ЭКОНОМИКА 1973
И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ том IX, вып. 3

## МАКРОЭКОНОМИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

# ИТЕРАТИВНОЕ АГРЕГИРОВАНИЕ В НЕКОТОРЫХ ОПТИМАЛЬНЫХ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ

И. Я. ВАХУТИНСКИЙ, Л. М. ДУДКИН, Б. А. ЩЕННИКОВ

*(Москва)*

Значение итеративного агрегирования для взаимоувязки экономических расчетов разных уровней управления отмечалось в [1—12]. Впервые метод итеративного агрегирования был разработан для решения систем линейных уравнений модели межпродуктового баланса [1]. В [2] доказана сходимость процесса итеративного агрегирования в случае, когда агрегированная матрица одномерна при естественных экономических условиях неотрицательности коэффициентов $a_{ij}$ исходной матрицы и $\sum\limits_i a_{ij} < 1$. В [3] дана оценка скорости сходимости процесса итеративного агрегирования межотраслевого баланса в общем случае. Оценка сходимости, указанная в [3], для общего процесса является довольно грубой и может быть улучшена во многих случаях, когда матрица $A$ обладает теми или иными конкретными свойствами.

Однако численные эксперименты показали, что процесс сходится, и при том столь же быстро, и тогда, когда агрегированная матрица не одномерна. Математические исследования привели к доказательству сходимости процесса итеративного агрегирования в общем случае. В [3] указаны необходимые и достаточные условия сходимости, которые сформулированы, правда, не в конструктивном виде и без доказательства. В [4] приведено доказательство сходимости процесса при условии $\sum\limits_i a_{ij} < 1/3$, естественность которого с экономической точки зрения не ясна. Была доказана сходимость процесса итеративного агрегирования в случае, когда исходная матрица $A$ имеет блочно-треугольную структуру, а агрегирование производится по блокам [5].

В [3] сформулирован конечный метод разложения для решения системы линейных алгебраических уравнений, основанный на идее итеративного агрегирования. Конечный метод разложения рассматривает случай, когда агрегируется лишь часть переменных исходной системы. Случай, когда в ходе решения могут агрегироваться все переменные, рассмотрен в [6]. Однако метод, сформулированный в [6], представляется малоэффективным со следующих точек зрения. Во-первых, он подразумевает наличие в одном месте всей информации об исходной задаче, а сама вычислительная схема не позволяет производить расчеты по ней параллельно. Во-вторых, метод довольно громоздкий, а оценка числа операций не позволяет считать, что он обладает существенными преимуществами по сравнению с другими известными методами точного решения исходной задачи. Этот метод решения линейных алгебраических уравнений довольно интересен с теоретической точки зрения, но он не является в действительности методом агрегирования. Его вычислительная схема использует некоторые параметры, которые можно считать агрегированными показателями исходной матрицы условий, однако экономический смысл их в общем случае остается не ясным.

Одновременно с математическими исследованиями процесса итеративного агрегирования в модели межпродуктового баланса осуществлялась разработка методов итеративного агрегирования для решения ряда оптимальных экономических задач [7—12]. Математическому исследованию некоторых из них посвящена настоящая работа.

## 1. ИТЕРАТИВНОЕ АГРЕГИРОВАНИЕ В МОДЕЛИ ОПТИМАЛЬНОГО МЕЖПРОДУКТОВОГО БАЛАНСА

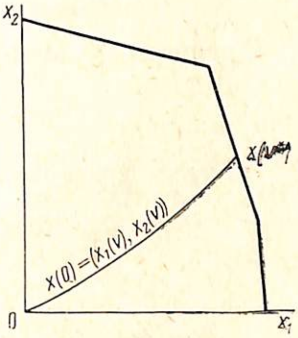
Модель оптимального межпродуктового баланса [7] представляет собой задачу нахождения максимума фактических личных доходов трудящихся при условиях соблюдения материальных балансов по отдельным продуктам и ограничений по первичным ресурсам, а также при условии соответствия структуры производства предметов потребления спросу, складывающемуся при достигаемом уровне доходов. Математически она формулируется как задача условной максимизации параметра $v$ при ограничениях

$$x = Ax + y(v), \qquad Bx \leqslant b, \tag{1}$$

$$A = (a_{ij})_1^n \geqslant 0, \qquad |A| = \max_j \sum_i a_{ij} < 1,$$

$$B = (b_{sj})_{1,1}^{m,n}, \qquad b = (b_s)_1^m, \tag{2}$$

$$y(v) = (y_i(v))_1^n \geqslant 0, \qquad \sum_i y_i(v) = v,$$




где $x$ — искомый вектор, элементами которого являются выпуски продукции каждого вида; $y$ — искомый вектор, элементами которого являются конечные выпуски продукции каждого вида (условно принято, что конечный выпуск состоит лишь из предметов личного потребления); $v$ — максимизируемая величина фактических личных доходов трудящихся; $A$ — известная матрица нормативов материальных затрат; $b$ — заданный вектор, элементами которого являются первичные ресурсы каждого вида; $B$ — матрица нормативов затрат первичных ресурсов каждого вида на продукцию каждого вида; $y_i(v)$ — функция спроса трудящихся на продукцию $i$-го вида в зависимости от размера их фактических личных доходов (предполагается, что $y(v)$ — неубывающая, дифференцируемая вектор-функция аргумента $v$).

Далее будет исследован процесс итеративного агрегирования для решения этой задачи в случае, когда все переменные $x_i$ агрегируются в одну. При доказательстве локальной сходимости процесса используется, в частности, свойство оптимального решения $x(v^*)$ исходной задачи обращать в равенство лишь одно из $m$ ограничений $Bx \leqslant b$. Действительно, как и в случае, изображенном на рисунке, в общем $n$-мерном случае монотонно неубывающая траектория $x(v) = (E - A)^{-1}y(v)$ пересечет, вообще говоря, только одну гиперплоскость размерности $n - 1$ в точке $x(v^*)$, которая и является оптимальным решением задачи. Таким образом, высказывание о том, что $v^*$ — максимально или $x(v^*)$ находится на гиперплоскости, будем считать эквивалентными. Ситуация, когда оптимальное решение находится на грани выпуклого многогранника $Bx \leqslant b$ размерности меньшей, чем $n-1$, не рассматривается. Естественно предполагать, что малая вариация исходной задачи в этом случае позволяет избежать этого рассмотрения.

Итак, без ограничения общности считаем, что множество $Bx \leqslant b$ представлено одной гиперплоскостью

$$\sum_j b_{sj} x_j = b_s. \tag{3}$$

Рассмотрим процесс итеративного агрегирования. Пусть $x^\tau = (x_1^\tau, \dots, x_n^\tau)$ — некоторое начальное детализированное приближение, $X^\tau = \sum_{i=1}^n x_i^\tau$ — его агрегат. Определим

$$p_i^\tau = \frac{x_i^\tau}{X^\tau}, \qquad \sum_{i=1}^n p_i^\tau = 1.$$

Построим агрегированную систему для определения $X^{\tau+1}$

$$X^{\tau+1} = a(p^\tau) X^{\tau+1} + v^{\tau+1}. \tag{4}$$

В данном случае это будет одно скалярное уравнение, в котором

$$a(p^\tau) = \sum_{i,j} a_{ij} p_j^\tau.$$

Из этого уравнения получаем

$$X^{\tau+1} = \frac{v^{\tau+1}}{1 - a(p^\tau)} = \frac{v^{\tau+1}}{1 - \sum_j \sum_i a_{ij} p_j^\tau} =$$

$$= \frac{v^{\tau+1}}{\sum_j \left(1 - \sum_i a_{ij}\right) p_j^\tau} = \frac{v^{\tau+1}}{\sum_j \beta_j p_j^\tau}, \tag{5}$$

где $\beta_j = 1 - \sum_i a_{ij} > 0$.

Максимальное значение параметра $v^{\tau+1}$ определяется из условия

$$\left(\sum_j b_{sj} p_j^\tau\right) X^{\tau+1} = b_s, \tag{6}$$

или

$$X^{\tau+1} = \frac{b_s}{\sum_j b_{sj} p_j^\tau}. \tag{7}$$

Сравнивая (5) и (7), получим

$$v^{\tau+1} = \frac{\sum_j \beta_j p_j^\tau}{\sum_j b_{sj} p_j^\tau} b_s. \tag{8}$$

Определив таким образом $v^{\tau+1}$, найдем из (5) $y_i$ $(v^{(\tau+1)})$ и дезагрегируем $X^{\tau+1}$ по формуле

$$x_i^{\tau+1} = \sum_j a_{ij} p_j^{\tau} X^{\tau+1} + y_i(v^{\tau+1}). \tag{9}$$

Новые веса $p_i^{\tau+1}$ получим из (9), поделив это соотношение на $X^{\tau+1}$

$$p_i^{\tau+1} = \frac{x_i^{\tau+1}}{X^{\tau+1}} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_j^{\tau} + \frac{y_i(v^{\tau+1})}{v^{\tau+1}} \sum_{j=1}^{n} \beta_j p_j^{\tau}. \tag{10}$$

Введя обозначения: $y_i(v^{\tau+1}) \,/\, v^{\tau+1} = r_i(v^{\tau+1})$ и $s_{ij}(v^{\tau+1}) = a_{ij} + r_i(v^{\tau+1})\beta_j$, определим оператор $S_{p^\tau} = (s_{ij}(v^{\tau+1}))_1{}^n = (s_{ij}(p^\tau))_1{}^n$ и запишем (10) в виде

$$p^{\tau+1} = S_{p^\tau} p^\tau. \tag{11}$$

Таким образом, процесс итеративного агрегирования в переменных $p_i$ — нестационарный итеративный процесс. Оператор $S_{p^\tau}$, связывающий $p^\tau$ и $p^{\tau+1}$ изменяется, вообще говоря, на каждом шаге итеративного процесса и зависит от $p^\tau$ неявно. Выведем достаточные условия сходимости процесса (11). Пусть все функции $y_i(v)$ дифференцируемы. Очевидно,

$$\sum_i (y_i(v)/v)_v{}' = \Big( \sum_i r_i(v) \Big)_v' = 0.$$

Однако, как показывает анализ конкретных функций потребления, не только сумма производных равна нулю, но и каждое слагаемое мало и $r_i{}'(v) \to 0$ при $v \to \infty$. Учитывая эту особенность реальных задач, сформулируем достаточные условия сходимости процесса (11) в виде теоремы.

**Теорема 1.** *Пусть для любых $i, j = 1, \ldots, n$*

$$|\bar\beta_1 r_i{}'(v) v_{pj}{}'| < a_{ij} + r_i(v)\bar\beta_2,$$

*где*

$$0 < \bar\beta_1, \bar\beta_2, < 1, \quad \bar\beta_1 = \max_j \beta_j; \quad \beta_2 = \min_j \beta_j,$$

*тогда процесс* (11) *сходится.*

Заметим, что в переменных $x_i$ процесс сходится к единственному решению $x(v^*)$ исходной задачи. Действительно, из формул (7)—(9) следует, что вектор $x^{\tau+1}$ взаимно однозначно связан с вектором $p^\tau$ и $X^{\tau+1}$ при любом значении параметра $v$.

Поэтому из сходимости последовательности $\{p^\tau\}$ следует сходимость последовательности $\{x^\tau\}$ к некоторому вектору $x(v^*)$, который одновременно удовлетворяет (1) и лежит в гиперплоскости (3), а этот вектор, очевидно, единственный. Пусть $p$ — неподвижная точка нелинейного преобразования $p \to S_p p$.

Оценим разность $p$ и $p^{(\tau+1)}$ в некоторой окрестности решения $p$

$$p_i - p_i^{(\tau+1)} = \sum_{j=1}^{n} s_{ij}(p) p_j - \sum_{j=1}^{n} s_{ij}(p^{(\tau)}) p_j^{(\tau)} =$$

$$= \sum \frac{\partial \Big( \sum\limits_{l=1}^{n} s_{il}(p) p_j \Big)}{\partial p_j} (p_j - p_j^{(\tau)}) + o(p - p^{(\tau)}), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{12}$$

Обозначим через $F'$ матрицу из производных

$$F' = \left( \frac{\partial (s_{ij}(p)p)}{\partial p_j} \right)_1^n,$$

взятых в точке $p$ ($F'$ — матрица Якоби отображения $S_p p$). Тогда (12) можно записать в виде: $p - p^{(\tau+1)} = F'(p - p^{(\tau)}) + o(p - p^{\tau})$.

Покажем, что при сделанных предположениях матрица $F'$ является стохастической. Действительно

$$F' = S(p) + S'(p)p = \left( \frac{\partial (s_{ij}(p)p)}{\partial p_j} \right)_1^n,$$

$$\frac{\partial (s_{ij}(p)p)}{\partial p_j} = s_{ij}(p) + \frac{\partial s_{ij}(p)}{\partial p_j} p_j = a_{ij} + r_i\beta_j + \frac{\partial r_i}{\partial p_j} \sum_{l=1}^{n} \beta_l p_l.$$

Из условия теоремы следует

$$\left| \frac{\partial r_i}{\partial p_j} \sum_{l=1}^{n} \beta_l p_l \right| < a_{ij} + r_i \beta_j, \qquad (13)$$

так как

$$\left| \frac{\partial r_i}{\partial p_j} \sum_{l=1}^{n} \beta_l p_l \right| < |\bar{\beta}_1 r_i'(v) v'_{p_j}|. \qquad (14)$$

В (14) $\beta_l$ мажорируется $\bar{\beta}_1 = \max_l \beta_l$, а

$$\sum_l p_l = 1 \text{ и } \partial r_i / \partial p_j = r_i'(v) v'_{p_j}.$$

Тогда в силу положительности элементов матрицы $S(p) = (a_{ij} + r_i\beta_j)_1^n$ элементы матрицы $F'$ также положительны. Далее

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \left( \sum_{l=1}^{n} s_{il}(p) p \right)}{\partial p_j} = \sum_{i=1}^{n} \left( a_{ij} + r_i\beta_j + \frac{\partial r_i}{\partial p_j} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^{n} \beta_l p_l \right) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} + \beta_j \sum_{i=1}^{n} r_i +$$

$$+ \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq 1}}^{n} \beta_l p_l \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial r_i}{\partial p_j} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} + \beta_j = 1,$$

так как, по определению, $\beta_j = 1 - \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$. Здесь мы использовали тот факт, что сумма функций $r_i$ равна единице по определению и, следовательно,

$$\sum_{i=1} \frac{\partial r_i}{\partial p_j} = \frac{\partial}{\partial p_j} \sum_{i=1}^{n} r_i = 0.$$

Векторы $\Delta p_n^\tau = p - p^\tau$ лежат на гиперплоскости $n = \left\{x : \sum_{j=1}^{n} x_j = 0\right\}$, на которой стохастическая матрица $F'$ является сжимающим оператором.

Таким образом, локальная сходимость процесса (11), а вместе с ним и процесса итеративного агрегирования (4) — (9) доказана.

## 2. ИТЕРАТИВНОЕ АГРЕГИРОВАНИЕ В МОДЕЛИ МЕЖПРОДУКТОВОГО БАЛАНСА С ЗАДАННЫМ КОНЕЧНЫМ ПОТРЕБЛЕНИЕМ ПРИ НАЛИЧИИ КОМПЛЕКСНЫХ ПРОИЗВОДСТВ И РАЗНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ У ГРУППЫ ПРОДУКТОВ

В задаче (1), (2) предполагается единственность технологических способов получения каждого продукта и, кроме того, отсутствие так называемых комплексных производств, т. е. таких производственных процессов, результатом каждого из которых является группа некоторых совместно получаемых продуктов. В действительности для большинства отраслей наличие разных технологических способов и комплексных производств игнорировать нельзя.

Для того чтобы решить проблему согласования укрупненных и детализированных показателей плана с учетом этих факторов, необходимо решить вопрос увязки задачи определения пропорций производства продуктов и задач выбора оптимальных технологических способов производства отдельных продуктов или групп продуктов.

В этом и следующем разделах строятся процессы согласования задачи определения пропорций производства большой группы продуктов, получаемых раздельно и единственным способом, и задачи определения пропорций производства и оптимальных технологий небольшой группы остальных продуктов. Такого рода алгоритмы имеют вполне реальное прикладное значение для ряда подотраслей химической и некоторых других отраслей промышленности.

Рассмотрим сначала процесс согласования для случая, когда конечное потребление продуктов обеих групп задано, и отыскивается решение, обеспечивающее минимум затрат на производство всех продуктов. Задача формулируется следующим образом. Найти

$$\min_{\bar{x}_1, \bar{x}_2} \{\bar{c}_1\bar{x}_1 + \bar{c}_2\bar{x}_2\} \tag{15}$$

при условиях

$$A^{11}\bar{x}_1 + A^{12}\bar{x}_2 + y_1 = \bar{x}_1, \quad \bar{x}_1 \geqslant 0, \quad \bar{x}_2 \geqslant 0, \tag{16}$$

$$A^{21}\bar{x}_1 + A^{22}\bar{x}_2 + y_2 \leqslant \Omega\bar{x}_2, \tag{17}$$

где $y_1$, $y_2$, $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ — вектор-столбцы размерностей соответственно $n_1$, $m$, $n_1$, $n_2$; $\bar{c}_1$, $\bar{c}_2$ — вектор-строки размерностей $n_1$, $n_2$; $A^{11}$, $A^{12}$, $A^{21}$, $A^{22}$, $\Omega$ — матрицы размеров $n_1 \times n_1$, $n_1 \times n_2$, $m \times n_1$, $m \times n_2$, $m \times n_2$ соответственно. При этом все координаты векторов $\bar{c}_1$, $\bar{c}_2$, $y_i$ и элементы матриц $A^{ij}$ и $\Omega$ неотрицательны.

Введенные обозначения имеют следующий содержательный смысл: $\bar{x}_1$ — вектор выпуска продуктов, выпускаемых раздельно и единственным технологическим способом (их всего $n_1$), $\bar{x}_2$ — вектор выпуска комплексных продуктов (их $n_2$), матрица $\Omega$ задает нормативы выхода конкретных продуктов (в количестве $m$) из каждого из комплексных продуктов, матрицы $A^{ij}$ состоят из нормативов затрат продуктов $i$-й группы на продукты $j$-группы, векторы $y_1$, $y_2$ задают конечный спрос, а векторы $\bar{c}_1$, $\bar{c}_2$ — стоимости производства единицы продукции каждого вида.

Для удобства дальнейшего описания введем в задаче (15) — (17) дополнительные переменные и перенесем в равенстве (17) выражение $\Omega x_2$ в левую часть. Получим задачу

$$\min \{c_1 x_1 + c_2 x_2\}, \tag{18}$$

$$D^{11} x_1 + D^{12} x_2 + y_1 = x_1, \tag{19}$$

$$D^{21} x_1 + D^{22} x_2 + y_2 = 0. \tag{20}$$

Здесь $x_2$ — вектор-столбец размерности $n_2 + m$, составленный из координат вектора $\bar{x}_2$ и дополнительных переменных; $c_2$ — вектор-столбец размерности $n_2 + m$, у которого первые $n_2$ координат составляют вектор $\bar{c}_2$, а последние $m$ — нули; $D^{12}$ — матрица размера $n_1 \times (n_2 + m)$, у которой первые $n_2$ столбцов образуют матрицу $A^{12}$, а последние $m$ столбцов — нулевые; $D^{22}$ — матрица размера $m \times (n_2 + m)$, образованная присоединением к матрице $A^{22} - \Omega$ единичной матрицы $I$ порядка $m$. Кроме того

$$D^{11} = A^{11}, \quad D^{21} = A^{21}, \quad \bar{x}_1 = x_1 \text{ и } \bar{c}_1 = c_1.$$

Для решения задачи (18) — (20) формулируется алгоритм, который отличается от описанных в [1, 10] тем, что в нем агрегированный продукт берется равным не натуральной сумме продуктов, а взвешенной сумме. Причем в качестве весов естественно брать двойственные оценки, которые для продуктов, входящих в $x_1$, играют роль цен. Таким образом, продукты предлагается измерять не в натуральном, а в стоимостном выражении, связанном с их двойственными оценками в экстремальной задаче. Заметим попутно, что поскольку эти оценки заранее не известны, для их определения строится одновременно с основным дополнительный итеративный процесс. В результате получается решение исходной и двойственной задач.

Пусть на шаге $\tau$ получены векторы $x_1^\tau \geqslant 0$, $x_2^\tau \geqslant 0$, аппроксимирующие решение прямой задачи, и векторы $e_1^\tau \geqslant 0$, $e_2^\tau \geqslant 0$, аппроксимирующие двойственные оценки ограничений (19) и (20) соответственно ($e_1^\tau$, $e_2^\tau$ — вектор-строки размерности $n_1$, $m$). Предположим, что число $e_1^\tau x_1^\tau \neq 0$. Введем $n_1$-мерный вектор-столбец $p^\tau = \dfrac{1}{e_1^{\tau-1} x_1^\tau} x_1^\tau$, где $e_1^{\tau-1}$ — вектор оценок, полученный на предыдущей итерации.

Рассмотрим задачу

$$\min \{c_1 p^\tau X + c_2 x_2\}, \tag{21}$$

$$e_1^\tau D^{11} p^\tau X + e_1^\tau D^{12} x_2 + e_1^\tau y_1 = X, \quad X \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \tag{22}$$

$$D^{21} p^\tau X + D^{22} x_2 + y_2 = 0, \tag{23}$$

где число $X$ и вектор $x_2$ — неизвестные переменные, причем $X$ означает суммарный (агрегированный) выпуск продукции первой группы, взвешенной пропорционально координатам вектора $e_1^\tau$. Легко видеть, что для оптимального опорного плана задачи (21) — (23) переменная $X$ будет базисной.

Обозначим через $R^\tau$ множество из $m$ индексов базисных переменных вектора $x_2$ в оптимальном опорном плане задачи (21) — (23). Пусть $X^{\tau+1}$, $x_2^{\tau+1}$ — оптимальный опорный план задачи (21) — (23). Положим

$$x_1^{\tau+1} = D^{11} p^\tau X^{\tau+1} + D^{12} x_2^{\tau+1} + y_1. \tag{24}$$

Очередное приближение для двойственного решения получается следующим образом. Сначала находим $e_2^{\tau+1}$ из системы уравнений

$$e_1^\tau D_j^{12} + e_2^{\tau+1} D_j^{22} = -c_{2j}, \quad j \in R^\tau. \tag{25}$$

Здесь $D_j^{12}$, $D_j^{22}$ — столбцы $j$ соответствующих матриц; $c_{2j}$ — координата $j$ вектора $c_2$. Затем $e^{\tau+1}$ определяется по формуле

$$e_1^{\tau+1} = e_1^\tau D_{11} + e_2^{\tau+1} D^{21} + c_1. \tag{26}$$

Разъясним смысл формул (25), (26). Продукты, выпускаемые раздельно и единственным способом (которым соответствует вектор $x_1$), агрегируются с помощью некоторого вектора весов в один продукт $X$. Этот вектор весов естественно брать равным вектору двойственных оценок $e_1^*$ задачи (19). Известно, что вектор оценок $e^* = (e_1^*, e_2^*)$ задачи (18) — (19) удовлетворяет системе уравнений

$$e_1^* D^{11} - e_1^* + e_2^* D^{21} = -c_1, \tag{27}$$

$$e_1^* D_j^{12} + e_2^* D_j^{22} = -c_2, \quad j \in R^*, \tag{28}$$

где $R^*$ — множество индексов базисных координат вектора $x_2$ в оптимальном опорном плане (координаты вектора $x_1$ всегда базисны в этом плане). Поскольку вектор $e^*$ и множество $R^*$ заранее неизвестны, то параллельно процессу (21) — (23) итеративного агрегирования переменных $x^1$ приходится строить итеративный процесс (25), (26), аппроксимирующий $e^*$, причем вместо множества $R^*$ берется множество $R^\tau$. Если $e^\tau$, $x^\tau$ достаточно близки к оптимальному решению, то $R^\tau$ совпадает с $R^*$. Докажем, что неподвижная точка описанного выше процесса является оптимальным решением и, кроме того, приведем достаточные условия локальной сходимости процесса.

**Теорема 2.** *Неподвижная точка описанного выше процесса задает прямое и двойственное решение задачи* (18) — (20).

Пусть $x_1^*$, $x_2^*$, $e_1^*$, $e_2^*$ — неподвижная точка процесса, $R^*$ — множество индексов координат вектора $x_2$, входящих в оптимальный базис задачи (21) — (23). Тогда $p^* = \frac{1}{e_1^* x_1^*} x_1^*$.

Из (24) следует

$$x_1^* = D^{11} p^* X^* + D^{12} x_2^* + y_1, \tag{29}$$

а из (29) и (22) получим: $e_1^* x_1^* = e_1^* D^{11} p^* X^* + e_1^* D^{12} x_2^* + e_1^* y_1 = X^*$, т. е.

$$X^* = e_1^* x_1^*.$$

Значит

$$p^* = \frac{1}{X^*} x_1^*. \tag{30}$$

Отсюда $p^* X^* = x_1^*$. Подставляя это значение в (29), получим

$$x_1^* = D^{11} x_1^* + D^{12} x_2^* + y_1. \tag{31}$$

Кроме того, из (23) и (30) следует

$$D^{21} x_1^* + D^{22} x_2^* + y_2 = 0. \tag{32}$$

Равенства (31) и (32) показывают, что $x_1^*$, $x_2^*$ удовлетворяют условиям задачи. Далее, из (25) и (26)

$$e_1^* D^{11} + e_2^* D^{21} = -c_1 + e_1^*, \tag{33}$$

$$e_1^* D_j^{12} + e_2^* D_j^{22} = -c_{2j}, \quad j \in R^*. \tag{34}$$

Умножив обе части (33) справа на $p^*$ и заметив, что $e_1^* p^* = 1$, получим

$$e_1^* D^{11} p^* + e_2^* D^{21} p^* = -c_1 p^* + 1. \tag{35}$$

Заменим в задаче (21)—(23) индекс $\tau$ на $*$; пусть далее $\lambda$ — оценка первого уравнения (22), а $\mu$ — вектор размерности $m$ оценок уравнений (23). Тогда будет соблюдаться соотношение, вытекающее из признака оптимальности

$$\lambda e_1^* D^{11} p^* + \mu D^{21} p^* = -c_1 p^* + \lambda, \tag{36}$$
$$\lambda e_1^* D_j^{12} + \mu D^{22} = -c_{2j}, \quad j \in R^*, \tag{37}$$
$$\lambda e_1^* D_j^{12} + \mu D^{22} \geqslant -c_{2j}, \quad j \notin R^*. \tag{38}$$

Из равенств (34), (35) следует, что $\lambda = 1$ и $\mu = e_2^*$ удовлетворяют системе (36), (37). В силу невырожденности системы (36), (37) других решений нет. Затем получаем из (38)

$$e_1^* D_j^{12} + e_2^* D_j^{22} \geqslant -c_{2j}, \quad j \notin R^*. \tag{39}$$

Заметим теперь, что в исходной задаче (18)—(20) ни одна из координат вектора $x_1$ любого допустимого решения не равна нулю, т. е. в задаче (15)—(17) или (18)—(20) координаты вектора $x_1$ входят в любой, в том числе и оптимальный, базис. Уравнения (33), (34) и неравенства (39) показывают, что $x_1^*$, $x_2^*$ — оптимальное решение, а $e_1^*$, $e_2^*$ — соответствующее ему двойственное решение. Отметим, что верно и обратное утверждение — всякий оптимальный опорный план является неподвижной точкой процесса (21)—(26). Доказательство этого утверждения несложно и здесь не приводится.

Для формулировки достаточных условий сходимости введем в $n_1$-мерном пространстве норму

$$\|x\|^* = |E^* x|. \tag{40}$$

Здесь $|x| = \sum_{j=1}^{n_1} |x_j|$; $E^*$ — диагональная матрица с элементами $e_{1j}^*$ по диагонали. Тогда для линейного оператора $A = (a_{ij})$ норма будет иметь вид

$$\|A\|^* = |E^* A (E^*)^{-1}|, \qquad |A| = \max_j \sum_{i=1}^{n_1} |a_{ij}|. \tag{41}$$

Обозначим также через $D_{R^*}^{12}$ и $D_{R^*}^{22}$ матрицы, составленные из столбцов $D_j^{12}$ и $D_j^{22}$ соответственно для $j \in R^*$.

**Теорема 3.** *Пусть $x_1^*$, $x_2^*$ — единственное и невырожденное оптимальное решение задачи* (18)—(20), *$e_1^*$, $e_2^*$ — соответствующее двойственное решение, причем $e_{1j}^* \neq 0$, $j = 1, 2, \ldots, n_1$.*

*Предположим, что $(D_{R^*}^{22})^{-1}$ существует, и рассмотрим матрицу $D$ размера $n_1 \times n_1$ и $n_1$-мерный вектор $\beta$*

$$D = D^{11} - D_{R^*}^{12} (D_{R^*}^{22})^{-1} D^{21}, \tag{42}$$
$$\beta = y_1 - D_{R^*}^{12} (D_{R^*}^{22})^{-1} y_2. \tag{43}$$

*Пусть также $\beta \geqslant 0$, $\|D\|^* < {}^1/_2$. Тогда описанный выше процесс локально сходится.*

В теореме 3, как и в теореме 1, доказывается лишь локальная сходимость, т. е. доказывается, что точка $x_1^*$, $x_2^*$, $e_1^*$, $e_2^*$ обладает такой окрестностью, что для любого начального приближения из этой окрестности последовательность $\{x_1^\tau, x_2^\tau, e_1^\tau, e_2^\tau\}$ сходится к оптимальному решению $x_1^*$, $x_2^*$, $e_1^*$, $e_2^*$.

Заметим сначала, что на каждом шаге нам достаточно знать $p^\tau$, $e_1^{\tau-1}$, $e_1^\tau$, так как через них определяется $x_1^{\tau+1}, x_2^{\tau+1}, e_1^{\tau+1}\ e_2^{\tau+1}$. Поэтому достаточно рассматривать лишь окрестности точек $p^*$, $e_1^*$. Введем в $n_1$-мерном пространстве норму, двойственную к $\|\cdot\|^*$

$$\|e\|_* = \|e(E^*)^{-1}\|_\infty, \qquad \|e\|_\infty = \max_j |e_j|.$$

По условию решение задачи (18)–(20) единственно и невырожденно (т. е. базисные переменные отличны от нуля). Поэтому таково же и решение задачи (21)–(23) для $p = p^*$, $e_1 = e_1^*$. Следовательно, можно указать такие окрестности $V_{p*}$ и $V_{e*_1}$ точек $p^*$ и $e_1^*$, что для любой точки $p \in V_{p*}$ и $e_1 \in V_{e_1^*}$ базис задачи (20)–(23) останется тем же. Пусть $V_{p^*} = \{p\colon \|p-p^*\|^* < \varepsilon\}$, $V_{e_1^*} = \{e_1\colon \|e_1 - e_1^*\|_* > \varepsilon^1\}$. Пусть также $p^\tau \in V_{p^*}$; $e_1^{\tau-1}$, $e_1^\tau \in V_{e_1^*}$ и $\hat{x}_2^{\tau+1}$ — вектор, составленный из базисных координат вектора $x_2^{\tau+}$. Тогда из (22) и (23) получаем

$$e_1^\tau D^{11} p^\tau X^{\tau+1} + e_1^\tau D_{R^*}^{12} \hat{x}_2^{\tau+1} + y_1 = X^{\tau+1}, \tag{44}$$

$$D^{21} p^\tau X^{\tau+1} + D_{R^*}^{22} \hat{x}_2^{\tau+1} + y_2 = 0 \tag{45}$$

Выражение $\hat{x}_2^{\tau+1}$ из (45) подставляя в (44)

$$X^{\tau+1} = \frac{e_1^\tau \beta}{1 - e_1^\tau D p^\tau}, \tag{46}$$

где $D$ определена в (42), $\beta$ — в (43). Представляя формулу (24) в виде $x_1^{\tau+1} = D^{11} p^\tau X^{\tau+1} + D_{R^*}^{12} \hat{x}_2^{\tau+1} + y_1$ и подставляя в нее $\hat{x}_2^{\tau+1}$ из (45), получим

$$x_1^{\tau+1} = D p^\tau X^{\tau+1} + \beta. \tag{47}$$

Из (45) и (47) будем иметь

$$e_1^\tau x_1^{\tau+1} = e_1^\tau D p^\tau X^{\tau+1} + e_1^\tau \beta = \frac{c_1^\tau D p^\tau}{1 - e_1^\tau D p^\tau} e_1^\tau \beta + e_1^\tau \beta = \frac{e_1^\tau \beta}{1 - e_1^\tau D p^\tau} = X^{\tau+1}.$$

Итак

$$e_1^\tau x_1^{\tau+1} = X^{\tau+1}. \tag{48}$$

Тогда

$$p^{\tau+1} = \frac{x_1^{\tau+1}}{e_1^\tau x_1^{\tau+1}} = \frac{x_1^{\tau+1}}{X^{\tau+1}}, \tag{49}$$

откуда

$$p^{\tau+1} = \frac{D p^\tau X^{\tau+1} + \beta}{X^{\tau+1}} = D p^\tau + \frac{\beta}{X^{\tau+1}} = D p^\tau + \frac{\beta}{e_1^\tau \beta}(1 - e_1^\tau D p^\tau);$$

$$p^{\tau+1} = \left(I - \frac{1}{e_1^\tau \beta} \beta e_1^\tau\right) D p^\tau + \frac{\beta}{e_1^\tau \beta}, \tag{50}$$

где $I$ — единичная матрица. Таким образом, для данного $e_1^\tau$ переход от $p^\tau$ к $p^{\tau+1}$ задается линейным оператором. Нетрудно проверить, что для любого $\delta$ можно указать такую окрестность $W_{e_1^*}(\delta)$ точки $e_1^*$, что норма матриц

$$\left\| \frac{1}{e_1^\tau \beta} \beta e_1^\tau \right\|^* < 1 + \delta \text{ и } \left\| I - \frac{1}{e_1^\tau \beta} \beta e_1^\tau \right\|^* < 2 + \delta.$$

для $e_1^\tau \in W_{e_1^*}(\delta)$.

Поскольку $\|D\|^* < 1/2$, то существует окрестность $W_{e_1^*}$ точки $e_1^*$ такая, что

$$\left\| \left( I - \frac{1}{e_1^\tau \beta} \beta e_1^\tau \right) D \right\|^* < 1 \text{ для } e_1^\tau \in W_{e_1^*}.$$

Далее, из (25), (26) следует

$$e_1^{\tau+1} = e_1^\tau D + \gamma, \tag{51}$$

где $\gamma$ — некоторый фиксированный вектор.

Пусть теперь $e_1^\tau \in W_{e_1^*}$, $p^\tau \in V_{p^*}$. Тогда операторы преобразований $p^\tau \to p^{\tau+1}$ и $e_1^\tau \to e_1^{\tau+1}$ являются сжимающими, а значит $e_1^{\tau+1} \in W_{e_1^*}$, $p^{\tau+1} \in V_{p^*}$. Тем самым показано, что смены оптимального базиса при решении задачи (21)—(23) не будет и процесс сходится. Теорема 3 доказана.

Данный алгоритм является модификацией алгоритма, приведенного в [10], который работает в более узкой области и отличается от вышеописанного тем, что агрегированный продукт там — простая сумма соответствующих конкретных продуктов, иными словами, вектор $e_1^\tau \equiv (1, 1, \ldots, 1)$. Действительно, если в описанном алгоритме не пересчитывать вектор $e_1^\tau$, т. е. не применять формулы (25), (26), а взять вместо $e_1^\tau$ некоторый постоянный вектор $e_1$, то получим, по существу, алгоритм из [10] (путем соответствующего изменения единиц измерения или масштабов).

При практическом счете целесообразно сочетать оба алгоритма следующим образом. Сначала делается некоторое число шагов с постоянным вектором $e_1^0$ (взятым из априорных соображений) до выхода на некоторую неподвижную точку $x_1^1$, $x_2^1$. Затем при фиксированных $x_1^1$, $x_2^1$ делается некоторое число итераций пересчета вектора оценок по формулам (25), (26). Обозначим полученную неподвижную точку в пространстве оценок через $e_1^1$, $e_2^1$. Затем сделаем еще одну итерацию алгоритма с вектором оценок $e_1^1$. Если точка $x_1^1$, $x_2^1$ оказалась неподвижной для данной итерации, то она является точкой оптимума по теореме 2. В противном случае делается еще некоторое число итераций с постоянным $e_1^1$ и т. д.

## 3. ОБОБЩЕНИЕ ИТЕРАТИВНОГО АГРЕГИРОВАНИЯ ДЛЯ МОДЕЛИ ОПТИМАЛЬНОГО МЕЖПРОДУКТОВОГО БАЛАНСА, УЧИТЫВАЮЩЕЙ НАЛИЧИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ПРОИЗВОДСТВ И РАЗНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ У ГРУППЫ ПРОДУКТОВ

Модель оптимального межпродуктового баланса, учитывающая наличие комплексных производств и разных технологий у группы продуктов, объединяет особенности моделей, рассмотренных в предшествующих разделах настоящей статьи. В этой модели возможности производства описываются теми же матрицами $A^{ij}$, что в задаче (15)—(17), однако имеются дополнительные ограничения по $s$-м видам ресурсов и, кроме того, конечный выпуск продуктов не фиксирован, а зависит от уровня доходов $v$, который и должен быть максимизирован. Математическая формулировка задачи следующая

$$\max v, \tag{52}$$

$$A^{11}x_1 + A^{12}x_2 + \tilde{y}_1(v) = x_1, \quad x_1 \geqslant 0; \quad x_2 \geqslant 0, \tag{53}$$

$$A^{21}x_1 + A^{22}x_2 + \tilde{y}_2(v) \leqslant \Omega x_2, \tag{54}$$

$$B^1x_1 + B^2x_2 \leqslant b. \tag{55}$$

Здесь в дополнение к введенным ранее обозначениям $y_1(v)$, $\tilde{y}_2(v)$ — вектор-функции, координаты которых — неубывающие, непрерывно дифференцируемые функции скалярного аргумента $v$ размерности $n_1$ и $m$ соответственно, $(\tilde{y}_1(0) = \tilde{y}_2(0) = 0)$; $B^1$, $B^2$ — матрицы размеров $s \times n_1$ и $s \times n_2$ соответственно, $(B^1, B^2 \geqslant 0)$; $b$ — вектор-столбец размерности $s (b > 0)$.

В экономических терминах обозначения имеют следующий смысл: $v$ — уровень доходов; $y_i(v)$ — вектор переменной части потребления продуктов $i$-й группы, зависящий от уровня дохода $v$; $b$ — вектор объемов ресурсов; $B^i$ — матрица нормативов затрат ресурсов на производство продуктов $i$-й группы.

Потребуем дополнительно, чтобы система линейных ограничений

$$A^{11}x_1 + A^{12}x_2 + h_1 = x_1, \quad x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \tag{56}$$

$$A^{21}x_1 + A^{22}x_2 + h_2 \leqslant \Omega x_2 \tag{57}$$

была совместной при любых неотрицательных векторах $h_1$, $h_2$.

При сделанном предположении матрица $(I - A^{11})^{-1}$ существует и все ее элементы неотрицательны. Обозначим $G = (I - A^{11})^{-1}$.

**Лемма 1.** *Задача* (52) — (55) *не имеет локальных максимумов.*

Для доказательства леммы выразим из системы уравнений (53) $x_1$

$$x_1 = GA^{12}x_2 + G\tilde{y}_1(v) \tag{58}$$

и подставим в остальные ограничения (54), (55) вместо $x_1$ в правую часть (58). Получим задачу, эквивалентную исходной

$$\max v, \tag{59}$$

$$\hat{A}x_2 \geqslant \hat{y}(v), \tag{60}$$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \Omega - A^{21}GA^{12} - A^{22} \\ -B^1GA^{12} - B^2 \end{pmatrix}, \tag{61}$$

$$\hat{y}(v) = \begin{pmatrix} \tilde{y}_2(v) + A^{21}G\tilde{y}_1(v) \\ B^1G\tilde{y}_1(v) - b \end{pmatrix}, \tag{62}$$

где $\hat{A}$ — матрица размеров $(m + s) \times n_2$; $\hat{y}(v)$ — вектор-функция размерности $m + s$.

Из того, что $A^{ij} \geqslant 0$, $G \geqslant 0$, $B^1 \geqslant 0$ и $\tilde{y}_i(v)$ — неубывающие функции, следует, что $\hat{y}(v)$ — также неубывающая вектор-функция аргумента $v$. Для доказательства леммы достаточно показать, что задача (59), (60) обладает следующим свойством: любые две допустимые точки $(x_2', v')$ и $(x_2'', v'')$ можно соединить линией, вдоль которой целевая функция монотонна. Пусть $v' \leqslant v''$, тогда точка $(x_2'', v')$ будет допустимой, поскольку

$$\hat{A}x_2'' \geqslant \hat{y}(v'') \geqslant \hat{y}(v'). \tag{63}$$

Точки $x_2'$ и $x_2''$ принадлежат одному и тому же $n_2$-мерному многограннику (в пространстве точек $x_2$), задаваемому условиями

$$\hat{A}x_2 \geqslant \hat{y}(v'), \tag{64}$$

значит, их можно соединить отрезком $x_2(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 0{,}5$, $x_2(0) = x_2'$, $x_2(0{,}5) = x_2''$, лежащем в этом же многограннике (64), поэтому весь отрезок $(x_2(t), v')$, $0 \leqslant t \leqslant 0{,}5$, состоит из допустимых точек (вдоль этого отрезка целевая функция $v$ постоянна). Далее точки $(x_2'', v')$ и $(x_2'', v'')$ очевидным образом соединяются отрезком, состоящим из допустимых точек и вдоль которого целевая функция $v$ не убывает. Лемма 1 доказана.

Линеаризуем исходную задачу (52)—(55) в точке максимума $(x_1^*, x_2^*, v^*)$

$$\max v, \tag{65}$$

$$A^{11}x_1 + A^{12}x_2 + \tilde{y}_1'(v^*)(v - v^*) + \tilde{y}_1(v^*) = x_1, \; x_1 \geqslant 0, \; x_2 \geqslant 0, \tag{66}$$

$$A^{21}x_1 + A^{22}x_2 + \tilde{y}'_2(v^*)(v - v^*) + \tilde{y}_2(v^*) \leqslant \Omega x_2, \tag{67}$$

$$B^1x_1 + B^2x_2 \leqslant b, \tag{68}$$

где

$$\tilde{y}_i'(v^*) = d\tilde{y}_i(v^*) / dv.$$

Точка $(x_1^*, x_2^*, v^*)$ является также и оптимальным решением задачи (65)—(68). Это следует из того факта, что необходимые условия максимума в форме Лагранжа совпадают для обеих задач (52)—(55) и (65)—(68), а кроме того, для задачи линейного программирования условия Лагранжа являются и достаточными. Отметим также, что двойственные оценки для обеих задач совпадают.

Сформулируем алгоритм итеративного агрегирования для задачи (52)—(55). Введем сначала в (52)—(55) дополнительные переменные и перенесем в (54) $\Omega x_2$ в левую часть, аналогично тому, как это было сделано в (18), (19). Получим задачу

$$\max v, \tag{69}$$

$$D^{11}x_1 + D^{12}x_2 + y_1(v) = x_1, \tag{70}$$

$$D^{21}x_1 + D^{22}x_2 + y_2(v) = 0, \tag{71}$$

где $x_2$ — вектор-столбец размерности $n_2 + m + s$, составленный из координат ранее введенного вектора $x_2$, а также из $m$ дополнительных переменных к ограничениям (54) и из $s$ дополнительных переменных к ограничениям (55); $D^{11} = A^{11}$; $D^{12}$ — матрица размеров $n_1 \times (n_2 + m + s)$, у которой первые $n_2$ столбцов образуют матрицу $A^{12}$, а последние $m + s$ столбцов нулевые; $D^{21} = \begin{pmatrix} A^{21} \\ B_1 \end{pmatrix}$ — $(m + s) \times n_1$ матрица, $D^{22} = \left(\begin{array}{c|c|c} A^{22} - \Omega & I_m & 0 \\ B_2 & 0 & I_s \end{array}\right)$ — $(m + s) \times (n_2 + m + s)$ — матрица, где $I_m$, $I_s$ — соответственно единичные матрицы порядков $m$ и $s$; $y_1(v) = \tilde{y}_1(v)$; $y_2(v)$ — $m + s$-мерный вектор-столбец, у которого первые $m$ координат составляют вектор $\tilde{y}_2(v)$, а последние $s$ координат — нули.

Предлагаемый алгоритм для решения задачи (69)—(71) в основном аналогичен алгоритму решения задачи (18), (19), поэтому изложим его кратко. Пусть на $\tau$-м шаге получены вектор-столбцы $x_1^\tau$, $x_2^\tau$ и вектор-строки $e_1^\tau$, $e_2^\tau$ (последний размерности $m + s$). Здесь $e_1^\tau \geqslant 0$, $e_2^\tau \geqslant 0$. Пусть $p^\tau = \dfrac{1}{e_1^{\tau-1}x_1^\tau} x_1^\tau$. Рассмотрим задачу (аналогичную (21)—(24))

$$\max v, \tag{72}$$

$$e_1^\tau D^{11}p^\tau X + e_1^\tau D^{12}x_2 + e_1^\tau y_1(v) = X, \; X \geqslant 0, \; x_2 \geqslant 0, \tag{73}$$

$$D^{21}p_\tau X + D^{22}x_2 + y_2(v) = 0, \tag{74}$$

где $X$, $x_2$, $v$ — неизвестные, причем $X$, $x_2$ означают то же, что в задаче (21)—(23); $v$ — объем доходов в агрегированной задаче. Обозначим через $R^\tau$ множество $m + s + 1$ индексов базисных переменных вектора $x_2$ в оптимальном опорном плане задачи (72) — (74). Пусть $X^{\tau+1}$, $x_2^{\tau+1}$, $v^{\tau+1}$ — оптимальное решение задачи (72)—(74). Положим

$$x_1^{\tau+1} = D^{11}p^\tau X^{\tau+1} + D^{12}x_2^{\tau+1} + y_1(v^{\tau+1}). \tag{75}$$

$(\tau+1)$-приближение для оценок получается независимо следующим образом. Сначала находим $m+s$-мерный вектор $e_{\{\tau}$ как решение системы $m+s$ уравнений

$$\begin{cases} e_1^\tau D_j^{12} + e_2^{\tau+1}D_j^{22} = 0, & j \in R^\tau, \\ e^\tau y_2'(v^{\tau+1}) + e_2^{\tau+1}\, y_2'(v^{\tau+1}) = 1, \end{cases} \tag{76}$$

где $D_j^{ik}$ — столбец $j$ матрицы $D^{ik}$. Затем $e_1^{\tau+1}$ определяем по формуле

$$e_1^{\tau+1} = e_1^\tau D^{11} + e_2^{\tau+1}D^{21}. \tag{77}$$

**Теорема 4.** *Неподвижная точка описанного выше процесса* (72)—(77) *является прямым и двойственным решением задачи* (69)—(71).

Чтобы сформулировать достаточные условия сходимости, введем следующие обозначения: $x_1^*$, $x_2^*$, $v^*$ — оптимальное решение задачи (69)—(71); $e_1^*$ — вектор двойственных оценок ограничений (70); $R^*$ — множество $m+$ $+s-1$ индекса базисных координат вектора $x_2$, входящих в оптимальное решение задачи (69)—(71); $D_{R^*}^{12}$, $D_{R^*}^{22}$ — соответственно матрицы размеров $n_1 \times (m+s)$ и $(m+s)\times(m+s)$. Первая матрица составлена из $m+s-1$ столбца $D_j^{12}$, $j \in R^*$, и столбца $y_1'(v^*)$, вторая — из $m+s-1$ столбца $D_j^{22}$, $j \in R^*$, и столбца $y_2'(v^*)$.

**Теорема 5.** *Пусть* $x_1^*$, $x_2^*$, $v^*$ — *невырожденное оптимальное решение задачи* (69) — (71), (*т. е. линейная задача* (65) — (68) *имеет единственное невырожденное решение*). *Предположим, что* $(D_{R^*}^{22})^{-1}$ *существует и рассмотрим* $n_1 \times n_1$ *матрицу* $D$ *и* $n_1$*-мерный вектор* $\beta$

$$D = D^{11} - D_{R^*}^{12}(D_{R^*}^{22})^{-1}D^{21},$$

$$\beta = y_1(v^*) - y_1(v^*)v^* - D_{R^*}^{12}(D_{R^*}^{21})^{-1}y_2(v^*).$$

*Если* $\beta \geqslant 0$ *и* $\|D\|^* < 1/2$ (*где норма* $\|\cdot\|^*$ *задавалась ранее формулой* (41)), *то описанный выше процесс локально сходится.*

Доказательство теорем 4 и 5 основано на аппроксимации исходной задачи ее линеаризацией (65) — (68) и по существу повторяет доказательство теорем 2 и 3, поэтому мы не будем его здесь приводить.

Настоящая статья выполнена в рамках научно-исследовательского семинара НИИ ЦСУ СССР по проблемам агрегирования.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Л. М. Дудкин, Э. Б. Ершов. Межотраслевой баланс и материальные балансы отдельных продуктов. Плановое хозяйство, 1965, № 5.
2. Б. А. Щенников. Блочный метод решения систем линейных уравнений большой размерности. Экономика и матем. методы, 1965, т. I, вып. 6.
3. Б. А. Щенников. Метод агрегирования для решения системы линейных уравнений. Докл. АН СССР, 1967, т. 173, № 4.
4. Л. А. Хиздер. Доказательство сходимости процесса итеративного агрегирования в общем случае. В сб. Исследования по математической экономии и смежным вопросам. М., Изд-во МГУ, 1971.
5. Б. А. Шенников. Применение методов итеративного агрегирования для решения систем линейных уравнений. Экономика и матем. методы, 1966, т. II, вып. 5.
6. В. Л. Вен, А. И. Эрлих. Некоторые вопросы агрегирования линейных моделей. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1970, № 5.

7. Л. М. Дудкин. Оптимальный материальный баланс народного хозяйства. Модели для текущего и перспективного планирования. М., «Экономика», 1966.
8. Л. М. Дудкин. Математические методы согласования расчетов потребности в рабочей силе различных профессий и квалификаций с моделью оптимального материального баланса народного хозяйства. В сб. Экономические проблемы подготовки квалифицированных рабочих кадров в современных условиях. М., Изд-во МГУ, 1967.
9. Л. М. Дудкин, Г. С. Слуцкер. Агрегирование и дезагрегирование комплексных продуктов в модели межотраслевого баланса, учитывающей наличие комплексных производств. Экономика хим. пром-сти, 1967, № 6.
10. Л. М. Дудкин. Агрегирование и дезагрегирование продуктов, получаемых раздельно и единственным технологическим способом, в модели межотраслевого баланса, учитывающей наличие комплексных производств. В сб. Экономические проблемы развития и размещения химической промышленности. М., «Наука», 1968.
11. Л. М. Дудкин. Числовая иллюстрация метода совмещенного агрегирования и дезагрегирования комплексных продуктов и продуктов, получаемых раздельно и единственным технологическим способом. Экономика хим. пром-сти, 1969, № 6.
12. И. Я. Вахутинский, Л. М. Дудкин, Б. А. Щенников. Классическое и итеративное агрегирование в системе оптимальных народнохозяйственных расчетов. В сб. I Всесоюзн. конфер. по оптимальному планированию и управлению народным хозяйством. М., 1971 (ЦЭМИ АН СССР).

Поступила в редакцию
30 XII 1971