

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ЗАДАЧ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Г. А. КАПЛАН

(Сумгаит)

Как известно [1], все задачи целочисленного программирования могут быть разбиты на два класса по отношению к стандартным методам решения соответствующих задач линейного программирования.

1. Класс задач, каждый опорный план которых является целочисленным. Для решения задач этого класса можно применять методы решения соответствующих задач линейного программирования, например симплекс-метод, так как оптимальный план такой задачи линейного программирования будет заведомо целочисленным.

2. Класс задач, не все опорные планы которых являются целочисленными. При решении задач этого класса с помощью того же симплекс-метода приходится каким-либо образом ликвидировать возможность появления нецелочисленного оптимального плана (например, методом отсечения Гомори). Среди задач последнего класса существуют и такие [2] (обозначим их множество через S), решение которых можно проводить на основе симплекс-метода, дополнив его лишь условием целочисленности каждого следующего базиса.

Пусть многогранник условий некоторой задачи (назовем ее S -задачей) таков, что множество ребер выпуклой оболочки целочисленных опорных планов является подмножеством множества ребер многогранника условий. Другими словами, предполагаем, что любое ребро выпуклой оболочки множества целочисленных опорных планов является ребром многогранника условий.

Так как целевая функция монотонна на рассматриваемой выпуклой оболочке, ее локальный оптимум совпадает с глобальным и, начиная с некоторого целочисленного плана, можно достигнуть оптимума движением по многограннику условий лишь вдоль ребер выпуклой оболочки множества целочисленных опорных планов. Ведь разложение небазисных векторов по векторам базиса, определяющего некоторый фиксированный опорный план, дает возможность перехода к любому соседнему опорному плану; среди опорных планов, соседних с данным целочисленным опорным планом на многограннике условий, будут все целочисленные опорные планы, соседние с ним на выпуклой оболочке целочисленных опорных планов. Тогда измененный симплексный алгоритм (т. е. упрощенный алгоритм Гомори, или, как мы его будем называть, S -алгоритм) состоит в следующем: 1) определение $k/z_k - c_k = \max_j \{z_j - c_j\}$; 2) осуществление перехода к новому опорному плану, если он целочислен; 3) определение $k_1/z_{k_1} - c_{k_1} = \max_{j \neq k} \{z_j - c_j\}$, если план, рассмотренный в 2), — нецелочисленный, и т. д.

В качестве примера модели задачи, принадлежащей множеству S , можно указать систему ограничений

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \quad j = 1, \dots, n, \quad (1)$$

$$x_{ij} \leq x_{jj}, \quad j = 1, \dots, n, \quad i = 1, \dots, n, \quad i \neq j, \quad (2)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3)$$

Эта модель описана в [3], где в предположении целочисленности всех опорных планов сделан вывод о возможности получения оптимального целочисленного плана путем сравнения соседних целочисленных опорных планов. Несмотря на неточность исходной предпосылки, этот вывод совершенно справедлив, так как рассматриваемая задача принадлежит множеству S . Прежде всего заметим, что каждое ребро выпуклой оболочки множества целочисленных планов задачи (1)–(3) соединяет две целочисленные точки множества ненулевых компонент, которые отличаются не более чем одним элементом. Тогда можно сказать, что количества k_1 и k_2 ненулевых компонент вида x_{jj} в двух соседних крайних x' и x'' рассматриваемых точках выпуклой оболочки должны представляться по формулам

$$k_1 = s + s_1, \quad k_2 = s + s_2, \quad (4)$$

где s — количество одинаковых для обеих точек отличных от нуля компонент вида x_{jj} ; s_1 и s_2 независимо друг от друга принимают значения 0 или 1, а количество ненулевых компонент вида x_{ij} , $i \neq j$, в этих же точках представляется в виде

$$n - k_1 = l + l_1, \quad n - k_2 = l + l_2, \quad (5)$$

где l , l_1 , l_2 определены аналогично s , s_1 , s_2 , причем

$$s_1 + s_2 + l_1 + l_2 = 2. \quad (6)$$

Прежде всего покажем, что всякий допустимый целочисленный план является опорным, для чего подсчитаем количество соотношений вида (1)–(3), независимо обращающихся в равенство при подстановке в них некоторого допустимого целочисленного плана, содержащего n ненулевых компонент. При этом получим: n независимых равенств вида (1) (так как иначе план не являлся бы допустимым); $n^2 - n$ независимых равенств вида (3) (так как в допустимом целочисленном плане отличны от нуля n из общего числа n^2 переменных) и, наконец, $n - k$ независимых соотношений вида (2) (так как обращение в равенство соотношения при $x_{jj} = 0$, $x_{ij} = 0$ есть следствие этих двух равенств, и независимыми будут лишь те равенства вида (2), которые достигаются при $x_{ij} = 1$, $i \neq j$, которых будет столько же, сколько отличных от нуля компонент вида x_{ij} , $i \neq j$, т. е. $n - k$). Таким образом, общее число независимых равенств составляет: $n + n^2 - n + n - k = n^2 + n - k \geq n^2$. Следовательно [1], все целочисленные планы задачи (1)–(3) являются ее опорными планами [2, 4], причем кроме плана

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Все остальные планы вырожденные. Покажем, что всякое ребро выпуклой оболочки множества целочисленных планов есть ребро множества всех

планов задачи (1)–(3). С этой целью рассмотрим выпуклую линейную комбинацию двух целочисленных опорных планов

$$\bar{x}_{ij} = \alpha x'_{ij} + (1 - \alpha) x^2_{ij}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1, \quad (7)$$

где x^1 и x^2 — суть две соседние (на выпуклой оболочке множества целочисленных планов) точки, содержащие, как и прежде, соответственно k_1 и k_2 ненулевых компонент вида x_{jj} , причем эти опорные планы имеют s общих ненулевых компонент вида x_{ij} и l общих ненулевых компонент вида x_{ij} , $i \neq j$. Тогда план $\{x_{ij}\}$ обращает в равенство независимо друг от друга n соотношений вида (1)

$$n^2 - (s + s_1 + s_2 + l + l_1 + l_2) \quad \text{или, в силу (6), } n^2 - (s + l + 2)$$

соотношений вида (3) и, наконец, l соотношений вида (2). Заметим, что, как и при подсчете независимых равенств для доказательства опорности целочисленных планов, здесь учитываются лишь те равенства вида (2), которые достигаются при отличных от нуля значениях переменных.

Как известно [4], выпуклая линейная комбинация опорных планов задачи (1)–(3) будет независимым ребром, если количество R линейных соотношений типа равенства удовлетворяет неравенству $R \geq m - 1$, где m — количество переменных. В данном случае $m = n^2$; $R = n^2 + n - s - 2$. Но в силу очевидного неравенства $s \leq n - 1$, получим: $n + n^2 - s - 2 \geq s + 1 + n^2 - s - 2 = n^2 - 1$. Отсюда, точки x^1 и x^2 соединены ребром множества планов задачи (1)–(3). Следовательно, любые две целочисленные точки, являющиеся соседними крайними точками выпуклой оболочки множества целочисленных планов задачи (1)–(3), являются соседними крайними точками множества всех планов задачи (1)–(3).

Таким образом, показано, что задача оптимизации линейного функционала при ограничениях (1)–(3) является S -задачей. Заметим, что отличие рассматриваемой задачи от S -задачи, описанной в [2], состоит в том, что ограничения (1) — сугубо частные по отношению к ограничениям, рассмотренным в [2], в то время как ограничения (2) имеют специфический вид, не принадлежащий классу ограничений [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Корбут, Ю. Ю. Финкельштейн, Дискретное программирование, М., «Наука», 1969.
2. В. А. Трубин. О методе решения задач целочисленного программирования специального вида. Докл. АН СССР, 1969, т. 189, № 5.
3. Г. А. Каплан. Выбор структуры системы телемеханики для комплексов с сосредоточенными объектами. Экономика и матем. методы, 1966, т. II, вып. 3.
4. Д. Б. Юдин, Е. Г. Гольштейн. Линейное программирование. М., Физматгиз, 1963.

Поступила в редакцию
23 IX 1970