$c_2 = \min(a_i^{\mathrm{I}}, b_i^{\mathrm{I}})$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, и берем $a_i^{\mathrm{II}} = a_i^{\mathrm{I}} - c_2$ и $b_i^{\mathrm{II}} = b_i^{\mathrm{I}} - c_2$ и т. д. В результате определяется место в очереди детали с длительностью a_i или b_i, равной c_1 (начало очереди, если $a_i = c_1$, и конец, если $b_i = c_1$), затем детали с a_i или b_i, равной $c_1 + c_2$, и т. д., т. е. известный алгоритм из [1]. В [2], правда, задача усложнена дополнительным условием: если время начала работы станка A принять за нуль, то станок B может начать работу *не раньше* заданного момента Δ, $\Delta \geqslant 0$. Однако легко понять, что оптимальный порядок, найденный для $\Delta = 0$, остается оптимальным при $\Delta > 0$, т. е. учет Δ не портит этого порядка. В самом деле, пусть для $\Delta = 0$ (или, что то же, для $0 \leqslant \Delta \leqslant A_1^{\bullet}$) найден оптимальный порядок. Не меняя порядка обработки, введем $\Delta > A_1^{\bullet}$, т. е. пустим станок B в момент Δ. Если это не сдвинет время окончания обработки последней детали на станке B, то нечего и доказывать. Если сдвинет, это будет значить, что с момента Δ все детали на станке B идут беспрерывно, т. е. станок B освободится в момент $T = \Delta + \sum_{i=1}^{n} b_i$, а это, очевидно, минимальное время.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. М. Джонсон. Оптимальные двух- и трехоперационные календарные планы производства с учетом подготовительно-заключительного времени. В сб. Календарное планирование. М., «Прогресс», 1966.
2. А. А. Корбут, Ю. Ю. Финкельштейн. Дискретное программирование. М., «Наука», 1969.

Поступила в редакцию
17 X 1969

ПСЕВДООБРАТНАЯ МАТРИЦА И ИНВАРИАНТНАЯ ФОРМА ДЛЯ МАТРИЦЫ БЛОЧНО-ДИАГОНАЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ

М. С. ДУБСОН

(Москва)

Хорошо известно, что если матрица ограничений задачи линейного программирования $\min(c, x)$, $Ax = b$, $x \geqslant 0$ обладает специальной структурой, то ее можно учитывать в специальных алгоритмах линейного программирования, более эффективных, нежели стандартные процедуры. Однако заранее особенности структуры матрицы известны не всегда. В таких случаях нужны специальные методы для выявления особенностей структуры. В настоящей работе предлагается простой метод для выяснения, является ли данная матрица блочно-диагональной.

Введем обозначение: $R_p^{m\times n}$ — совокупность всех $m \times n$ матриц ранга p. Нам понадобятся также некоторые свойства псевдообратной матрицы A^+, определяемой как единственное решение системы четырех матричных уравнений, называемых также уравнениями Пенроуза

$$ATA = A, \tag{1}$$

$$TAT = T, \tag{2}$$

$$(AT)' = AT, \tag{3}$$

$$(TA)' = TA. \tag{4}$$

Рассмотрим систему линейных уравнений

$$Ax = b, \qquad A \in R_p^{m\times n}. \tag{5}$$

Лемма 1. *Система линейных уравнений* (5) *совместна тогда и только тогда, когда* $AA^+b = b$. *В этом случае общее решение системы* (5) *имеет вид* $A^+b + (I - A^+A)y$*, *где произвольный вектор* $y \in R^n$.

---

* I — единичная матрица, порядок которой совпадает с порядком $A'A$, где штрих означает транспонирование.

Доказательство. Если $AA^+b = b$, то A^+b — одно из решений (5), которая следовательно, совместна. Если (5) совместна, то у нее существует решение x_0. Из цепочки равенств $b = Ax_0 = AA^+Ax_0 = AA^+(Ax_0) = AA^+b$ получаем выполнимость критерия совместности. Тем самым показано, что A^+b является частным решением совместной системы (5). Поскольку для любого вектора z имеет место разложение $z = A^+Az + (I - A^+A)z$, то если $Az = 0$, то $z = (I - A^+A)z$. Обратное очевидно из уравнения (1) — любой вектор вида $(I - A^+A)z$ аннулируется A. Лемма доказана.

Определение: Разложение $A = B \cdot C$ называется скелетным, если $A \in R_p^{m \times n}$, $B \in R_p^{m \times n}$, $C \in R_p^{p \times n}$.

Лемма 2 [1]. *Для любой матрицы A существует скелетное разложение $B\, C$, а матрица $C'(CC')^{-1}(B'B)^{-1} = C^+B^+ = A^+$ является псевдообратной.*

Замечание. Если матрица полного ранга по строкам, т. е. $A \in R_m^{m \times n}$, то $A^+ = A'(AA')^{-1}$, тем самым $AA^+ = I_m$. Если матрица D полного ранга по столбцам, т. е. $D \in R_n^{m \times n}$, то $D^+ = (D'D)^{-1}D'$ или $D^+D = I_n$.

Далее будем предполагать, что матрица A — полного ранга по строкам. Из дальнейшего хода рассуждений будет ясно, что при этом общность не теряется. В этом случае система (5) совместна при любой правой части. В качестве допустимых преобразований системы (5) будут использоваться любые операторы левого умножения из $R_m^{k \times m}$, $k \geqslant m$, т. е. система (5) будет заменяться системой вида

$$QAx = Qb. \tag{6}$$

Легко проверить, что матрица $A^+ \cdot Q^+$ будет псевдообратной для QA. Это вытекает из того, что $AA^+ = I$ и $Q^+Q = I$. Поэтому система (6), общее решение которой есть $x = (QA)^+Qb + [I - (QA)^+QA]y = A^+b + [I - A^+A]y$ эквивалентна исходной системе (5). Осталось заметить, что в случае совместной системы (5) имеет место эквивалентность ее системе

$$A^+Ax = A^+b, \tag{7}$$

что вытекает из принадлежности A^+ совокупности $R_m{}^{n \times m}$. Тем самым доказана

Теорема инвариантности. *Матрица A^+A является инвариантной под действием всех левых преобразований Q* из $R_m^{k \times m}$, $k \geqslant m$.

Следствие для матриц блочно-диагональной структуры. Если для матрицы $A \in R_m^{m \times n}$ существует левое преобразование $\widetilde{Q}$, приводящее ее к блочно-диагональной форме, то такую же форму имеет и матрица A^+A.

В самом деле

$$\widetilde{Q}A = P = \begin{pmatrix} p_1 & & & \\ & p_2 & & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & & & p_e \end{pmatrix} \Rightarrow P = \begin{pmatrix} p_1{}^+ & & & \\ & p_2{}^+ & & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & & & p_e{}^+ \end{pmatrix} \Rightarrow P^+P = A^+A = \begin{pmatrix} p_1{}^+p_1 & & & \\ & p_2{}^+p_2 & & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & & & p_e{}^+p_e \end{pmatrix}$$

Если же матрица $A \in R_p^{m \times n}$, $n > p$, то имеет место следующее равенство: $(QA)^+QA = A^+A = C^+C$ (где $Q \in R_m^{k \times m}$, $k \geqslant m$, $B \cdot C = A$ — скелетное разложение A), которое следует из того, что $QA = QB \cdot C$ и $QB \in R_p^{k \times p}$, так как $QBx = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow Q^+QBx = 0 \Rightarrow Bx = 0 \Rightarrow B^+Bx = 0 \Rightarrow x = 0$, так как $Q^+Q = I_m$, $B^+B = I_p$, ибо $Q \in R_m^{k \times m}$ и $B \in R_p^{m \times p}$, т. е. единственным вектором, аннулирующимся под действием QB будет 0, что эквивалентно $QB \in R_p^{k \times p}$. Следовательно, и для случая матрицы A произвольного ранга критерий блочно-диагональности остается в силе.

Аналогичные условия можно сформулировать и для двойственной к ранее рассмотренной задаче линейного программирования $\max \langle b, y \rangle$, $A'y \geqslant c$. Система ограничений $A'y \geqslant c$ этой задачи эквивалентна системе $A'y = c + z$, $z \geqslant 0$. Для того чтобы исключить из этой системы y, необходимо выписать условие совместности системы равенств $A'y = c + z$, которое имеет вид $A'(A')^+(c + z) = c + z$. Воспользовавшись равенством (4): $(A^+A)' = A'(A')^+ = A^+A$, критерий совместности можно переписать в виде $A^+A(c + z) = c + z$ или $(I - A^+A)z = -(I - A^+A)c$. Если z удовлетворяет этому уравнению, то $y = (A')^+(c + z) + [I - (A')^+A']t =$ $= (A^+)'\ (c + z) + (I - AA^+)t$, t — произвольный вектор из R^m. Тогда целевая функция $\langle b, y \rangle = \langle b, (A^+)'(c + z) \rangle + \langle b, (I - AA^+)t \rangle = \langle A^+b, c \rangle + \langle A^+b, z \rangle +$ $+ \langle (I - AA^+)b, t \rangle$, так как $(I - AA^+)' = I - AA^+$. Но $(I - AA^+)b = 0$, ибо система $Ax = b$ предполагается совместной. Таким образом двойственная задача приведена к виду $\langle A^+b,\ c\rangle + \max\langle A^+b,\ z\rangle$, $(I - A^+A)z = -(I - A^+A)c$, $z \geqslant 0$, в котором матрица $I - A^+A$ является инвариантной формой для блочно-диагональной структуры, т. е. либо

$$I - A^+A = \begin{bmatrix} H_1 & & & 0 \\ & H_2 & & \\ & & \ldots & \\ 0 & & & H_Q \end{bmatrix}$$

либо никакими левыми преобразованиями Q ее нельзя привести к такому виду.

В заключение отметим, что для вычисления псевдообратной матрицы A^+ не обязательно пользоваться скелетным разложением, так как разработаны эффективные процедуры непосредственного вычисления псевдообратной матрицы любого ранга.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. Р. Гантмахер. Теория матриц. М., «Наука», 1967.

Поступила в редакцию
6 XI 1972

РЕШЕНИЕ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ КОММИВОЯЖЕРА МЕТОДОМ ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ

А. И. ЛАЗЕБНИК, И. Л. ХРАНОВИЧ

(Москва)

Под задачей коммивояжера понимается следующая задача. Задан граф G, вершины которого разделены на две группы — U_1 и U_2. Требуется найти кратчайший контур, проходящий по одному разу через вершины первой группы и не более чем по одному разу через вершины второй группы.

Классическая задача коммивояжера — частный случай рассматриваемой, в нем все вершины принадлежат к первой группе. Решение классической задачи может быть найдено методом ветвей и границ с использованием задачи о назначениях для получения нижней границы [1]. Аналогичный метод может быть применен и для решения сформулированной выше задачи коммивояжера с промежуточными точками, причем для определения нижней границы используется решение следующей задачи. Найти минимум функции

$$c^T x \tag{1}$$

при ограничениях

$$Hx = 0, \tag{2}$$

$$H_1^+ x = 1_l, \tag{3}$$

$$H_2^+ x \leqslant 1_k, \tag{4}$$

$$x \geqslant 0, \tag{5}$$

где x — n-мерный вектор потока в графе (n — число дуг графа); c — n-мерный вектор стоимостей; H — матрица инциденций графа G, ее размерность $m \times n$ (m — число вершин графа); H^+ — матрица, получаемая из H заменой всех -1 на 0; H_1^+ — матрица, получаемая из H^+ вычеркиванием всех строк, кроме строк, соответствующих вершинам первой группы, ее размерность $l \times n$ (l — число вершин в первой группе); H_2^+ — то же для вершин второй группы; ее размерность $k \times n$ (k — число вершин во второй группе); 1_l — l-мерный вектор, состоящий из единиц; 1_k — k-мерный вектор, состоящий из единиц.

Эта задача отличается от задачи коммивояжера с промежуточными точками только отсутствием требования связанности получаемого замкнутого контура, поэтому решение подобной задачи является оценкой снизу значения целевой функции задачи коммивояжера. Для краткости (1) — (5) также будет называться задачей о назначениях. Оправданием такому названию служит то, что она может быть интерпретирована следующим образом [2]. Имеется m должностей, занятых сотрудниками, каждый из которых, вообще говоря, может быть использован на различных должностях. При перемещении сотрудника с i-й должности на j-ю издержки производства изменяются на c_{ij} единиц. Каждый сотрудник может перемещаться с одной должности на другую только один раз. Некоторых сотрудников (число их равно l) нужно