выигрыш $\Delta X_i = \left(\frac{1}{T_{il}} - z_{ilj}\right) A_{ilj}$. Необходимое (и достаточное при наличии собственного производства продукта l-го вида) условие выгодности обмена для i-й ячейки $z_{ilj} < 1 / T_{il}$. Отдавая продукт и получая ресурс, j-я ячейка от рассматриваемого обмена выигрывает $\Delta X_j = \left(z_{ilj} - \frac{1}{T_{jl}}\right) A_{ilj}$. При условии, что j-я ячейка сама производит продаваемый продукт, необходимое и достаточное условие выгодности для ее обмена $z_{ilj} > 1 / T_{jl}$. Необходимое (и достаточное при наличии собственного производства продукта l-го вида обеими ячейками) условие взаимовыгодности обмена

$$\frac{1}{T_{jl}} < z_{ilj} < \frac{1}{T_{il}}. \tag{33}$$

Мы пришли к следующему утверждению.

Утверждение 9. Соблюдение принципа взаимовыгодности при обмене продукта на ресурс приводит к передаче продукта ячейкой с более высокой производительностью ячейке с меньшей производительностью по данному продукту.

Выигрыш системы

$$\Delta X = \Delta X_i + \Delta X_j = \left(\frac{1}{T_{il}} - \frac{1}{T_{jl}}\right) A_{ilj}, \tag{34}$$

т. е. независимо от цены системой выигрывается ресурс, равный разнице его затрат при производстве передаваемого продукта в приобретающей и продающей ячейках. Сопоставление (34) при выполнении условия $\Delta X > 0$ целесообразности обмена с позиций системы с условием взаимовыгодности (33) свидетельствует о справедливости следующих выводов.

Утверждение 10. При наличии у обеих ячеек собственного производства передаваемого продукта: а) любой взаимовыгодный обмен целесообразен, б) существует цена, при которой любой целесообразный обмен взаимовыгоден.

При выполнении для i-й ячейки условия (23), где принимается $\Delta\tau_{il} = 1 / T_{il} - z_{ilj}$, выигрыш системы в конечном состоянии максимален и дается равенством (34) при $A_{ilj} = D_{il}^{(0)}$.

8. АНАЛИЗ СОГЛАСОВАННОСТИ ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫХ ЦЕН С ПРИНЦИПОМ ВЗАИМОВЫГОДНОСТИ

Пропорциональной назовем такую цену, отношение которой к затратам ресурса на производство продаваемого продукта есть величина фиксированная, т. е. $z_{ilj} = L\tau_{il}$, $z_{jki} = L\tau_{ik}$, где L — одинаковый для всех обменных связей коэффициент. Сначала рассмотрим обмен продуктами. Для пропорциональных цен обменное отношение (11)

$$\xi = \frac{\tau_{jl}}{\tau_{ik}} = \frac{T_{ik}}{T_{jl}}, \tag{35}$$

т. е. однозначно определяется затратами или производительностями ресурса. Подставляя (35) в необходимые условия взаимовыгодности обмена (12), получим неравенства

$$\frac{T_{jk}}{T_{jl}} < \frac{T_{ik}}{T_{jk}} < \frac{T_{ik}}{T_{il}}, \tag{36}$$

которые дают необходимые условия

$$T_{il} < T_{jl}, \quad T_{ik} > T_{jk} \tag{37}$$

допустимости пропорциональных цен при взаимовыгодном обмене. Из сопоставления (37) с (29), (30), (31) вытекает

Утверждение 11. При обмене продуктами между неравноразвитыми ячейками пропорциональные цены не обеспечивают взаимовыгодного обмена, т. е. несовместны с принципом взаимовыгодности.

Остановимся на этой ситуации. Для определенности выберем случай (31). Условие (12) запишем в виде

$$\frac{T_{jk}}{T_{jl}} < \frac{T_{ik}}{(p+1)\,T_{jl}} < \frac{T_{ik}}{T_{il}}. \tag{38}$$

Коэффициент p характеризует отклонение цен от пропорциональных: из сопоставления с (36) видно, что значение $p = 0$ соответствует пропорциональным ценам. Из неравенств (38) и учетом (31) имеем

$$0 < \frac{T_{il}}{T_{jl}} - 1 < p < \frac{T_{ik}}{T_{jk}} - 1. \tag{39}$$

Цены отклоняются от пропорциональных «в пользу» i-й ячейки, так как $p > 0$ и, следовательно, $\xi = T_{jk} / (p+1) T_{jl} < \tau_{jl} / \tau_{ik}$. Выражение «в пользу» подчеркивает, что i-я (развитая) ячейка либо продает продукт k-го вида по цене выше пропорциональной, либо покупает продукт l-го вида по цене ниже пропорциональной. Но это выражение употреблено условно, так как в силу взаимовыгодности обмена обе ячейки выигрывают.

Экономическое объяснение этого факта, кажущегося парадоксальным, сводится к конкретизации производительностей, по отношению к которым рассматривается пропорциональность цен. Дело в том, что пропорциональная цена на продукт k-го вида, который приобретается j-й (отсталой) ячейкой, определяется производительностью T_{ik} i-й ячейки-изготовителя, а она выше производительности T_{jk}. Для наглядности представим такую возможность: j-я ячейка сама производит оба продукта и осуществляет внутренний обмен по пропорциональным «внутренним» ценам $z_{jkj} = L\frac{1}{T_{jk}}$, $z_{jlj} = L\frac{1}{T_{jl}}$. Продажа продукта l-го вида вовне также производится по пропорциональной цене $z_{ilj} = z_{jlj}$; так вот, внешняя цена $z_{jki} = L\frac{p+1}{T_{ik}}$, превосходящая при $p > 0$ пропорциональную, оказывается ниже внутренней пропорциональной цены z_{jkj}. Действительно, так как $T_{ik} > T_{jk}$ и в соответствии с правым из неравенств (39) $p + 1 < T_{ik} / T_{jk}$, то $z_{jki} = L\frac{p+1}{T_{ik}} < L\frac{1}{T_{jk}} = z_{jkj}$. Итак, при взаимовыгодном обмене продуктами цена, превосходящая пропорциональную, оказывается ниже внутренней пропорциональной цены отсталой ячейки-покупателя.

Рассмотрим обмен продукта на ресурс. Из определения понятия «пропорциональная цена» и (33) вытекают условия: $1 < L < T_{jl} / T_{il}$ на величину L, необходимые для взаимовыгодности рассматриваемого варианта обмена. Следовательно, соблюдение неравенств

$$1 < L < \min_{i,j,l}{}^{*} \frac{T_{jl}}{T_{il}} \tag{40}$$

необходимо для того, чтобы любая обменная связь, целесообразная с позиций системы, была взаимовыгодна. (Звездочкой отмечено условно, что перебор ведется только по отношениям, превосходящим единицу.)

Пропорциональность цен, если даже назначенный с соблюдением (40) коэффициент L обеспечивает взаимовыгодность всех целесообразных обменных связей, не согласуется как с принципом равной рентабельности, так и с принципом равной прибыли (принцип «фифти – фифти» [3, стр. 212]). Рентабельность обмена (отношение выигранного ресурса к отданному или вложенному в отдаваемый продукт) для i-й ячейки $r_i = \Delta X_i / X_{ilj}$, для j-й $r_j = T_{jl}\Delta X_j / A_{ilj}$. Из равенства $r_i = r_j$ вытекает выражение для цены $z_{ilj} = 1 / \sqrt{T_{il}T_{jl}}$. Принцип равной прибыли (в нашем случае равного выигрыша) $\Delta X_i = \Delta X_j$ дает цену $z_{ilj} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{T_{il}} + \frac{1}{T_{jl}}\right)$. В обоих случаях цена определяется производительностями по обмениваемому продукту обеих ячеек. Пропорциональная же цена, по определению, связана только с производительностью ячейки, продающей продукт.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. Ф. Дидерихс, О. А. Гусев. К вопросу о соотношениях затрат, эффекта и цен. Экономика и матем. методы, 1969, т. V, вып. 5.
2. Р. Аллен. Математическая экономия. М., Изд-во иностр. лит., 1963.
3. Экономические проблемы повышения качества промышленной продукции. М., «Наука», 1969.

Поступила в редакцию
28 XI 1969