

ОБ ОДНОЙ ЛАГОВОЙ МОДЕЛИ РЕАЛИЗАЦИИ КАПИТАЛЬНЫХ ВЛОЖЕНИЙ

М. И. БРИН, Т. С. РЫЧКОВА

(Москва)

Экономические процессы, связанные с реализацией капиталовложений, т. е. с превращением их во вводы основных производственных фондов, могут быть описаны уравнениями с лаговым запаздыванием переменных. Действительно, капиталовложения некоторого года превращаются во вводы основных фондов не сразу (в том же году), а постепенно, в течение ряда лет. Они делятся на составные части, первая из которых превращается во вводы основных фондов в том же году, вторая — во вводы в следующем году, третья — в третьем и т. д. В реальных инвестиционных процессах всегда существует максимальный срок запаздывания вводов основных производственных фондов относительно соответствующих капиталовложений. Произвольная лаговая модель с конечным запаздыванием имеет вид

$$y_t = p_0 x_t + p_1 x_{t-1} + \dots + p_m x_{t-m}. \quad (1)$$

В дальнейшем y_t — это вводы основных производственных фондов в году t ; а x_t — капиталовложения того же года.

Возникают определенные трудности в исследовании уравнений типа (1), поскольку обычно имеющихся в наличии статистических данных недостаточно для получения оценок всех коэффициентов $p_0, p_1, \dots, p_m$ (1). Кроме того, так как величины $x_t, x_{t-1}, \dots, x_{t-m}$, вообще говоря, сильно зависимы (они являются сдвигами одного и того же случайного процесса x_t), то более или менее достоверно оценить коэффициенты $p_0, p_1, \dots, p_m$ трудно или даже невозможно, поэтому необходимо ввести различного рода ограничения на эти коэффициенты. Естественно предположить, что все

коэффициенты $p_i \geq 0$ при $i = 0, 1, \dots, m$, а также $\sum_{i=0}^m p_i = 1$. Это соответ-

ствует делению капиталовложений некоторого года на составные части. Примем всю сумму капиталовложений года t за 100%. Тогда доля капиталовложений, превращающаяся во вводы в том же году, составит p_0 100%, доля капиталовложений, превращающаяся во вводы в году $t + i$, будет p_i 100%. Таким образом, при исследовании процесса превращения капиталовложений во вводы основных производственных фондов с помощью уравнения типа (1) будем исходить из того, что коэффициенты $p_0, p_1, \dots, p_m$ задают дискретное вероятностное распределение.

Проблеме сокращения числа оцениваемых параметров уделяется большое внимание в эконометрической литературе. Так, в [1] предполагается, что коэффициенты $p_0, p_1, \dots, p_m$ образуют убывающую арифметическую прогрессию; в [2] и [3] — что последовательность $\{p_i\}$ — убывающая геометрическая прогрессия. Проблемы оценивания параметров геометрически распределенных лаговых моделей освещены в [4] и [5]. В [6] предлагается использовать отрицательное биномиальное или так называемое «паска-

левское» распределение

$$p_k = (1 - c)^{r+1} C_{r+h}^r c^k. \quad (2)$$

При таких распределениях число параметров, подлежащих оценке, уменьшается до двух или трех. Априорные предположения о характере вероятностного распределения, задаваемого числами $\{p_k\}$, которые допускаются в названных работах, накладывают довольно жесткие ограничения на коэффициенты $\{p_k\}$ и, следовательно, сужают класс рассматриваемых задач.

Если максимальное запаздывание m в (1) невелико, то коэффициенты $p_0, p_1, \dots, p_m$ можно определить с помощью обычных регрессионных методов. Когда m относительно велико, то применение этих методов затруднено из-за недостаточности статистических данных (что очевидно), а также мультиколлинеарности величин $x_t, x_{t-1}, \dots, x_{t-m}$, которая вызывает увеличение длин доверительных интервалов для оценок коэффициентов $p_0, p_1, \dots, p_m$ в (1). Например, если динамические ряды x_t и y_t хорошо приближаются параболами, то длины доверительных интервалов неограниченно растут с ростом точности приближения. Динамические ряды капиталовложений и вводов основных фондов хорошо приближаются параболами, поэтому число неизвестных параметров, подлежащих оценке, должно быть меньше или равно трем.

Выпишем условия, которым удовлетворяет функция $p(k) = p_k, k = 0, 1, \dots, m$: 1) $p(k) \geq 0, k = 0, 1, \dots, m$, 2) $p(k_1) \geq p(k_2)$ при $0 \leq k_1 \leq k_2 \leq m$. Первое условие, очевидно, имеет место; второе соответствует тому, что доля капиталовложений некоторого года, превращающаяся во вводы основных производственных фондов в том же году, больше доли капиталовложений, превращающейся во вводы в следующем году; последняя, в свою очередь, больше доли тех капиталовложений, которые превращаются во вводы в третьем году, и т. д. Здесь отсутствует третье условие:

$$\sum_{k=0}^m p_k = 1 \text{ по следующим причинам. Во-первых, процесс превращения ка-}$$

питаловложений во вводы основных производственных фондов может быть связан с некоторыми потерями, т. е. общая стоимость вновь введенных фондов априорно бывает меньше соответствующей суммы капиталов-

вложений. Во-вторых, вывод о том, что $\sum_{k=0}^m p_k = 1$, можно сделать только

в том случае, когда (1) справедливо для всех t в некотором достаточно большом промежутке, т. е. в течение ряда лет. На самом деле, значения коэффициентов $\{p_k\}$ могут оказаться различными при рассмотрении разных периодов времени, поэтому упомянутое условие не будет выполнено.

Функцию $p(k) = p_k$ на отрезке $[0, m]$ можно равномерно приблизить многочленом. Рассмотрим приближение многочленом первой степени: $\bar{p}(k) = ak + b$, причем $b > 0$ и $a \leq 0$. Поскольку $p(k) \geq 0$, естественно ограничиться рассмотрением таких функций $\bar{p}(k)$, что $\bar{p}(k) \geq 0, k = 0, 1, \dots, m$. Это, в свою очередь, соответствует определенным ограничениям на коэффициенты a и b . А именно, $a \leq 0$ и $b \geq -am$. Итак, поставим задачу поиска чисел a, b и m , удовлетворяющих ряду вышеописанных ограничений и обращающих в минимум критерияльную функцию

$$\sigma^2(a, b, m) = \frac{1}{N-m} \sum_{t=m+1}^N \left[\sum_{k=0}^m (ak + b) x_{t-k} - y_t \right]^2. \quad (3)$$

Легко видеть, что критериальная функция $\sigma^2(a, b, m)$ является квадратичной формой по переменным a и b . Зафиксируем m . Требуется найти минимум квадратичной формы $\sigma^2(a, b, m)$ по a и b в области D : $a \leq 0$, $b \geq -am$. Можно показать, что критериальная функция $\sigma^2(a, b, m)$ невырождена и положительно определена (она является квадратичной формой). Следовательно, функция $\sigma^2(a, b, m)$ имеет единственную точку $(\tilde{a}, \tilde{b})$ локального минимума на плоскости $-\infty < a < \infty$, $-\infty < b < \infty$. Если эта точка лежит в области D , то числа $\tilde{a}$, $\tilde{b}$ — искомые оценки коэффициентов a , b .

Рассмотрим другой случай, когда точка $(\tilde{a}, \tilde{b})$ не лежит в области D . Поскольку $\sigma^2(a, b, m)$ — положительно определенная квадратичная форма, она является выпуклой функцией переменных a , b и, следовательно (см. [7]), точка ее минимума в области D либо является точкой локального минимума, либо лежит на границе этой области. Граница области D состоит из двух лучей: первый — $a = 0$, $b \geq 0$, второй — $b = -am$, $b \geq 0$. Функция $\sigma^2(a, b, m)$ на каждом из лучей есть квадратичная функция одного переменного. Поэтому общую точку минимума критериальной функции $\sigma^2(a, b, m)$ на обоих лучах легко найти. Итак, алгоритм определения точки минимума $(\tilde{a}, \tilde{b})$ функции $\sigma^2(a, b, m)$ в области D сводится к следующему:

- 1) нахождение точки локального минимума $(\tilde{a}, \tilde{b})$;
- 2) проверка условий $\tilde{a} \leq 0$, $\tilde{b} \geq -\tilde{a}m$;
- 3) если условия пункта 2) выполнены, то искомая точка $(\tilde{a}, \tilde{b})$ является точкой $(\tilde{a}, \tilde{b})$;
- 4) если условия пункта 2) не выполнены, то необходимо найти: а) точку (a_1, b_1) — минимума функции $\sigma^2(a, b, m)$ на луче $a = 0$, $b \geq 0$; б) точку (a_2, b_2) — минимума функции $\sigma^2(a, b, m)$ на луче $b = -am$, $b \geq 0$; в) общую точку (a_3, b_3) — минимума функции $\sigma^2(a, b, m)$ на границе D ;
- 5) искомая точка $(\tilde{a}, \tilde{b})$ минимума функции $\sigma^2(a, b, m)$ в области D есть точка (a_3, b_3) .

Таким образом, можно получить точки $(\tilde{a}, \tilde{b}, m)$ минимума соответствующих функций $\sigma^2(a, b, m)$ в областях D_m при $m = 1, 2, \dots, m_0$. Оценки $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{m}$ коэффициентов a , b и максимального запаздывания m соответствуют минимальному из m_0 чисел: $\sigma^2(\tilde{a}, \tilde{b}, m)$, $m = 1, 2, \dots, m_0$. Расчеты, проведенные на БЭСМ-4, привели к результатам, представленным в табл. 1, при этом для $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{m}$ и σ^2 были найдены следующие значения, соответственно: $-0,1319$; $0,4527$; 2 ; $1,0785$.

Теперь (1) можно записать так

$$\hat{y}_t = 0,4527x_t + 0,3208x_{t-1} + 0,1891x_{t-2}. \quad (4)$$

Рассмотрим приближение функции $p(k)$ многочленом второй степени: $p(k) = ak^2 + b$, $b > 0$, $a \leq 0$.

Аналогично описанному случаю линейной аппроксимации построим критериальную функцию $\tilde{\sigma}^2(a, b, m)$. Алгоритм поиска ее минимума мало отличается от уже приведенного алгоритма поиска точки минимума функции $\sigma^2(a, b, m)$.

Результаты расчетов, проведенных на БЭСМ-4, приведены в табл. 2, при этом для a , b , m и σ^2 были найдены следующие значения, соответственно: $-0,0457$; $0,3991$; 2 ; $1,0946$.

Уравнение (1) имеет вид

$$\hat{y}_t = 0,3991x_t + 0,3534x_{t-1} + 0,2163x_{t-2}. \quad (5)$$

Приближение функции $p(k) = p_k$ параболой $ak^2 + b$ не является наилучшей аппроксимацией этой функции многочленом второй степени (ко-

Таблица 1

Годы	Капиталовложе- ния, млрд. руб. x_t	Вводы основных производственных фондов, млрд. руб. y_t	Теоретическое значение $\hat{y}_t$	Ошибка $\Delta_t = y_t - \hat{y}_t$
1950	9,6	11,00		
1951	10,8	10,81		
1952	12,1	10,59	10,76	-0,17
1953	12,7	11,58	11,67	-0,09
1954	15,0	13,56	13,15	0,32
1955	16,5	14,66	14,68	-0,02
1956	19,1	16,57	16,78	-0,21
1957	21,6	18,54	19,02	-0,43
1958	24,5	23,20	21,63	1,57
1959	27,4	24,40	24,35	0,05
1960	30,8	27,30	27,36	-0,06
1961	31,9	28,10	29,50	-1,40
1962	34,0	31,90	31,45	0,45
1963	36,1	35,40	33,30	2,10
1964	39,4	37,80	35,84	1,96
1965	42,7	39,20	38,79	0,41
1966	45,8	41,80	41,88	-0,08
1967	49,4	45,20	45,13	0,07
1968	53,6	46,50	48,77	-2,27
1969	55,8	50,99	51,79	-0,80

Таблица 2

Годы	Капиталовложе- ния, млрд. руб. x_t	Вводы основных производственных фондов, млрд. руб. y_t	Теоретическое значение $\hat{y}_t$	Ошибка $\Delta_t = y_t - \hat{y}_t$
1950	9,6	11,00		
1951	10,8	10,81		
1952	12,1	10,59	10,72	-0,13
1953	12,7	11,58	11,66	-0,08
1954	15,0	13,56	13,09	0,47
1955	16,5	14,66	14,63	0,03
1956	19,1	16,57	16,70	-0,13
1957	21,6	18,54	18,94	-0,40
1958	24,5	23,20	21,54	1,66
1959	27,4	24,40	24,27	0,13
1960	30,8	27,30	27,28	0,02
1961	31,9	28,10	29,55	-1,45
1962	34,0	31,90	31,51	0,39
1963	36,1	35,40	33,33	2,07
1964	39,4	37,80	35,84	1,96
1965	42,7	39,20	38,78	0,42
1966	45,8	41,80	41,90	-0,10
1967	49,4	45,20	45,14	0,06
1968	53,6	46,50	48,76	-2,26
1969	55,8	50,99	51,90	-0,91

эффект при k в первой степени заранее приравняется к нулю). Если в качестве приближающего многочлена вместо $ak^2 + b$ рассмотреть общую параболу $ak^2 + bk + c$, то среднеквадратичное отклонение σ^2 уменьшится несущественно (поскольку максимальное запаздывание вводов основных производственных фондов относительно образующих их капитальных вложений в обоих случаях приближения функции лагового распределения многочленами $ak + b$ и $ak^2 + b$ невелико: $m = 2$).

Таким образом, получены две лаговые модели инвестиционных процессов: с линейной и квадратичной функциями лагового распределения. Согласно критериям наименьшего, среднего и среднеквадратичного отклонений теоретического ряда вводов от известной статистики, а также в соответствии с критерием наибольшего коэффициента парной корреляции между теоретическим рядом и статистикой, наилучшей следует считать лаговую модель с линейным распределением запаздывания (см. (4)).

ЛИТЕРАТУРА

1. I. Fisher. Note on a Short-Cut Method for Calculating Distributed Lags. Bulletin de l'Institut International de Statistique, N. Y., 1937, v. 29.
2. L. M. К о у с к. Distributed Lags and Investment Analysis. Amsterdam, North-Holland Publishing Company, 1954.
3. M. Nerlove. Distributed Lags and Demand Analysis for Agricultural and other Commodities. Agricultural Handbook, Wash. U.S. Department of Agriculture, 1958, N 141.
4. L. R. Klein. The Estimation of Distributed Lags. Econometrica, 1958, v. 26, N 4.
5. W. Y. Oi. A Bracketing Rule for the Estimation of Simple Distributed Lag Models. The Rev. of Econ. and Statistics, 1969, v LI, N 4.
6. R. Solow. On a Family of Lag Distributions. Econometrica, 1960, v. 28, N 4.
7. С. И. Зуховицкий, Л. И. Андреева. Линейное и выпуклое программирование. М., «Наука», 1967.

Поступила в редакцию
11 V 1972