

КОМПРОМИССНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С НЕСКОЛЬКИМИ ЦЕЛЕВЫМИ ФУНКЦИЯМИ

М. И. ТАММ

(Таллин)

В [1] предлагается основанный на теоретико-игровой модели способ для нахождения так называемого оптимального компромиссного решения задачи линейного программирования с несколькими целевыми функциями. Такое решение является оптимальным компромиссом между оптимальными относительно разных целевых функций решениями задачи.

Геометрически компромиссное решение [1] представляется точкой на гиперплоскости, натянутой на те вершины многогранника ограничений, которые соответствуют разным оптимальным решениям многоцелевой задачи. Эта точка в общем находится внутри многогранника и притом довольно далеко от граней его. Это значит, что из всех ресурсов останутся довольно большие остатки. Так как способ [1] нашел уже применение [2], то целесообразно показать, как для многоцелевой задачи линейного программирования получить такое компромиссное решение задачи, которое, являясь опорным решением задачи, удовлетворяет, по возможности, одинаково хорошо всем критериям задачи. Для поставленной в [1, стр. 405—406] проблемы найдем такие допустимые решения, при которых максимальное отклонение по отношению ко всем критериям оптимальности является меньшим, чем в случае оптимальной компромиссной программы. Пусть требуется решить многоцелевую задачу

$$C_i^T X \rightarrow \max, \quad i = 1, \dots, s, \quad (1)$$

при условиях

$$AX = b, \quad X \geq 0. \quad (2)$$

Прежде всего решим s задач, оптимизируя по одному критерию из (1). Распираем предположение из [1, стр. 400] в том смысле, что разрешаем кроме положительности и отрицательность максимальных значений целевых функций. Обозначим: $\max C_i^T X = M_i$, $i = 1, \dots, s$. Пусть $M_i > 0$, $i = 1, \dots, p$, и $M_i < 0$, $i = p + 1, \dots, s$. Сформулируем $s + 1$ -ю задачу. Найти такое X , которое удовлетворяет условиям (2) и

$$\frac{M_i - C_i^T X}{|M_i|} \leq w, \quad i = 1, \dots, s, \quad (3)$$

и минимизирует w , $w \rightarrow \min$.

Решение такой одноцелевой задачи линейного программирования даст минимальный общий верхний предел w для относительных отклонений от всех s максимальных значений целевых функций, полученных реше-

нием s одноцелевых задач, и тем самым в некотором компромиссном смысле решает поставленную (1) и (2) многоцелевую задачу. Предложенный способ можно распырить и на случай $M_i = 0$, но тогда отчасти утратится наглядность соотношения (3). Если при некоторых $i \in \{1, \dots, s\}$ $M_i = 0$, то знаменатель в (3) возможно заменить на $|M_i^*| \neq 0$, где $M_i^* = \max_{k=1, \dots, i-1, i+1, \dots, s} C_i^T X_k$, где X_k — оптимальное решение k -й задачи и $\max$ берется только по таким k , при которых $C_i^T X_k \neq 0$. Так как при $M_i = 0$ значение $M_i^* < 0$, то (3) примет вид

$$\frac{-C_i^T X}{-M_i^*} \leq w. \quad (3a)$$

Сравним предложенный в [1] и наш способы решения многоцелевой задачи на примере, взятом из [3, стр. 110]: найти компромисс между максимальной валовой продукцией

$$x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \max$$

и максимальной прибылью

$$210x_1 + 480x_2 + 600x_3 \rightarrow \max$$

при ограничениях на ресурсы

$$\begin{aligned} 10x_1 + 23x_2 + 26x_3 &\leq 700, \\ 5x_1 + 13x_2 + 22x_3 &\leq 550, \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0, \\ 7x_1 + 9x_2 + 11x_3 &\leq 450. \end{aligned} \quad (4)$$

Решая одноцелевые задачи, получим

$$\begin{aligned} M_1 &= \max (x_1 + x_2 + x_3) = 64,3, \\ M_2 &= \max (210x_1 + 480x_2 + 600x_3) = 15\,900. \end{aligned}$$

Компромисс по [1] достигается на 88,6% от обоих максимальных значений M_1 и M_2 , причем относительные остатки ресурсов составляют 6; 31,4 и 6,6% соответственно. Решая теперь задачу — найти $w \rightarrow \min$ при условиях (4) и $x_1 + x_2 + x_3 + 64,3w \geq 64,3$, $210x_1 + 480x_2 + 600x_3 + 15\,900w \geq 15\,900$, получим предложенный нами компромисс: $w_{\min} = 0,056$, т. е. достигается 94,4% от обоих максимальных значений M_1 и M_2 , причем относительные остатки ресурсов составляют 0; 26,9 и 0,4% соответственно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Х. Юттлер. Линейная модель с несколькими целевыми функциями. Экономика и матем. методы, 1967, т. III, вып. 3.
2. Н. М. Журавель. Многоцелевая оптимизация статистической модели крупного технологического агрегата. В сб. Математические модели и методы в социально-экономических исследованиях. Вып. 4. Новосибирск, 1968. (ИЭиОПН СО АН СССР).
3. Р. О. Фергюсон, Л. Ф. Сарджент. Линейное программирование. Методы и применение. М., Госстатиздат, 1962.

Поступила в редакцию
13 X 1969