

ДИСКРЕТНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

ЗАДАЧИ НА КОНЕЧНЫХ МНОЖЕСТВАХ И БУЛЕВЫ МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

А. А. ФРИДМАН

(Москва)

Обычно для анализа экстремальных задач используется математический аппарат непрерывных величин. На этом пути получено много интересных и глубоких результатов. В то же время для анализа многих дискретных (экстремальных) комбинаторных задач естественно использовать идеи и аппарат дискретной математики, в частности математической логики. Ниже предлагается общая алгебро-логическая схема решения экстремальных задач на конечных множествах. Задачи такого сорта часто возникают в математической экономике, теории автоматов, теории вычислительных машин и теории управления. Идея предлагаемой схемы состоит в установлении связи между задачей поиска допустимого (локально-экстремального) объекта в конечной области и нахождением характеристической булевой функции этих объектов и ее минимального представления [1, 2].

Задачи на конечных множествах можно рассматривать и как задачи дискретного программирования с булевыми переменными. Но их большая размерность и часто нелинейность порождают значительные трудности при решении известными методами. Кроме того, к поиску всех локально-экстремальных объектов методы дискретного программирования, как правило, не приспособлены.

1. Пусть задано конечное множество элементов $E = \{e_1 \dots e_k\}$ и свойство P , которым обладают некоторые подмножества из E , называемые (в этом случае) P -множествами. Часто удобнее говорить не о подмножестве $T \subseteq E$, а о его характеристическом векторе $x^T = (x_1, \dots, x_k)$, где $x_i = 1$, если $e_i \in T$, и $x_i = 0$, если $e_i \notin T$. Очевидно, T и x^T однозначно определяют друг друга, причем $T = \bigcup_{i=1}^k x_i e_i$.

Определение 1. P -множество $T \subseteq E$ назовем минимальным (максимальным), если в нем не содержится (его не содержит) никакое другое P -множество.

Определение 2. P -множество $T \subseteq E$ назовем абсолютно минимальным (максимальным), если не существует P -множества с меньшим (большим) числом элементов, чем в T .

Очевидно, абсолютно минимальное (максимальное) P -множество является одновременно минимальным (максимальным) P -множеством.

2. Пусть далее свойство P — булево и позитивно, т. е. множество обладает свойством P тогда и только тогда, когда его характеристический вектор $x = (x_1, \dots, x_k)$ удовлетворяет системе позитивных (не содержащих отрицаний переменных) булевых уравнений [2] $\varphi_i(x) = 1$, $i = 1, \dots, s$,

или, что то же самое, одному позитивному булеву уравнению

$$\varphi(x) = \bigwedge_1^s \varphi_i(x) = 1. \quad (1)$$

Тогда, очевидно, если T — P -множество, то таковым будет и любое множество, содержащее T . Поэтому естественно возникает задача о нахождении всех минимальных (в частности, абсолютно минимальных) P -множеств из E .

Теорема 1. $\varphi(x^0) = 1$ тогда и только тогда, когда $T_0 = \bigcup_1^k x_i^0 e_i$ является P -множеством.

Доказательство очевидно, поскольку уравнение (1) равносильно системе уравнений $\varphi_i(x) = 1, i = 1, \dots, s$.

Следствие. Совокупность всех P -множеств из E совпадает с классом всех множеств T_x , характеристические векторы которых являются решениями уравнения (1).

Итак, для нахождения P -множеств надо уметь решать уравнение (1). Поэтому естественно, чтобы функция $\varphi(x)$, являющаяся монотонной, была записана (представлена) в достаточно удобной и простой форме. Таковой является ее минимальная дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ)

$$(1). \text{ Пусть } \varphi_M(x) \text{ — минимальная ДНФ для } \varphi(x), \text{ т. е. } \varphi_M(x) = \bigvee_1^r K_i,$$

где $K_i = x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_{h(i)}}$. Очевидно, (1) равносильно уравнению

$$\varphi_M(x) = \bigvee_1^r K_i = 1. \quad (2)$$

Определение 3. Решение x^0 уравнения (2) назовем минимальным, если в (2) найдется такая элементарная конъюнкция K_i , что

$$x_j^0 = \begin{cases} 1, & \text{если } j \in \{i_1, i_2, \dots, i_{h(i)}\}, \\ 0 & \text{— в противном случае,} \end{cases} \quad (3)$$

и будем говорить, что x^0 соответствует конъюнкции K_i .

Определение 4. Минимальное решение x^0 уравнения (2) назовем абсолютно минимальным, если, каково бы ни было минимальное решение x^1 ,

имеет место неравенство $\sum_1^k x_i^0 \leq \sum_1^k x_i^1$, т. е. число единичных компонент

в x^0 наименьшее по сравнению с другими минимальными решениями.

Лемма 1. Вектор x^0 является абсолютно минимальным решением (2) тогда и только тогда, когда соответствующая ему элементарная конъюнкция K_α имеет наименьшую длину среди остальных в (2).

Доказательство. Действительно, если минимальное решение x^0 и элементарная конъюнкция K_α соответствуют друг другу, то

$$\{i / x_i^0 = 1\} = \{i / x_i \in K_\alpha\},$$

отсюда, используя определение 4, легко получаем утверждение леммы.

Следующая теорема раскрывает смысл введения $\varphi_M(x)$.

Теорема 2. Вектор x^0 является минимальным решением уравнения (2) тогда и только тогда, когда $T_0 = \bigcup_1^k x_i^0 e_i$ — минимальное P -множество.

Доказательство. а) Пусть x^0 — минимальное решение уравнения (2) и K_i — соответствующая ему элементарная конъюнкция. Покажем, что $T_0 = \bigcup_1^k x_j^0 e_j$ — минимальное P -множество. В силу теоремы 1 T_0 является P -множеством. Допустим, что оно не минимальное, т. е. имеется такое P -множество T_1 , что

$$T_1 \subset T_0. \quad (4)$$

Пусть $x^1 = (x_1^1, \dots, x_k^1)$ — характеристический вектор для T_1 , т. е. $T_1 = \bigcup x_i^1 e_i$. Тогда из (4) имеем

$$\{j / x_j^1 = 1\} \subset \{j / x_j^0 = 1\}. \quad (5)$$

Поскольку T_1 — P -множество, то по теореме 1 вектор x^1 является решением уравнения (1) и, следовательно, (2). Поэтому в (2) найдется элементарная конъюнкция K_α , которая при $x = x^1$ принимает значение 1. Это означает, что

$$\{j / x_j \in K_\alpha\} \subseteq \{j / x_j^1 = 1\}. \quad (6)$$

Так как x^0 и K_i соответствуют друг другу, то из (5) и (6) получаем $\{j / x_j \in K_\alpha\} \subset \{j / x_j^0 = 1\} = \{j / x_j \in K_i\}$, а это означает, что $K_\alpha \subset K_i$ и, следовательно, в минимальном ДНФ $\Phi_M(x)$ возможно поглощение, что противоречит определению минимальной ДНФ. Поэтому предположение о неминимальности T_0 неверно, т. е. T_0 — минимальное P -множество.

б) Пусть теперь T_0 — минимальное P -множество, а x^0 — его характеристический вектор. Покажем, что x^0 — минимальное решение уравнения (2). Так как T_0 — P -множество, то по теореме 1 x^0 — решение уравнения (1), а значит и (2). Поэтому в (2) найдется элементарная конъюнкция K_i , которая при $x = x^0$ принимает значение 1. Это означает, что

$$\{j / x_j \in K_i\} \subseteq \{j / x_j^0 = 1\}. \quad (7)$$

Если эти два множества индексов совпадают, то x^0 — минимальное решение и доказательство теоремы завершено. Если же в (7) имеет место строгое включение, то рассмотрим вектор x^1 , где

$$x_j^1 = \begin{cases} 1, & \text{если } x_j \in K_i; \\ 0 & \text{— в противном случае.} \end{cases} \quad (8)$$

Очевидно, множество $T_1 = \bigcup_1^k x_j^1 e_j$ в силу (7) и (8) является истинным подмножеством T_0 , т. е. $T_1 \subset T_0$. Согласно (8) вектор x^1 является решением уравнения (2), а следовательно, и (1). Тогда в силу теоремы 1 T_1 является P -множеством, откуда в силу $T_1 \subset T_0$ получаем, что T_0 не минимальное P -множество вопреки условию. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

С л е д с т в и е. Формулируемые ниже утверждения эквивалентны: а) вектор x^0 — абсолютно минимальное решение уравнения (2); б) конъюнкция K_α , соответствующая вектору x^0 , имеет наименьшую длину среди

льных в (2); в) P -множество $T_0 = \bigcup_1^k x_i^0 e_i$, соответствующее вектору x^0 , абсолютно минимальное.

Доказательство непосредственно вытекает из леммы 1, теоремы 2, определений 1–4 и того факта, что число элементов в T_0 равно $\sum_{i=1}^k x_i^0$.

Теорема 2 и ее следствие дают метод решения задачи о нахождении всех минимальных (в частности, абсолютно минимальных) P -множеств из E . Для этого надо по свойству P построить его характеристическую функцию $\varphi(x)$, затем найти ее минимальную ДНФ $\varphi_m(x)$. Элементарные конъюнкции K_α из $\varphi_m(x)$ однозначно определяют все минимальные решения (2) и, следовательно, все минимальные P -множества. Элементарные конъюнкции из $\varphi_m(x)$ наименьшей длины определяют все абсолютно минимальные P -множества, число элементов в которых будет, естественно, одно и то же.

В качестве примера приведем одну из наиболее известных задач теории графов, имеющую различные приложения. Пусть задана сеть E пунктов $v_i, i = 1, \dots, k$, между которыми имеются ориентированные связи — коммуникации (дороги, телесвязь, отношение подчинения, информационная связь и т. д.). Эти связи удобно задавать матрицей a_{ij} , где

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если из } v_i \text{ в } v_j \text{ есть связь,} \\ 0 & \text{— в противном случае.} \end{cases}$$

Математический моделью такой сети со связями будет конечный ориентированный граф $G = (V, U)$, где V — множество вершин (пунктов), а U — множество дуг (связей), причем дуга u_{ij} идет из v_i в v_j , если в сети E имеется «связь» из v_i в v_j . Предположим, что мы хотим выбрать такое «базовое» подмножество пунктов T , чтобы в сети имела «связь» из T во все оставшиеся пункты $E \setminus T$. Естественно желание найти все такие подмножества и даже минимальные по числу пунктов. В связи с этим для графа G возникает задача нахождения таких множеств T вершин, чтобы в любую, не входящую в T вершину, шла дуга из T . В теории графов эти подмножества вершин называются доминирующими или покрытиями. Итак, роль P -множеств у нас будут играть покрытия графа G . Очевидно, для нахождения всех покрытий графа достаточно найти все его минимальные (в смысле определения 1) покрытия. Для применения нашей схемы остается установить вид функции $\varphi(x)$. Легко видеть, что множество вершин T будет покрытием тогда и только тогда, когда его характеристический вектор $x^T = (x_1, \dots, x_k)$ удовлетворяет условию: если $x_j = 0$, то найдется такое i , что $a_{ij} = x_i = 1$.

Очевидно, сформулированное условие равносильно следующему: $x_j \vee (\bigvee_{i=1}^k a_{ij} x_i) = 1$ для каждого $j = 1, \dots, k$. Последнее уравнение удобнее записать в виде

$$\bigvee_{i=1}^k a'_{ij} x_i = 1, \quad \text{где } a'_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & \text{если } i \neq j, \\ 1, & \text{если } i = j. \end{cases}$$

Итак, система булевых уравнений, описывающих покрытие графа G , имеет вид $\varphi_j(x) = \bigvee_{i=1}^k a'_{ij} x_i = 1$, а (1) соответственно: $\varphi(x) = \bigwedge_{j=1}^k \bigvee_{i=1}^k a'_{ij} x_i = 1$.

3. Пусть теперь P -множество булево и негативно, т. е. его характеристический вектор $x = (x^1, \dots, x_k)$ удовлетворяет системе негативных (содержащих только отрицания переменных) уравнений $\varphi_i(x) = 1, i = 1,$

..., s , или, что то же самое, одному негативному булеву уравнению

$$\varphi(x) = \bigwedge \varphi_i(x) = 1. \quad (1')$$

Тогда, очевидно, если T — P -множество, то таковым будет и любое подмножество из T . Поэтому естественно возникает задача о нахождении всех максимальных (в частности, абсолютно максимальных) P -множеств из E . При этом оказывается, что для каждого утверждения (определения) из п.2 о минимальных P -множествах можно сформулировать и доказать соответствующее аналогичное утверждение (определение) о максимальных P -множествах, которые иногда не будут в силу ясности приводиться и будут называться, например, теоремой 1', уравнением (1') и т. д., где штрих означает «аналог».

Очевидно, в нашем случае минимальная ДНФ для $\varphi(x)$ имеет вид

$$\varphi_M(x) = \bigvee_1^r K_i, \text{ где } K_i = \bar{x}_{i_1} \bar{x}_{i_2} \dots \bar{x}_{i_{h(i)}}.$$

Приведем некоторые определения и утверждения о максимальных P -множествах.

Определение 3'. Решение x^0 уравнения (2') назовем максимальным, если в (2') найдется такая элементарная конъюнкция K_i , что

$$x_j^0 = \begin{cases} 0, & \text{если } j \in \{i_1, i_2, \dots, i_{h(i)}\}, \\ 1 & \text{— в противном случае,} \end{cases} \quad (2')$$

и будем говорить, что x^0 соответствует конъюнкции K_i .

Определение 4'. Максимальное решение x^0 уравнения (2') назовем абсолютно максимальным, если число единичных компонент в x^0 наибольшее по сравнению с другими максимальными решениями.

Лемма 1'. Вектор x^0 является абсолютно максимальным решением (2') тогда и только тогда, когда соответствующая ему элементарная конъюнкция K_α имеет наименьшую длину среди остальных в (2').

Теорема 2'. Вектор x^0 является максимальным решением уравнения (2') тогда и только тогда, когда $T_0 = \bigcup_1^k x_i^0 e_i$ — максимальное P -множество.

Из теоремы 2' и ее следствия вытекает общий метод решения задачи о нахождении всех максимальных (в частности, абсолютно максимальных) P -множеств из E , аналогичный описанному в п.2 для минимальных P -множеств.

4. Ниже в качестве примеров приводятся известные задачи на конечных множествах, которые можно решать по предложенной схеме, и в каждой из них выписывается (без вывода) вид соответствующей функции $\varphi(x)$.

Пусть $G = (V, U)$ — ориентированный граф с матрицей смежности вершин a_{ij} и $a_{ij}' = a_{ij} \vee \delta_{ij}$, где δ_{ij} — символ Кронеккера.

Задача 1. В графе G найти все минимальные внешне устойчивые множества. Здесь $E = V$, $\varphi(x) = \bigwedge_{i=1}^k \bigvee_{j=1}^n a_{ij}' x_j$.

Задача 2. В графе G найти все максимальные внутренне устойчивые множества. Здесь $E = V$, $\varphi(x) = \bigwedge_{ij/a_{ij}=1} (\bar{x}_i \vee \bar{x}_j)$.

Задача 3. В графе G найти все максимальные клики. Здесь $E = V$, $\varphi(x) = \bigwedge_{ij/a_{ij}=0} (\bar{x}_i \vee \bar{x}_j)$.

Задача 4. В графе $G = (V, R)$ с матрицей смежности ребер b_{ij} найти максимальные паросочетания. Здесь $E = R$, $\varphi(x) = \bigwedge_{ij/b_{ij}=1} (\bar{x}_i \bar{x}_j)$.

Задача 5. В двудольном графе $G = (V, \bar{V}; U)$, где $|V| = k$, $|\bar{V}| = n$, найти все минимальные накрытия [2]. Здесь $E = V$, $\varphi(x) = \bigwedge_{i=1}^k \bigvee_{j=1}^n a_{ij} x_i$.

Отметим также, что по этой же схеме решается известная задача о системах представителей, задача о раскраске вершин (ребер) графа, а небольшая модификация схемы позволяет решить и следующие [2] задачи: а) в графе G найти все элементарные контуры; б) в графе G найти минимальное количество дуг и сами дуги, после удаления которых из G получается граф без контуров; все такие минимальные множества дуг в G . Интересно отметить, что [3] решение задачи б) совпадает с решением задачи: по графу G найти минимальное количество дуг и сами дуги, изменение ориентации которых превращает G в граф без контуров, а также все такие минимальные множества дуг.

ЛИТЕРАТУРА

1. Труды Математического института им. В. А. Стеклова. Т. LI, М., 1958.
2. А. А. Фридман. Булевы методы и их приложения. В сб.: Труды Второй зимней школы по математическому программированию и смежным вопросам. Вып. 1. М., 1969.
3. Э. Я. Гринберг, Я. Я. Дамбит. Некоторые свойства графов, содержащих контуры. Латв. матем. ежегодник. Вып. 2. Рига, 1966.

Поступила в редакцию
11 III 1972