

ЭКОНОМИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА: ОБОБЩАЮЩАЯ «БЮДЖЕТНАЯ» ФАКТОРИЗАЦИЯ ГЕЙЛОВСКОЙ ТЕХНОЛОГИИ

Беленький В. З.

(Москва)

Регулярная линейная модель Гейла характеризуется триплетом (α, G, g) , однозначно определяемым технологическим конусом Z : α — темп роста, G, g — собственные функции прямого и обратного операторов Беллмана; дается экономическая интерпретация G и g . В терминах триплета описывается асимптотика (при $T \rightarrow \infty$) T -шаговой модели Z^T ; как следствие получено асимптотическое представление всех конечных эффективных траекторий модели Z (расширение теоремы Раднера — Никайдо).

1. ВВЕДЕНИЕ

В теории линейных моделей экономической динамики, восходящей к Дж. фон Нейману, фундаментальным понятием, ставшим уже классическим, является введенный Д. Гейлом [1] технологический конус Z . В этом понятии наиболее последовательно выражена точка зрения, которая рассматривает экономику как замкнутую систему, воспроизводящую в своем функционировании все необходимые (в том числе трудовые) ресурсы, при этом технологией Z возможности системы определяются *полностью*. В общем случае конус Z описывает весь комплекс сложных технологических (производственных) взаимосвязей между компонентами «пространства продуктов» R_+^n , и включение $(x, y) \in Z$ означает, что $y \in R_+^n$ — вектор выпуска — достижим для системы, находящейся в состоянии $x \in R_+^n$, в течение одного производственного цикла, длительность которого принимается за единицу времени.

Простейший класс гейловских моделей задается так называемыми сепарабельными технологиями вида

$$Z = \{x, y \in R_+^n : a(y) \leq b(x)\}, \quad (1)$$

где a и b — некоторые, удовлетворяющие определенным условиям функции на R_+^n ; будучи соизмеримыми, функции a и b могут быть выражены в одних, денежных, единицах. В (1) все реально существующие технологические связи упрощены до единственного обобщающего ограничения, которое по своему экономическому смыслу не может быть ни чем иным, как бюджетным ограничением; поэтому с экономической точки зрения сепарабельную модель можно назвать бюджетной. В обычной интерпретации величина $b(x)$ трактуется как доход, которым система располагает в состоянии x , а $a(y)$ — как необходимые затраты, связанные с выпуском y . На наш взгляд, такая интерпретация несколько поверхностна и неестественна, хотя бы потому, что понятия «доход» и «затраты» применимы к процессу, к динамике, т. е. к переходу от одного состояния к другому, но не к самому состоянию как статической характеристике системы; так или иначе, но эта интерпретация требует более глубокой проработки.

Осмысливая функции a и b , автор задался вопросом: нет ли подобных характеристик в общей, не обязательно сепарабельной, технологии? Иначе: возможно ли каждому состоянию $x \in R_+^n$ экономической системы, функционирующей в рамках данной гейловской технологии Z , приписать разумным способом две характеристики? Одну из них, назовем ее потенциалом, можно было бы интерпретировать как полезность, эффективность, доход и т. п., а другую — стоимость — как затраты и т. п.

В настоящей работе выяснено, что при определенных условиях типа невырожденности (в моделях, обладающих магистральным лучом) ответ на поставленный вопрос утвердителен и однозначен.

Утверждение 1. В каждой регулярной гейловской технологии существует и единственна пара бюджетных функций — потенциал G и функция стоимости g , удовлетворяющая естественным требованиям содержательности этих понятий. Именно, G — минимальный элемент ядра Ляпунова технологии Z и одновременно (единственная) собственная функция прямого оператора Беллмана; g — максимальный элемент ядра и (единственная) собственная функция обратного оператора Беллмана.

Точный смысл этого утверждения раскрывается в разд. 3. В разд. 4 устанавливается (утверждение 5), что бюджетные функционалы полностью описывают асимптотику конечных эффективных траекторий технологии Z . В магистральной теории хорошо известно, что при большом плановом периоде T всякая эффективная траектория идет вдоль магистрального луча, кроме начального и конечного переходных участков конечной, не зависящей от T длины. Оказывается, переходные участки управляются бюджетными функционалами: G управляет выходом на магистраль, g — сходом с нее в оптимальную конечную точку, которая явным образом выражается через критериальный функционал и значение потенциала G в исходной точке.

В разд. 5 (на основе утверждения 3) выясняется, что асимптотически любая регулярная технология факторизуется бюджетными функционалами: при больших T множества T -шаговой достижимости оказываются приближенно представимыми в сепарабельной, подобной (1), форме (α — неймановский темп роста)

$$Z^T \simeq \{x, y \in R_+^n : g(y) \leq \alpha^T G(x)\} =: \tilde{Z}^T. \quad (2)$$

Если положить в (2) $T=1$, то соответствующую технологию Z предлагается использовать как обобщающую (агрегирующую) бюджетную факторизацию исходной технологии Z . Такая факторизация может служить достаточно адекватной (для определенных, в том числе прикладных, целей) аппроксимацией «родительской» технологии: она имеет то же равновесие, а иногда (как, например, в экономически важном случае, специально рассмотренном в разд. 6, — модели Леонтьева) и те же оптимальные траектории.

В работе в явной форме введено понятие ядра Ляпунова и подробно описана его структура (разд. 2, п. 7). Все самостоятельные результаты сформулированы в форме утверждений, доказательства вынесены в Приложение (кроме разд. 4, п. 2).

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ, ПОНЯТИЯ И РЕЗУЛЬТАТЫ

1. **Технология.** Гейловская технология Z может быть описана в терминах прямого ω либо обратного ω^{-1} отображения пространства продуктов R_+^n в себя

$$\omega(x) := \{y \in R_+^n : (x, y) \in Z\}, \quad \omega^{-1}(y) := \{x \in R_+^n : (x, y) \in Z\}.$$

При указанных в [2, с. 392] условиях эти отображения обладают следующими свойствами:

а) при любом x множество $\omega(x)$ не пусто, ограничено и открыто снизу, т. е. содержит вместе с каждой точкой y весь конусный отрезок $\langle 0, y \rangle := \{z : 0 \leq z \leq y\}$; при любом y множество $\omega^{-1}(y)$ не пусто, неограничено и открыто сверху: вместе с каждой точкой x оно содержит конусный луч $\langle x, \infty \rangle$;

б) при некотором $\lambda > 0$ справедливо включение

$$\lambda e \in \omega(e), \quad e := (1, 1, \dots, 1) \in R_+^n;$$

в) отображение ω монотонно ($\omega(x_1) \subset \omega(x_2)$ при $x_1 \leq x_2$), а ω^{-1} антимонотонно (противоположное включение);

г) оба отображения ω и ω^{-1} положительно однородны (первой степени), супераддитивны, выпуклы, полунепрерывны сверху и снизу (для ω^{-1} это доказывается аналогично [3, предложение 7.1]).

2. **Равновесие, магистральный луч.** Технология Z обладает неймановским равновесием — тройкой (α, x^*, π) , подчиненной условиям

$$а) (x^*, \alpha x^*) \in Z; \quad б) \pi y \leq \alpha \pi x \quad \forall (x, y) \in Z, \quad (3)$$

где скаляр $\alpha > 0$ — темп роста; $x^* \in R_+^n$ — вектор стационарного расширения с темпом α ; $\pi \in R_+^n$ — вектор (—строка) равновесных цен.

Траекторией модели Z называется последовательность $\{x_t\}$, связанная соотношением $(x_t, x_{t+1}) \in Z$; параметр времени t может принимать любые целые (в том числе отрицательные) значения. В силу (3, б) на любой траектории функция времени $\varphi(t) := \alpha^{-t} \pi x_t$ не возрастает по t , поэтому существуют пределы $\varphi(+\infty)$, $\varphi(-\infty)$. Если $\varphi(+\infty) \neq 0$ и $\varphi(-\infty) \neq \infty$, то говорят, что траектория растет с темпом α . Удобно ввести понятие орбиты (приведенной траектории), т. е. последовательности $\{\tilde{x}_t = \alpha^{-t} x_t\}$; тогда $\varphi(t) = \pi \tilde{x}_t$. Орбиту $\{x_t\}$ назовем собственной, если ее траектория растет с темпом α ; на всякой собственной орбите существуют конечные пределы $\varphi(\pm\infty) > 0$, сама же орбита стремится к некоторому предельному коническому магистральному множеству. Ограничимся рассмотрением только важнейшего случая, когда магистральное множество является лучом; ясно, что равновесный вектор x^* принадлежит этому лучу. Более строго принимается следующее предположение.

Предположение (о регулярности). Технология Z регулярна, т. е.:

1) вектор x^* строго положителен и луч $\{\lambda x^* : \lambda \geq 0\}$ — магистраль (тем самым x^* единствен с точностью до множителя); 2) вектор π строго положителен (единственность не предполагается).

Будем считать, что компоненты вектора x^* используются в качестве масштабных единиц, т. е. $x^* = e$; вектор π нормируем условием $\pi e = 1$. Таким образом, полагаем

$$x^* = e \in \sigma := \{x \in R_+^n : \pi x = 1\}, \quad l := \{\lambda e : \lambda \geq 0\}, \quad (4)$$

причем, так как $\pi > 0$, симплекс σ компактен. В терминах [4, п. 14.6] предположение регулярности означает, что технология Z имеет строгий темп роста и $x^* > 0$; в силу [4, теорема 14.7] для всякой собственной орбиты существуют пределы

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \tilde{x}_t = \varphi(\pm\infty)e. \quad (5)$$

3. **Дисконт.** Постулируем, что дисконтирование разновременных денежных показателей производится с коэффициентом $\mu := \alpha^{-1}$. В частности, $\pi \tilde{x}_t$ — приведенная оценка в равновесных ценах состояния x_t .

4. **Допустимые функции.** Через W обозначается класс положительно-однородных (первой степени) монотонных функций на R_+^n ; каждая функция $\Phi \in W$ непрерывна в $\text{int } R_+^n$ и полунепрерывна снизу всюду в R_+^n [5, с. 10]. Пусть $\bar{W}$ — подкласс непрерывных всюду в R_+^n функций из W ; такие функции называются допустимыми. Для того чтобы функция $\Phi \in W$ была допустимой, достаточно, чтобы она была полунепрерывна сверху, поэтому операция замыкания

$$\hat{\Phi}(x) := \overline{\lim}_{z \rightarrow x} \Phi(z), \quad x \in R_+^n, \quad (6)$$

«исправляет» функцию $\Phi \in W$ на границе ортанта R_+^n и переводит ее в класс $\bar{W}$: $\hat{\Phi} \in \bar{W}$, причем $\Phi(x) = \hat{\Phi}(x) \quad \forall x \in \text{int } R_+^n$.

Лемма 1 [5, с. 15]. Если $S \subset W$ — произвольное семейство функций, то его нижняя огибающая — функция

$$\Phi_S : \Phi_S(x) := \inf_{\Phi \in S} \Phi(x), \quad x \in R_+^n, \quad (7)$$

допустима: $\Phi_S \in \bar{W}$.

Симплекс (4) удобно использовать для метризации. Положим

$$\rho(\Phi_1, \Phi_2) := \max_{x \in \sigma} |\Phi_1(x) - \Phi_2(x)|, \quad \Phi_1, \Phi_2 \in \bar{W}. \quad (8)$$

Так как пространство непрерывных функций на компакте полно [6, с. 61], то класс $\bar{W}$ полон в метрике ρ ; сходимость в ней называется равномерной и обозначается $\Rightarrow$.

В качестве нормы функции Φ в классе $\bar{W}$ будем использовать ее значение в точке e . Через $I \subset \bar{W}$ обозначим множество нормированных, т. е. подчиненных условию $\Phi(e) = 1$, функций.

Упорядочение в $\bar{W}$ естественно

$$\Phi_1 \leq \Phi_2 \Leftrightarrow \Phi_1(x) \leq \Phi_2(x) \quad \forall x \in R_+^n. \quad (9)$$

Функция

$$M: M(x) = \max_i x_i, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in R_+^n \quad (10)$$

нормирована и является e -мажорантой в $\bar{W}$: $\Phi \leq \Phi(e)M \quad \forall \Phi \in \bar{W}$.

5. Операторы Беллмана. Эти операторы прямого и обратного времени задаются формулами

$$\text{а) } \Gamma\Phi(x) := \max_{y \in \omega(x)} \Phi(y), \quad x \in R_+^n;$$

$$\text{б) } L\Phi(y) := \inf_{x \in \omega^{-1}(y)} \Phi(x), \quad y \in R_+^n.$$

Вообще говоря, в б) нельзя писать $\min$, ибо $\omega^{-1}(y)$ неограниченно. Оба оператора Беллмана переводят допустимую функцию в допустимую; относительно Γ это показано в [5, с. 18], для L можно показать аналогично. Операторы Γ и L положительно однородны и монотонны в смысле (9). Из условий равновесия следуют оценки ($\pi \in \bar{W}$ — равновесный функционал $\Phi(x) = \pi x$)

$$\text{а) } \Gamma\pi \leq \alpha\pi, \quad \text{б) } L\pi \geq \alpha^{-1}\pi, \quad (11)$$

$$\text{в) } \Gamma\Phi(e) \geq \alpha\Phi(e), \quad \text{г) } L\Phi(e) \leq \alpha^{-1}\Phi(e),$$

используя которые, нетрудно установить, что операторы Беллмана ограничены в e -норме.

Теорема 1 ([7, 5, с. 82]). В регулярной технологии оператор $\Gamma: \bar{W} \rightarrow \bar{W}$ имеет единственное собственное значение, равное темпу роста α . Отвечающая ему нормированная собственная функция G , т. е. решение уравнения (напомним, что $\mu = \alpha^{-1}$)

$$\mu\Gamma\Phi = \Phi, \quad \Phi \in I, \quad (12)$$

единственна и выпукла вверх. При этом какова бы ни была функция $\Phi \in \bar{W}$, $(\mu\Gamma)^k \Phi \Rightarrow \gamma G$, $k = 0, 1, \dots$, с некоторым множителем $\gamma = \gamma(\Phi)$ (см. ниже, формулу (14)).

6. Элементы спектральной теории. Пусть $f: R_+^n \rightarrow R_+^n$ — некоторое точечно-множественное отображение; если $E \subset R_+^n$ — произвольное множество, то $f(E)$ — его образ при отображении E . Множество E называется собственным для f , если $f(E) = \beta E$, $\beta > 0$. Мы будем иметь дело с отображениями $f = \mu\omega$ и $f^{-1} = \alpha\omega^{-1}$. Через f^k , $k = 1, 2, \dots$ обозначаются итерации отображения f .

Пусть $\bar{K}$ — класс ограниченных, замкнутых, выпуклых, телесных, открытых снизу множеств в R_+^n .

Лемма 2 (доказательство см. в Приложении). Множество $E \in \bar{K}$ является собственным для $f = \mu\omega$ тогда и только тогда, когда его функция Минковского

$$\Phi(x) = \|x\|_E := \min \{\lambda: x/\lambda \in E\}, \quad x \in R_+^n,$$

удовлетворяет уравнению $\alpha L\Phi = \beta\Phi$, где β — собственное число.

Лемма 3 [4, с. 131]. Если технология Z регулярна, то отображение $f = \mu\omega$ имеет единственное с точностью до множителя собственное множество $Q \in \tilde{K}$ с собственным значением $\beta = 1$.

Если нормировать Q так, чтобы его функция Минковского $g := \|\cdot\|_Q$ была нормированной, $g \in I$, то имеет место лемма 4.

Лемма 4 [4, предложение 15.4, п. 2]. При любом $x \in R_+^n$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f^t(x) = G(x)Q, \quad Q = \{y \in R_+^n : g(y) \leq 1\}, \quad (13)$$

где Q — нормированное собственное множество отображения $f = \mu\omega$, предел понимается в смысле метрики Хаусдорфа (см. [3, п. 3.5]).

Следствие. Исходя из (13), имеем при любом $x \in R_+^n$

$$(\mu\Gamma)^t \Phi(x) = \max_{y \in f^t(x)} \Phi(y) \rightarrow \max_{y \in G(x)Q} \Phi(y) = G(x) \max_{y \in Q} \Phi(y),$$

т. е. множитель γ в теореме 1 дается формулой

$$\gamma(\Phi) = \max_{y \in Q} \Phi(y) = \max_{g(y)=1} \Phi(y). \quad (14)$$

Объединяя леммы 2—4, получаем следующее утверждение.

Утверждение 2. В регулярной технологии оператор $L: \bar{W} \rightarrow \bar{W}$ имеет единственное собственное значение, равное α^{-1} . Отвечающая ему собственная функция g , т. е. решение уравнения

$$\alpha L\Phi = \Phi, \quad \Phi \in I, \quad (15)$$

единственна и выпукла вниз; кроме того,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu^t \omega^t(x) = \{y \in R_+^n : g(y) \leq G(x)\}, \quad x \in R_+^n. \quad (16)$$

Пусть теперь $\tilde{K}$ — класс замкнутых, выпуклых, открытых сверху множеств в R_+^n . Положим для $E \in \tilde{K}$

$$b_E(x) := \max\{\lambda : x/\lambda \in E\}.$$

Из $E \in \tilde{K}$ следует, что $b_E \in \bar{W}$, причем $E = \{x \in R_+^n : b_E(x) \geq 1\}$.

Это дает возможность ввести в $\tilde{K}$ метрику

$$\text{dist}(E_1, E_2) := \rho(b_{E_1}, b_{E_2}), \quad E_1, E_2 \in \tilde{K}, \quad (17)$$

где ρ — метрика (8).

Утверждение 3 (доказательство см. в Приложении). При любом $y \in R_+^n$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f^{-t}(y) = g(y)q, \quad (18)$$

где предел понимается в смысле (17), $f^{-1} = \alpha\omega^{-1}$ и

$$q := \{x \in R_+^n : G(x) \geq 1\}; \quad (19)$$

какова бы ни была функция $\Phi \in \bar{W}$, $(\alpha L)^k \Phi \Rightarrow \gamma g$, где

$$\gamma = \gamma(\Phi) := \inf_{x \in q} \Phi(x) = \inf_{G(x)=1} \Phi(x). \quad (20)$$

7. Ядро Ляпунова. Ядром Ляпунова S назовем множество нормированных функций $\Phi \in I$, убывающих вдоль любой орбиты технологии Z ; ядро не пусто — оно содержит равновесный функционал $\pi \in \bar{W}$.

Утверждение 4 (доказательство см. в Приложении). Справедливы неравенства

$$\Gamma L\Phi \leq \Phi \leq L\Gamma\Phi \quad \forall \Phi \in \bar{W} \quad (21)$$

и эквивалентность

$$\mu\Gamma\Phi \leq \Phi \Leftrightarrow \alpha L\Phi \geq \Phi. \quad (22)$$

Ядро Ляпунова представимо в двух равносильных формах

$$S = \{\Phi \in I : \mu\Gamma\Phi \leq \Phi\} = \{\Phi \in I : \alpha L\Phi \geq \Phi\} \quad (23)$$

и обладает свойствами:

C1) если $\Phi \in S$, то: а) $\Phi_1 := \mu \Gamma \Phi \in S$, $\Phi_1 \leq \Phi$, б) $\Phi_2 := \alpha L \Phi \in S$, $\Phi_2 \geq \Phi$;
 C2) если $\Phi_1, \Phi_2 \in S$, то: а) $\min(\Phi_1, \Phi_2) \in S$, б) $\max(\Phi_1, \Phi_2) \in S$, где операции $\min$ и $\max$ определяются естественным образом;

C3) нижняя огибающая Φ_s (см. (7)) входит в S и, следовательно, является минимальным элементом ядра, при этом $\Phi_s = G$, где G — решение уравнения (12);

C4) верхняя огибающая Φ^s , определяемая аналогично (7), входит в S , являясь максимальным элементом ядра, при этом $\Phi^s = g$, где g — решение уравнения (15);

C5) S — выпуклое подмножество конусного отрезка $\langle G, g \rangle$ (в пространстве $\bar{W}$).

3. БЮДЖЕТНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ

Этот и следующий разделы посвящены отысканию и анализу бюджетных функций для регулярной гейловской технологии. Существенным является то, что аргументом искомых функций можно считать только состояние $x \in R_+^n$. Независимость их от времени обусловлена тем, что рассматривается стационарная модель; независимость от других факторов — следствие замкнутости модели Гейла. Ось времени в наших рассуждениях мыслится неограниченной в обе стороны. Бюджетные функционалы отыскиваются в классе допустимых функций; каждый из них может быть определен с точностью до множителя, поэтому будем считать их нормированными.

1. **Потенциал G .** Если $\Phi \in \bar{W}$ — искомый потенциал, то по смыслу этого понятия значение $\Phi(x)$ должно быть характеристикой максимально достижимых, раскрываемых в будущем, возможностей системы, находящейся в состоянии x . Именно потому, что эти возможности могут быть реализованы только через будущее, понятие потенциала будет корректным лишь в случае, если функция Φ удовлетворяет соотношению

$$\Phi(x) = \mu \max_{y \in \omega(x)} \Phi(y), \quad (24)$$

выражающему принцип: потенциал данного состояния есть максимум потенциала по всем достижимым состояниям, приведенный к данному моменту. Это — не что иное, как принцип оптимальности, а само соотношение (24) — уравнение (12), имеющее в силу теоремы 1 единственное решение $\Phi = G$; оно и объявляется потенциалом технологии Z .

Понятие потенциала как меры сравнения эффекта, достижимого исходя из различных состояний x , становится особенно наглядным, если обратиться к (13). Эта формула показывает, что приведенное с дисконтирующим множителем μ множество t -шаговой достижимости ($f^t = \mu^t \omega^t$) при больших t приобретает при всех $x \in R_+^n$ одинаковую эталонную форму Q , отличаясь для разных x лишь множителем $G(x)$, который в силу этого и выступает как мера сравнения.

2. **Функция стоимости g .** Понятие потенциала апеллирует к будущему, стоимость — к прошлому. Если ψ — искомая функция стоимости, то значение $\psi(y)$ должно характеризовать минимальные затраты, которые необходимо сделать, чтобы в рамках данной технологии достичь состояния y . При этом возникают два вопроса: 1) достичь исходя из какого предшествовавшего состояния? 2) почему прошлое надо рассматривать в рамках данной технологии, ведь раньше система могла жить по иным законам? Ответить на эти вопросы мы сможем позже, но пока непременное следующее. Если какой-либо функции ψ может быть придан смысл функции стоимости, то именно потому, что стоимость аккумулирует в себе прошлые затраты, это понятие будет корректным лишь при выполнении соотношения

$$\psi(y) = \alpha \inf_{x \in \omega^{-1}(y)} \psi(x), \quad (25)$$

выражающего принцип: стоимость данного состояния есть минимум стоимости по всем предшествующим состояниям, приведенный к начальному моменту (поясним, что $\alpha = \mu^{-1}$). Соотношение (25) — это обратное

уравнение Беллмана (15), и, согласно утверждению 2, оно имеет единственное решение $\psi = g$, которое и объявляется функцией стоимости.

Аналогично предыдущему, формула (18) показывает, что приведенное с дисконтом μ множество состояний, из которых данное состояние y достижимо за t шагов ($f^{-t} = \alpha^t \omega^t$), приобретает при больших t одинаковую для всех y эталонную форму q . Это снимает первый из поставленных выше вопросов: в каком бы состоянии $y \in R_+$ система ни находилась в рассматриваемый момент, ее «прародительское множество» f^{-t} по форме одно и то же. Поэтому то, в какой мере достижима из далекого прошлого та или иная точка y , зависит в соответствии с (18) только от $g(y)$; эту величину и естественно назвать стоимостью состояния y . Ответ на второй вопрос будет дан в разд. 4, п. 3.

Общий вывод: бюджетные функционалы с необходимостью должны быть собственными функциями прямого и обратного уравнений Беллмана. С учетом С3, С4, утверждения 4 получен результат, анонсированный во введении в форме утверждения 1.

3. Бюджетные функционалы как генераторы бесконечных оптимальных траекторий. Пусть $x \in R_+$ — некоторая фиксированная точка, рассматриваемая как начальное состояние системы; ее будущее может быть описано пучком

$$Or(x) = \{\xi = (\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \dots) : x_0 = x\}$$

орбит, выходящих из точки x . Согласно (5), любая орбита ξ сходится к предельной точке $x_\infty = \theta e$ с некоторым значением $\theta = \theta(\xi)$ (для несобственной орбиты $\theta = 0$). Так как потенциал G входит в ядро Ляпунова, то функция времени $G(\tilde{x}_t)$ не возрастает, поэтому

$$G(x) \geq G(\theta(\xi)e) = \theta(\xi).$$

Отсюда следует, что

$$G(x) \geq \underline{\theta}(x) := \sup_{\xi \in Or(x)} \theta(\xi). \quad (26)$$

При стратегии управления

$$x_0 = x, \quad x_{t+1} \in \arg \max_{y \in \omega(x_t)} G(y), \quad t = 0, 1, \dots, \quad (27)$$

в (26) достигается равенство, так как в силу (12) $G(\tilde{x}_t) \equiv G(x)$; поэтому $G(x) = \underline{\theta}(x)$. Таким образом, значение потенциала в точке x — это координата на магистральном луче $\{\lambda e\}$ точки $\tilde{x}_\infty$, максимально достижимой из состояния x ; стратегия (27) выявляет роль потенциала как генератора оптимальных траекторий.

Совершенно аналогично, если рассмотреть пучок ретроспективных орбит $Ro(x) = \{\eta = (\dots, \tilde{x}_{-1}, \tilde{x}_0) : x_0 = x\}$, можно убедиться в неравенстве

$$g(x) \leq \bar{\theta}(x) := \inf_{\eta \in Ro(x)} \theta(\eta), \quad (28)$$

где, согласно (5), $\theta(\eta)$ — координата на магистральном луче точки $\tilde{x}_{-\infty}$, минимально достижимой из состояния x . При этом равенство в (28) достигается только на «квазиоптимальных» ретротраекториях

$$x_0 = x, \quad x_{t-1} \in \arg \min_{z \in \omega^{-1}(x_t)} g(z), \quad t = 0, -1, \dots, \quad (29)$$

генерируемых функцией стоимости; приставка «квази» подчеркивает условность оптимизации, направленной в прошлое.

4. Ядро Ляпунова как множество корректных (самоподтверждающихся) оценок бюджетных функционалов. Пусть $\Phi \in I$ — некоторая нормированная функция, мыслимая как мажорирующая оценка для потенциала, $\Phi \geq G$. Тогда $\mu \Gamma \Phi \geq \mu \Gamma G = G$, т. е. $\mu \Gamma \Phi$ — также мажоранта для G . Для того чтобы исходная мажоранта Φ была корректной, необходимо ее самоподтверждение: новая, порожденная ею мажоранта $\mu \Gamma \Phi$ должна быть не хуже начальной, $\mu \Gamma \Phi \leq \Phi$; это равносильно включению

$\Phi \in S$. Симметричное рассуждение применимо к функции g . В этом смысле ядро Ляпунова есть множество самоподтверждающихся оценок (мэжорант для G , минорант для g).

4. ПОЛНОЕ ОПИСАНИЕ АСИМПТОТИКИ КОНЕЧНЫХ ЭФФЕКТИВНЫХ ТРАЕКТОРИЙ

При данной конечной длине планового периода T естественной постановкой задачи в замкнутой модели Гейла является

$$\mu^T \Phi(y) = \Phi(v) \rightarrow \max =: \Phi_T(u). \quad (30)$$

$y \in \omega^T(u) \quad v \in f^T(u).$

Здесь $u \in R_+^n$ — начальное состояние системы; $\Phi \in \bar{W}$ — критериальная функция, $f = \mu\omega$; траектория $u = x_0, x_1, \dots, x_T = y$, доставляющая максимум, называется эффективной. Для краткости эффективную траекторию, отвечающую паре $d := (u, \Phi)$, назовем d -траекторией. Нам будет удобнее вести изложение в терминах орбит — приведенных траекторий (см. разд. 2, п. 2) $u = \tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_T = v$. Цель данного раздела — уточнение следующего хорошо известного результата теории экономической динамики (см., например, [3, теорема 14.2]).

Теорема 2. Пусть модель Z регулярна и задано $\varepsilon > 0$. Для каждой пары $d = (u, \Phi)$ существует натуральное $N = N(d)$, такое, что для каждого $T \geq 2N$ d -траектория длины T в центральной своей части лежит в ε -окрестности магистрального луча, более строго

$$\left\| \frac{x_t}{\pi x_t} - e \right\| < \varepsilon, \quad N \leq t \leq T - N,$$

где $\|\cdot\|$ — евклидова норма в R^n .

1. Представление орбит эффективных траекторий. Для уточнения теоремы требуется наряду с прямой задачей (30) рассматривать обратную оптимизационную

$$\psi(x) \rightarrow \inf =: \psi_{-T}(y), \quad (31)$$

$x \in f^{-T}(y)$

квазиэффективную ретроорбиту которой назовем (y, ψ) -ретроорбитой. В этих терминах имеет место следующее утверждение.

Утверждение 5 (о представлении). Пусть модель Z регулярна и задано $\varepsilon > 0$. Для каждой пары $d = (u, \Phi)$ существуют натуральные числа $N_1 = N_1(u)$, $N_2 = N_2(\Phi)$ и $\hat{T} = \hat{T}(d)$, такие, что для любого $T \geq \hat{T}$ орбита d -траектории длины T целиком может быть представлена с точностью до ε некоторой, специального вида кривой $\{h_t\}$

$$\|\tilde{x}_t - h_t\| < \varepsilon, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Кривая $\{h_t\}$ склеена из трех кусков (см. рис. 1) с малыми разрывами в точках A и B

$$\begin{aligned} \{h_t\} &:= (u, G) - \text{орбита} && \text{при } 0 \leq t \leq N_1, \\ h_t &:= He = \text{const} && \text{при } N_1 < t < N_2, \\ \{h_t\} &:= (v, g) - \text{ретроорбита} && \text{при } T - N_2 \leq t \leq T, \end{aligned}$$

где числа N_1, N_2 , скаляр H и точка v даются явными формулами:

а) N_1 := число шагов (u, G) орбиты, необходимое для попадания в $\varepsilon/2$ -окрестность (точку A на рис. 1, а) точки $\tilde{x}_\infty = G(u)e$ (эта точка определена в п. 3 разд. 3);

$$\text{б) } v := \arg \max_{g(x)=G(u)} \Phi(x) = G(u) \arg \max_{g(x)=1} \Phi(x); \quad (32)$$

в) N_2 := число шагов (v, g) ретроорбиты, необходимое для попадания в $\varepsilon/2$ -окрестность (точку B на рис. 1, а) предельной точки $\tilde{x}_{-\infty} = g(v)e$ (см. п. 3 разд. 3);

г) $H = G(u) = g(v)$.

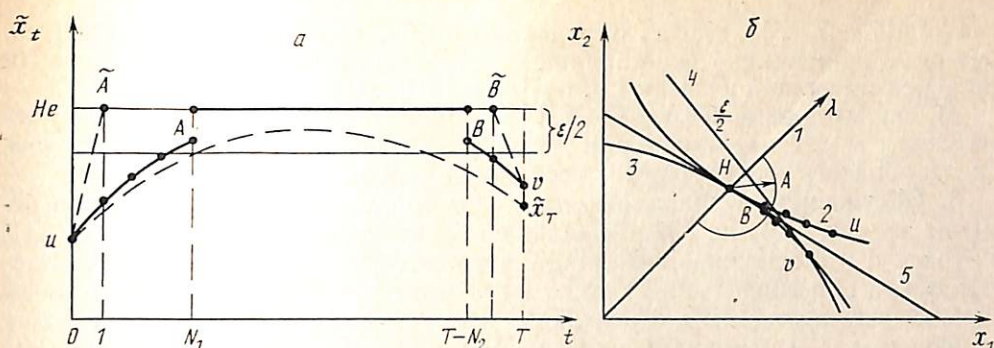


Рис. 1. а — временная развертка d -орбиты (показана пунктиром) и h -кривой ($N_1=4$, $N_2=2$); точки A , B см. разд. 5; б — пространственная ($n=2$) развертка h -кривой; 1 — магистральный луч $\{\lambda e\}$; линии уровня: 2 — потенциала G , 3 — функции стоимости g (граница Парето (34)), 4 — критериального функционала Φ

Если сравнить d -орбиту с трассой аэрофлота, можно сказать, что всякая достаточной длины трасса содержит три этапа: 1) взлет, управляемый потенциалом G , 2) крейсерский полет на постоянной высоте H , 3) спуск вдоль встречной ретроорбиты, заблаговременно рассчитанной с помощью функции стоимости g ; при этом длительность периода планирования T сказывается только на продолжительности крейсерского полета.

2. Доказательство. Проведем его схематично, выделяя лишь существенные детали.

1) Эффективная d -орбита строится методом динамического программирования. Считая в (30) T переменным, рассмотрим последовательность функций $\{\Phi_T, T=0, 1, \dots\}$. Тогда d -орбита строится по правилу

$$\tilde{x}_0 = u, \quad \tilde{x}_t = \arg \max_{x \in f(\tilde{x}_{t-1})} \Phi_{T-t}(x), \quad t=1, \dots, T. \quad (33)$$

Легко видеть, что $\Phi_{T+1} = \mu G \Phi_T$, т. е. $\Phi_T = (\mu G)^T \Phi$. Согласно теореме 1, $\Phi_T \Rightarrow \gamma G$; поэтому на начальном отрезке любой конечной длины τ при достаточно больших T орбита (33) будет отличаться от некоторой (u, G) -орбиты не более чем на $\varepsilon/2$ (такая, (u, G) -орбита найдется, так как отображение $\Phi \rightarrow (u, \Phi)$ -орбита полунепрерывно сверху в естественной топологии). В частности, это верно для $\tau = N_1$, где N_1 определено в (32, а); тем самым построен аппроксимирующий участок взлета $[u, A]$ (см. рис. 1).

2) Если $\tilde{x}_T$ — конечная точка эффективной (u, Φ) -орбиты, то ясно, что $\tilde{x}_T$ лежит на эффективной границе Парето множества $f^T(u)$. Согласно (13), при достаточно больших T $f^T(u) \simeq G(u)Q$, и граница Парето этого множества есть поверхность

$$\Pi := \{x \in R_+^n : g(x) = G(u)\}. \quad (34)$$

Остудя следует, что при больших T точка $\tilde{x}_T$ находится в $\varepsilon/2$ -окрестности точки v , определенной формулой (32, б).

3) Всякая (u, Φ) -орбита конечной длины обратима: ясно, что u лежит на нижней эффективной границе множества $f^{-T}(\tilde{x}_T)$. Поэтому существует (например, линейный) функционал $\psi \in \bar{W}$, опорный к множеству $f^{-T}(\tilde{x}_T)$ в точке u , т. е. u — решение (концевая точка орбиты) задачи (31) при $y = \tilde{x}_T$; при этом (u, Φ) -орбита служит (y, ψ) -ретроорбитой. Таким образом, данную d -орбиту можно рассматривать как $(\tilde{x}_T, \psi)$ -ретроорбиту. Но подобно (33), ретроорбита задачи (31) строится по правилу

$$\tilde{y}_0 = \tilde{x}_T, \quad \tilde{y}_s = \arg \min_{x \in f^{-1}(\tilde{y}_{s+1})} \psi_{-(s+T)}(x), \quad s = -1, -2, \dots, -T. \quad (35)$$

Из соотношения $\psi_{-(T+1)} = \alpha L \psi_{-T}$ следует, что $\psi_{-T} = (\alpha L)^T \psi$. В силу утверждения 3 $\psi_{-T} \Rightarrow \gamma g$, поэтому на конечном интервале $s \in [-N_2, 0]$ (т. е.

$t=s+T\epsilon(T-N_2, T)$), где N_2 определено в (32, в), ретроорбита (35) может быть приближена (при больших T) (v, g) -ретроорбитой. Тем самым аппроксимирующий участок $[B, v]$ (рис. 1) построен.

4) На интервале $t \in [N_1, T-N_2]$ d -орбита целиком находится в ϵ -окрестности магистральной точки He , ибо ее концы — в этой окрестности. Таким образом, утверждение 5 доказано в целом.

3. **Обсуждение.** Кривая $\{h_t\}$ дает при больших T полное и явное решение задачи (30): по (32, б) находим точку v на границе Парето (34); из точек u и v выпускаем G -орбиту и встречную ей g -ретроорбиту и затем, когда они войдут в $\epsilon/2$ -окрестность магистральной точки He , соединяем их прямолинейным отрезком.

Формула (34) означает, что при больших T траектория эффективна тогда и только тогда, когда приведенная стоимость конечного состояния совпадает с потенциалом исходного; вдоль эффективной траектории потенциал преобразуется в стоимость (на языке политэкономии — закон переноса стоимости). Отметим, что из концевой точки v начальная точка u видится как далекое прошлое. Окончательно: потенциал $G(u)$ и стоимость $g(v)$ — две стороны одной медали, название которой «эффективная траектория». В этом состоит ответ на второй из вопросов, поставленных в разд. 3, п. 2. Сказанное иллюстрирует рисунок 1, б.

Несколько слов о выборе критериального функционала задачи (30). Поскольку потенциал — это генератор оптимальных траекторий, кажется естественным взять $\Phi = G$. Выбор $\Phi \neq G$ может быть объяснен тем, что в послеплановом периоде предвидится коренное изменение ситуации, связанное, возможно, с изменением самой технологии. С точки зрения новой технологии, Φ может быть предпочтительней, чем G . Отметим, что выбор Φ полностью определяет концевую точку $v \in \Pi$.

5. БЮДЖЕТНАЯ ФАКТОРИЗАЦИЯ РЕГУЛЯРНОЙ ТЕХНОЛОГИИ

Наряду с понятием неймановского равновесия бюджетные функционалы являются важнейшими характеристиками регулярной технологии. Тройка (α, G, g) уже содержит в себе неймановское равновесие и, более того, дает настолько полную информацию, что позволяет в определенной мере восстановить саму технологию: во Введении указывалось, что при больших T технология приобретает сепарабельную форму (2). Строгая формулировка этого утверждения имеет вид (16). Можно пойти дальше и использовать (16) не только при больших T , но и как неплохое приближение при $T=1$.

В самом деле, рассмотрим технологию Z , определенную формулой

$$\tilde{Z} := \{x, y \in R_+^n : g(y) \leq \alpha G(x)\}.$$

Легко видеть, что технология Z регулярна. Из соотношений

$$\begin{aligned} \pi y \leq g(y) \leq \alpha G(x) \leq \alpha \pi x \quad \forall (x, y) \in \tilde{Z}, \\ g(\alpha e) = \alpha = \alpha G(e), \end{aligned}$$

где e, π — векторы равновесия модели Z , следует, что (α, e, π) — равновесие в $\tilde{Z}$; общим является и магистральный луч. Очевидно также, что бюджетными функционалами в $\tilde{Z}$ служат функции G и g . Все это дает основание назвать $\tilde{Z}$ обобщающей бюджетной факторизацией технологии Z .

Основное различие между технологиями Z и $\tilde{Z}$ состоит в том, что в $\tilde{Z}$ жесткое управление: какова бы ни была точка x , оптимальная в смысле (27) траектория выходит на магистральный луч за один шаг

$$\arg \max_{g(y) \leq \alpha G(x)} G(y) = \alpha G(x) \arg \max_{g(y) \leq 1} G(y) = \alpha G(x)e;$$

орбита такой траектории имеет вид $\tilde{x}_0 = x, \tilde{x}_t = G(x)e \quad \forall t \geq 1$.

Аналогичное положение и с ретроспективными траекториями. В терминах разд. 4, в модели $\tilde{Z}$, всякая эффективная d -орбита длины $T \geq 2$ в

точности совпадает с аппроксимирующей ее кривой $\{h_i\}$, построенной в утверждении 5; d -орбита имеет вид $[u, \bar{A}, \bar{B}, v]$ (см. рис. 1, а).

С жестким характером управления в модели Z связан и тот факт, что построенное для нее ядро Ляпунова совпадает с конусным отрезком $\langle G, g \rangle$. В самом деле, если $\Phi \in \langle G, g \rangle$, то $\Phi \in I$ и

$$\mu \tilde{\Gamma} \Phi(x) = \mu \max_{g(y) \leq \alpha G(x)} \Phi(y) = \mu \alpha G(x) \max_{g(y)=1} \Phi(y),$$

поэтому $\mu \tilde{\Gamma} \Phi \leq \Phi$, т. е. $\Phi \in \tilde{S}$. Поскольку $\tilde{S} \subset \langle G, g \rangle$, имеет место равенство $\tilde{S} = \langle G, g \rangle$. Таким образом, факторизованная модель Z более «контрастна»: управление становится жестким, ядро S переходит в $\tilde{S} = \langle G, g \rangle$, при этом $\mu \tilde{\Gamma} \Phi = G$, $\alpha \tilde{L} \Phi = g \quad \forall \Phi \in \langle G, g \rangle$.

С точки зрения приложений, бюджетная факторизация может использоваться как аппроксимация исходной технологии Z . Сохраняя ее главные черты и, как следствие, достаточно адекватное содержание, модель Z , будучи сепарабельной, значительно проще; поэтому во многих методологических вопросах она позволяет получать полные ответы в аналитической форме. Примером такого рода может служить работа [8].

6. ДВА ПРИМЕРА

Проиллюстрируем изложенную конструкцию на двух примерах линейных моделей типа Неймана — модели Леонтьева и ее инверсии.

1. Модель Леонтьева. Регулярная простая леонтьевская технология задается неотрицательной матрицей прямых затрат $A(n \times n)$

$$Z := \{x, y \in R_+^n : Ay \leq x\}. \quad (36)$$

Равновесие в ней является $\alpha = r^{-1}$, где $r = r(A)$ — спектральный радиус матрицы A ; x^* , π — правый и левый собственные векторы, отвечающие числу r . В предположении, что A^m строго положительна при некотором m , модель (36) регулярна. Полагаем к тому же, как это принято в разд. 2, п. 1, что модель безразмерна: $x^* = e$.

Убедимся, что потенциалом модели Леонтьева является функция

$$G(x) = \Lambda(x) := \min_i x_i = \max_{\theta e \leq x} \theta, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in R_+^n. \quad (37)$$

Действительно, $G \in I$ и

$$\Gamma G(x) = \max_{Ay \leq x} \max_{\theta e \leq y} \theta = \max_{\theta Ae \leq x} \theta = \max_{r\theta e \leq x} \theta = \alpha G(x),$$

т. е. G удовлетворяет уравнению (12), что и требовалось. Из этой выкладки следует, кроме того, что оптимальная стратегия (27) жесткая: оптимальным ходом в состоянии x служит точка

$$E = E(x) := \arg \max_{Ay \leq x} \Lambda(y) = \alpha \Lambda(x) e \quad (38)$$

пересечения магистрального луча с границей Парето множества $\omega(x)$.

Далее, в модели (36) возвратный оператор действует по формуле

$$L\Phi(y) = \min_{x \geq Ay} \Phi(x) = \Phi(Ay), \quad y \in R_+^n, \quad \Phi \in \bar{W},$$

функцией стоимости служит равновесный функционал, $g = \pi$; факторизованная модель имеет вид $\tilde{Z} = \{x, y \in R_+^n : \pi y \leq \alpha \Lambda(x)\}$.

Точка E , определенная в (38) — тройная: она принадлежит лучу l и границам Парето множеств $\omega(x)$ и $\omega(x)$. Это означает, что оптимальные ходы (а следовательно, и траектории) технологий Z и $\tilde{Z}$ совпадают. Таким образом, здесь технологии Z и $\tilde{Z}$ имеют больше черт сходства, чем в общем случае, рассмотренном в разд. 5; для приложений это важно.

В заключение отметим, что Λ — минимальная функция в I (в противоположность функции M , которая максимальна, см. (10)). Вообще модель Леонтьева являет собой экстремальный пример — в ней бюджет-

ные функционалы минимальны. Именно, в любой технологии справедливы соотношения

$$G \leq \pi \leq g, \quad G(e) = g(e) = 1,$$

и при заданных векторах e , π функции $G = \Lambda$ и $g = \pi$ — минимальные в $\bar{W}$ функции, удовлетворяющие этим соотношениям.

2. **Инверсная модель.** Модель, инверсная к (36), задается неотрицательной матрицей выпуска $B(n \times n)$

$$Z = \{x, y \in R_+^n: y \leq Bx\}.$$

Если $B^m > 0$ при некотором m , то модель регулярна. Равновесием здесь является $\alpha = r = r(B)$, x^* — правый, π — левый собственные векторы матрицы B , отвечающие числу r ; бюджетные функционалы — $G = \pi$, $g = M$, где M — максимальная функция (10). Инверсная модель во многих своих проявлениях «зеркальна» модели (36).

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящая работа углубляет описание гейловской технологии, имеющееся сегодня в научной литературе.

Существуют два подхода к изучению внутренней динамической структуры технологии: 1) прямые методы, исследующие итерации ω^k , $k = \pm 1, \pm 2, \dots$, технологического отображения, 2) переход к пространству допустимых функций и изучение итераций операторов Беллмана.

А. М. Рубинов впервые показал [7; 4, § 15] существование и единственность решения уравнения (12) и предложил использовать его (под названием «эффективный функционал»*) для построения бесконечных оптимальных траекторий. Эти результаты отражены в статье А. М. Рубинов близко подошел и к понятию ядра Ляпунова; его множество равновесных функционалов S [4, пп. 13.3, 16.3], дополненное в данной работе условием нормировки, и есть ядро; за счет нормировки в S обнаруживаются минимальный и максимальный элементы. Результаты В. Л. Макарова и А. М. Рубинова [3] использованы в разд. 2, п. 6. На связь между наличием магистрали и существованием $\lim f^t$ впервые обратил внимание В. Л. Макаров [10]. Отметим, что многие результаты разд. 2, п. 6 могут быть перенесены на случай динамических систем общего вида, например на D^3 -системы [4, п. 12.1].

Математический аппарат, связанный с применением операторов Беллмана, интенсивно развивается в последнее время С. Ю. Яковенко [11].

Обсуждение настоящей работы с В. М. Полтеровичем во многом обогатило и улучшило статью, за что автор искренне благодарен ему.

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. Доказательство леммы 2. Легко видеть, что из условия $E \in \bar{K}$ следует $\Phi := \|\cdot\|_E \in \bar{W}$, при этом $E = \{x \in R_+^n: \Phi(x) \leq 1\}$.

Имеем

$$\begin{aligned} f(E) &= \bigcup_{\Phi(x) \leq 1} f(x) = \{y: \exists (x \in f^{-1}(y), \Phi(x) \leq 1)\} = \\ &= \{y: \inf_{x \in f^{-1}(y)} \Phi(x) \leq 1\} = \{y: \alpha L \Phi(y) \leq 1\}, \end{aligned}$$

поэтому условие $f(E) = \beta E$ эквивалентно $\alpha L \Phi = \beta \Phi$.

2. Доказательство утверждения 3. Для любого $E \in \bar{K}$

$$\begin{aligned} f^{-1}(E) &= \bigcup_{b_E(y) \geq 1} f^{-1}(y) = \{x: \exists (y \in f(x), b_E(y) \geq 1)\} = \{x: \max_{y \in f(x)} b_E(y) \geq 1\} = \\ &= \{x: \mu \Gamma b_E(x) \geq 1\}, \text{ т. е. } b_{f^{-1}(E)} = \mu \Gamma b_E \text{ и, значит, } b_{f^{-1}} = (\mu \Gamma)^t b_E. \end{aligned}$$

Согласно

* Подробно вопрос об эффективных функционалах общей модели Гейла рассмотрен в недавно опубликованной работе [9], там же введен «второй эффективный функционал» (решение уравнения (15)) для описания оптимальных ретротраекторий.

теореме 1, $b_{f^{-1}(E)} \Rightarrow \gamma G$ при некотором $\gamma = \gamma(E)$, т. е.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f^{-t}(E) = \gamma(E)q \quad (39)$$

(предел в смысле (17)), где q определено в (19). Положим, $\psi(y) := \gamma(E)$ при $E = f^{-1}(y) \in \tilde{K}$; тогда при любой функции $\Phi \in \bar{W}$, исходя из (39)

$$(\alpha L)^t \Phi(y) = \inf_{x \in f^{-t}(y)} \Phi(x) \Rightarrow \inf_{x \in \psi(y)q} \Phi(x) = \psi(y) \inf_{x \in q} \Phi(x), \quad y \in R_+^n \quad (40)$$

Полагая здесь $\Phi := g$, в левой части будет $g(y)$, а справа — $\psi(y)$; отсюда $\psi = g$, т. е. формула (18) доказана. С учетом этого (40) эквивалентно (20). Утверждение доказано.

3. Доказательство утверждения 4. Исходя из определений

$$\Gamma L \Phi(x) = \max_{y \in \omega(x)} L \Phi(y) = \max_{y \in \omega(x)} \inf_{z \in \omega^{-1}(y)} \Phi(z) \leq \max_{y \in \omega(x)} [\Phi(z)|_{z=x}] = \Phi(x),$$

тем самым доказано левое неравенство (21); аналогично устанавливается правое. Применяя к левому неравенству (22) монотонный оператор αL , получим с учетом правого неравенства (21) правое неравенство (22); обратный переход аналогичен. Эквивалентность (22) доказана.

Далее, $\Phi \in S$ тогда и только тогда, когда $\Phi \in I$ и убывает на каждом шагу траектории. Условие убывания на шаге имеет одну из форм (22), тем самым доказано (23). Свойство 2 следует из (23) и монотонности операторов Беллмана, для S_1 надо привлечь еще (11, в, г).

Докажем S_3 . В силу леммы 1 функция Φ_s допустима и аналогично свойству S_2 , а входит в S . Применяя к Φ_s оператор $\mu \Gamma$ и используя S_1 , получим, что функция Φ_s с необходимостью должна удовлетворять уравнению (12), т. е. $\Phi_s = G$; S_3 доказано.

Переходим к свойству S_4 . Условием нормировки ядро S ограничено, поэтому имеет смысл функция $\psi := \Phi^s$ и, очевидно, $\psi \in W$. Рассмотрим верхнее замыкание (см. 6)) $\hat{\psi} \in \bar{W}$. Если $\Phi \in S$, то неравенство $\hat{\psi} \geq \Phi$ влечет $\alpha L \hat{\psi} \geq \alpha L \Phi \geq \Phi$; поскольку Φ произвольно, отсюда следует $\alpha L \hat{\psi} \geq \hat{\psi}$. Беря верхнее замыкание обеих частей, получим $\alpha L \hat{\psi} \geq \hat{\psi}$, т. е. $\hat{\psi} \in S$ и, следовательно, $\psi = \hat{\psi} \in S$, причем ψ — решение уравнения (15). В силу утверждения 2 $\psi = g$. S_5 проверяется непосредственно. Утверждение доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гейл Д. Замкнутая линейная модель производства//Линейные неравенства и смежные вопросы. М.: Изд-во иностр. лит., 1959.
2. Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. М.: Мир, 1964.
3. Макаров В. Л., Рубинов А. М. Математическая теория экономической динамики и равновесия. М.: Наука, 1973.
4. Рубинов А. М. Суперлинейные многозначные отображения и их приложения к экономико-математическим задачам. Л.: Наука, 1980.
5. Бельский В. З. Стационарные модели экономической динамики. М.: ЦЭМИ АН СССР, 1981.
6. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972.
7. Рубинов А. М. Магистраль в моделях Неймана — Гейла//Докл. АН СССР. 1978. Т. 242. № 2.
8. Бельский В. З. Модель оптимального $\omega_0 \rightarrow \omega_1$ перехода для пары гейловских технологий (промежуточная магистраль)//Вероятность и математическая экономика. М.: ЦЭМИ АН СССР, 1988.
9. Матвеев В. Д. Эффективный функционал и магистраль в моделях экономической динамики//Математические модели экономической динамики. Вильнюс: ИЭ АН ЛитССР, 1988.
10. Макаров В. Л. Асимптотическое поведение оптимальных траекторий линейных моделей экономики//Сиб. мат. журн. 1966. Т. 7. № 7.
11. Яковенко С. Ю. Неподвижные точки полугруппы операторов Беллмана и инвариантные многообразия гамильтоновых субдифференциальных уравнений//Автоматика и телемеханика. 1989. № 6.

Поступила в редакцию
2 I 1988