

Доказательство. Натянем на случайные величины $z_1, \dots, z_n$ линейное пространство и введем в него скалярное произведение: $(x, y) = \text{cov}(x, y)$, где $x, y \in \{z_1, \dots, z_n\}$, а символ cov — ковариация. Полученное евклидово пространство обозначим буквой E . Независимым случайным величинам из E соответствуют ортогональные векторы.

Натянем на векторы $z_1, \dots, z_{n-1}$ подпространство и выберем в нем ортонормированный базис $F_1, \dots, F_l$, $l \leq n-1$. Тогда при некоторых a_{ij} , $i = 1, \dots, n-1$, $j = 1, \dots, l$,

$$\begin{aligned} z_1 &= a_{11}F_1 + \dots + a_{1l}F_l, \\ z_2 &= a_{21}F_1 + \dots + a_{2l}F_l, \\ &\vdots \\ z_{n-1} &= a_{(n-1)1}F_1 + \dots + a_{(n-1)l}F_l. \end{aligned} \quad (2)$$

Если оставшийся вектор z_n лежит в подпространстве $\{z_1, \dots, z_{n-1}\}$, то и он аналогичным образом выражается через векторы $F_1, \dots, F_l$. Если нет — опустим из z_n на подпространство $\{z_1, \dots, z_{n-1}\} = \{F_1, \dots, F_l\}$ перпендикулярный вектор V , так что $z_n + V \in \{F_1, \dots, F_l\}$. Пусть $|V| = b_n$. Положим $U_n = -V/b_n$. Тогда при некоторых $a_{n1}, \dots, a_{nl}$

$$z_n = a_{n1}F_1 + \dots + a_{nl}F_l + b_nU_n.$$

Вместе с (2) последнее равенство образует факторную модель (1). Теорема 1 доказана.

Теорема 2. При любом $n \geq 1$ существует набор случайных величин $z_1, \dots, z_n$, для которых в (1) требуется не менее чем $n-1$ общий фактор.

Доказательство. Пусть $z_1, \dots, z_n$ такие центрированные и нормированные случайные величины, что евклидово пространство $\{z_1, \dots, z_n\}$ (см. доказательство теоремы 1) имеет размерность $n-1$ и любой из векторов $z_1, \dots, z_n$ является линейной комбинацией остальных. Построим для этих векторов модель (1) (количество общих факторов l сейчас несущественно). Докажем, что $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 0$.

Действительно, если

$$\begin{aligned} z_1 - b_1 U_1 &= a_{11} F_1 + \dots + a_{1l} F_l, \\ z_2 - b_2 U_2 &= a_{21} F_1 + \dots + a_{2l} F_l, \\ &\vdots \\ z_n - b_n U_n &= a_{n1} F_1 + \dots + a_{nl} F_l, \end{aligned} \quad (3)$$

то при любом i , $i = 1, \dots, n$, вектор $z_i - b_i U_i$ принадлежит подпространству $\{F_1, \dots, F_i\}$. Так как всякий вектор этого подпространства ортогонален U_n , то, в частности,

[illegible]

Каждый вектор U_i , $i = 1, \dots, n-1$, ортогонален вектору U_n , поэтому $(U_i, U_n) = 0$ и, следовательно,

$$\begin{aligned}(z_1, U_n) &= 0, \\ \dots \dots \dots (z_{n-1}, U_n) &= 0.\end{aligned}$$

А вектор z_n является линейной комбинацией векторов $z_1, \dots, z_{n-1}$, откуда $(z_n, U_n) = 0$. Умножим обе части последнего из равенств (3) скалярно на U_n

$$(z_n, U_n) - b_n(U_n, U_n) = a_{n1}(F_1, U_n) + \dots + a_{nl}(F_l, U_n) = 0.$$

Следовательно, $b_n = 0$.

Аналогично доказывается, что остальные b_i , $i = 1, \dots, n-1$, равны нулю.

Таким образом, для построенной нами совокупности векторов модель (1) имеет вид

$$\begin{aligned} z_1 &= a_{11}F_1 + \dots + a_{1l}F_l, \\ . &. \\ z_n &= a_{n1}F_1 + \dots + a_{nl}F_l. \end{aligned}$$

Последние соотношения представляют собой разложение векторов $z_1, \dots, z_n$ по набору $F_1, \dots, F_l$ линейно независимых векторов. Число l не может быть меньше $n - 1$, так как иначе размерность пространства $\{z_1, \dots, z_n\}$ не могла бы равняться $n - 1$. Теорема 2 доказана.

Укажем теперь ошибку в [1]. Чтобы ответить на вопрос о минимальном числе факторов, в [1, стр. 63] вводится определение приведенной корреляционной матри-

цы $\bar{R}$ как корреляционной матрицы, у которой единицы на диагонали заменены факторными дисперсиями $h_i^2 = a_{i1}^2 + \dots + a_{in}^2$

$$\bar{R} = \begin{pmatrix} h_1^2 & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & h_2^2 & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & h_n^2 \end{pmatrix},$$

где h_i^2 соответствуют модели (1) с минимальным числом общих факторов.

Можно доказать, что ранг матрицы $\bar{R}$ равен минимальному возможному числу общих факторов. Если по числу переменных n можно было бы указать максимум ранга для соответствующего множества приведенных корреляционных матриц, то тем самым определялось бы число m .

Однако введенное в [1] понятие приведенной корреляционной матрицы слишком сложно, и сам автор на стр. 69 начинает фактически пользоваться другим определением: приведенная корреляционная матрица $\bar{R}$ — это матрица минимального ранга, имеющая вне главной диагонали те же элементы, что и исходная корреляционная матрица R , а на главной диагонали — произвольные действительные числа.

Но определения матриц $\bar{R}$ и $\tilde{R}$ неэквивалентны. Для того чтобы приведенная корреляционная матрица в смысле второго определения была приведенной корреляционной матрицей в смысле первого определения, необходимо, чтобы она представлялась в виде $\tilde{R} = AA'$, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1l} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nl} \end{pmatrix}.$$

Для этого, в свою очередь, необходимо и достаточно, чтобы все ее главные миноры были неотрицательны. Можно, однако, построить пример матрицы $\tilde{R}$, для которой это условие не выполняется. Кроме того, представимость $\tilde{R}$ в виде произведения AA' не является достаточным условием для того, чтобы матрица $\tilde{R}$ была приведенной в смысле первого определения. Нужно еще потребовать, чтобы диагональные элементы $\tilde{R}$ не превосходили единицы.

Как было сказано выше, описанная ошибка приводит к неправильным утверждениям. Уже из доказательства теоремы 2 видно, что наборы из n случайных величин, имеющие модель (1) не менее чем с $n-1$ общим фактором, должны встречаться довольно часто. На самом деле они встречаются еще чаще, так как в доказательстве переменные подчинены излишне жестким условиям.

Приведем, пользуясь реальными статистическими данными [1], пример трех переменных, не имеющих модели (1) с одним общим фактором.

Из табл. 5.3 [1, стр. 80] корреляций между восемью физическими переменными для 305 девочек выберем три переменные: вторую — z_2 (размах рук), третью — z_3 (длина предплечья) и восьмую — z_8 (ширина груди). (Переменные приведенные.)

Корреляции между этими переменными образуют матрицу

$$\begin{matrix} & z_2 & z_3 & z_8 \\ \begin{matrix} z_2 \\ z_3 \\ z_8 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0,881 & 0,415 \\ 0,881 & 1 & 0,345 \\ 0,415 & 0,345 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Будем считать, что при некоторых действительных коэффициентах $a_2, a_3, a_8, b_2, b_3, b_8$ и приведенных независимых переменных F, U_2, U_3, U_8 имеет место система равенств

$$z_2 = a_2 F + b_2 U_2$$

$$z_3 = a_3 F + b_3 U_3$$

$$z_8 = a_8 F + b_8 U_8.$$

Тогда корреляционная матрица переменных z_2, z_3, z_8 должна иметь вид

$$\begin{pmatrix} a_2^2 + b_2^2 & a_2 a_3 & a_2 a_8 \\ a_2 a_3 & a_3^2 + b_3^2 & a_3 a_8 \\ a_2 a_8 & a_3 a_8 & a_8^2 + b_8^2 \end{pmatrix}.$$

Сравнивая эту матрицу с данной, получаем, что $a_2a_3 = 0,881$, $a_2a_8 = 0,415$, $a_3a_8 = 0,345$.

Отсюда

$$a_2^2 = \frac{a_2a_3 \cdot a_2a_8}{a_3a_8} = \frac{0,881 \cdot 0,415}{0,345} > 1,057$$

и, следовательно, $a_2^2 + b_2^2 > 1,057$, что противоречит условию $a_2^2 + b_2^2 = 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Н. Н а г м а н. Modern Factor Analysis. Chicago — London, The University of Chicago Press, 1968.

Поступила в редакцию
19 I 1971

ВОПРОСЫ МЕТОДИКИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРСПЕКТИВНОЙ ПОТРЕБНОСТИ В ЛИТЫХ ЗАГОТОВКАХ

К. ЖУГУНУСОВ

(Москва)

Оптимальное развитие и рациональное размещение литейного производства требуют определения перспективной потребности в литых заготовках или отливках не только целого экономического района, но и его подрайонов — краев и областей. Сложность заключается в учете изменений оптовой цены выпускаемой продукции, модификаций вновь создаваемых машин, достижений научно-технического прогресса и др.

Основными производителями и потребителями отливок является машиностроительная и металлообрабатывающая промышленность. Литые заготовки идут как на удовлетворение собственных нужд этих отраслей, так и для кооперированных поставок другим. Некоторые машиностроительные и металлообрабатывающие заводы для основных выпускаемых изделий и для ремонтно-эксплуатационных нужд получают отливки от предприятий черной и цветной металлургии, санитарно-технической, легкой, пищевой и других отраслей промышленности. Пока нет еще единой методики определения перспективной потребности в литых заготовках. Так, например, в [1] для прогноза и ориентировочного расчета объема стальных и чугунных отливок предлагается анализ связи между выпуском жидкой стали и литья из черных металлов. Полученное в результате соотношение в разных странах различно и из года в год снижается. Такая методика применима, по-видимому, с определенными оговорками только в разрезе страны в целом, где наряду с выпуском отливок производится сталь.

В [2] рекомендуется следующая эмпирическая формула расчета чугунных отливок: $y = a + bx$, где y — коэффициент роста выпуска чугунных отливок по отношению к исходному уровню; x — коэффициент роста выпуска промышленной продукции; a , b — постоянные множители, равные соответственно 0,48 и 0,52. Такая методика заслуживает внимания, поскольку ее можно использовать как для определения потребности целого экономического района, так и областей, но только в *чугунных* отливках.

Развитие литейного производства в СССР и за рубежом происходит относительно меньшими темпами, чем рост выпуска валовой продукции всей промышленностью, а также таких важнейших отраслей, как машиностроение и металлообработка, которые по сравнению с другими отраслями потребляют подавляющую долю литья, выпущенного в стране.

На основе обработки статистических данных за 14 лет в [3] были установлены эмпирические линии регрессии, имеющие вид прямой и выражающиеся уравнением, характеризующим зависимость темпов роста литейного производства от темпов роста валовой продукции всей промышленности и основных ее отраслей-потребителей — машиностроения и металлообработки: $\bar{y} = 18,9 + 0,44x_1$, $\bar{y} = 23,8 + 0,23x_2$, где $\bar{y}$ — усредненные темпы роста литейного производства в %; x_1 — темпы роста валовой продукции всей промышленности; x_2 — темпы роста валовой продукции машиностроения и металлообработки. Однако и эта методика не нашла применения, так как она формально экстраполирует данные, полученные в прошлом, на перспективу.

В рассмотренных методиках, как упоминалось ранее, не учитываются результаты ежегодно усиливающегося влияния технического прогресса на производство литых заготовок. С применением передовой интенсифицированной техники и прогрессив-