

В качестве инструмента планирования предлагаемый метод расширенной модели межотраслевого баланса особенно эффективно может быть использован при уточнении структурного выпуска в отраслях АПК, как наиболее мобильного и гибкого в отношении такого рода изменений, по сравнению с другими многоотраслевыми комплексами, корректировка структуры которых связана с гораздо большими ресурсными и организационными издержками.

ЛИТЕРАТУРА

1. Межотраслевые балансы в анализе территориальных пропорций СССР. Новосибирск: Наука, 1975.

Поступила в редакцию
30 VI 1988

МОДЕЛЬ РАЗМЕЩЕНИЯ ИЕРАРХИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ЦЕНТРОВ ОБСЛУЖИВАНИЯ НА ТЕРРИТОРИИ

Гусейн-Заде С. М.

(Москва)

В региональных исследованиях часто требуется найти размещение центров обслуживания на территории, при котором достигается минимум суммарных затрат на связи с этими центрами. Предположим, что затраты на осуществление таких связей пропорциональны расстоянию. Тогда одной из простейших постановок задачи может быть следующая. В регионе D с заданным распределением населения по территории разместить фиксированное число центров так, чтобы суммарное расстояние от мест жительства до (ближайших) центров было минимальным. Может рассматриваться и другая постановка, при которой учитываются также затраты на функционирование центров (зависящие от количества жителей, обслуживаемых ими). Формулировка в терминах оптимального программирования приводит в таких случаях к задачам большой размерности. Кроме того, сильно осложняется выявление и количественное описание основных закономерностей размещения центров.

Указанные трудности и сложности резко возрастают с ростом числа этих центров. В то же время ясно, что при их достаточно большом количестве точные детали оптимального размещения играют относительно малую роль, а более важными характеристиками становятся его плотность и размеры центров по численности обслуживаемых жителей (как функции от точки данной территории). Рассматривая эти показатели как неизвестные переменные, можно перейти от задачи оптимального программирования большой (но конечной) размерности к некоторой вариационной задаче (ее континуальному пределу).

Конфигурационное пространство такой вариационной задачи — бесконечномерное, но устроено довольно просто (это — пространство неотрицательных интегрируемых функций на исследуемой территории). Поэтому в ряде случаев возникающие вариационные задачи имеют явное решение. Его допустимо полагать приближением к (точному) решению исходной оптимизационной задачи. Такой подход позволяет определить зависимость плотности размещения центров и их величины от плотности спроса (плотности населения). Он уже использовался в [1, 2] применительно к размещению иерархических систем центров. Далее будет рассмотрена задача размещения иерархической системы центров.

Задачи такого рода возникают в различных ситуациях: при размещении систем предприятий сферы обслуживания, предприятий многоэтапной переработки некоторого вида ресурса, распределенного по территории, и т. п. Важным является размещение системы населенных пунктов на территории.

В [3] построена модель размещения иерархической системы центров. Там же и в [4] показано, что выводы из модели соответствуют параметрам размещения некоторых систем населенных пунктов. В указанной модели рассматривалась только зависимость параметров размещения центров различных уровней от плотности населения, но не от расположения по отношению к центрам более высоких уровней. В настоящей работе модель уточняется: в ней исследуются эффекты, связанные с такой зависимостью. Результаты могут использоваться как для объяснения параметров сложившихся систем центров на территориях, так и при конструировании систем центров, оптимальных в определенном смысле.

Пусть в некотором регионе D имеется население, распределенное по территории непрерывно с плотностью $p(x)$, $x \in D$. Отвлечемся от причин формирования неравномерной плотности населения и будем считать ее экзогенной относительно модели. Такое предположение несколько обобщает ее, но упрощает рассуждения и делает их наглядными. Отказ от него и соответственно учет зависимости плотности населения от расположения по отношению к центрам различных уровней требуют преодоления некоторых трудностей в обосновании модели.

Предположим, что в регионе D формируется иерархическая M -уровневая система центров: от нижнего первого до верхнего — M . Основное допущение модели следующее: система центров формируется таким образом, чтобы оптимизировать доступность между центрами соседних уровней. Будем считать, что $F_m, m=2, \dots, M$, — сумма (геометрических) расстояний от всех центров уровня $m-1$ до доминирующих их центров уровня m ; F_1 — сумма расстояний от мест проживания всех жителей региона D до ближайших центров первого уровня (для единообразия можно рассматривать жителей региона как центры нулевого уровня).

Использование геометрических расстояний вместо реальных не позволяет непосредственно учитывать в рамках описываемой модели влияние таких факторов, как особенности рельефа, наличие природных рубежей, транспортных коммуникаций и т. п., на размещение системы центров. Априорно не предполагается, что центры уровня m выполняют одновременно и функции центров уровня $m-1$, т. е. что множество центров уровня m является частью множества центров уровня $m-1$. Иначе задача несколько изменилась бы, однако без последствий для результатов, полученных ниже.

Показатели $F_1, \dots, F_M$ характеризуют доступность в данной иерархической системе центров и поэтому могут рассматриваться как критерии качества. Это положение можно конкретизировать, допустив, что система центров формируется под влиянием тенденций к повышению территориальной доступности, выражаемых в минимизации показателей $F_1, \dots, F_M$, как равновесная в смысле их оптимума по Парето (см. [5]).

Другой подход состоит в том, что тенденция к повышению территориальной доступности в системе центров выражается в минимизации показателя F , являющегося линейной комбинацией F_m с некоторыми (неотрицательными) коэффициентами ($F = \lambda_1 F_1 + \dots + \lambda_M F_M$). Формально такой подход почти ничего не меняет в дальнейших рассуждениях. Но часто в реальных ситуациях (например, в задачах описания размещения иерархических систем населенных пунктов) коэффициенты $\lambda_1, \dots, \lambda_M$ не могут быть обоснованы априорно для дальнейшего использования в модели.

Возникает задача размещения на территории D с заданной плотностью населения $\rho(x)$ иерархической M -уровневой системы центров, являющейся оптимумом по Парето показателей $F_1, \dots, F_M$.

В [3] плотности размещения центров различных уровней в такой системе определялись как функции только от точки $x \in D$. Пусть плотности ρ_m размещения центров уровня m ищется как функция от точки $x \in D$ и расстояний $\rho_{m+1}, \dots, \rho_M$ до центров более высоких уровней: $\rho_m = \rho_m(x, \rho_{m+1}, \dots, \rho_M)$. Величина ρ_m будет явным образом зависеть только от $x \in D$ и расстояния ρ_{m+1} до (ближайшего) центра следующего уровня $m+1$, зависимость ρ_m от расстояний $\rho_{m+2}, \dots, \rho_M$ — неявная. Она имеет место из-за того, что расстояние ρ_{m+1} в среднем пропорционально линейным размерам зон влияния центров уровня $m+1$, которые связаны с плотностью ρ_{m+1} их размещения. Величина ρ_{m+1} в свою очередь зависит явным образом от расстояния ρ_{m+2} и т. д. Однако мы будем априорно искать плотность ρ_m в виде функции от всех величин $x, \rho_{m+1}, \dots, \rho_M$. Таким образом, только от $x \in D$ зависит плотность ρ_M размещения центров высшего уровня, а плотность ρ_1 размещения центров низшего уровня зависит от точки $x \in D$ и $M-1$ -го расстояния $\rho_2, \dots, \rho_M$. Здесь, конечно, имеется в виду, что центры уровня M достаточно много. Случай, когда имеется только один центр высшего уровня M , встречающийся в реальных системах, может быть получен небольшим видоизменением рассматриваемых конструкций.

Обозначим через $r_m = 1/\sqrt{\pi \rho_m}$ средний радиус зон влияния центров уровня m (он также является функцией от $x, \rho_{m+1}, \dots, \rho_M$). Выражение для полного количества n_M центров уровня M

$$n_M = \int_D \rho_M(x) dS$$

имеет тот же вид, что и в [3]. Выражения для функционалов $F_1, \dots, F_M$ отличны от тех, которые приведены в [3], где плотности ρ_m были функциями только от $x \in D$. Величина F_M (сумма расстояний от центров уровня $M-1$ до доминирующих их центров уровня M) приблизительно равна

$$\int_D \rho_M(x) \int_0^{r_M(x)} 2\pi \rho_{M-1}(x, \rho_M) \rho_M^2 d\rho_M dS.$$

Здесь внутренний интеграл равен суммарному расстоянию от центров уровня $M-1$, доминируемых одним центром уровня M , до этого центра, $r_M = 1/\sqrt{\pi \rho_M}$. Подынтегральное выражение является произведением плотности ρ_{M-1} размещения центров уровня $M-1$ на расстояние ρ_M до центра уровня M и на элемент площади $2\pi \rho_M d\rho_M$. Аналогично

$$F_{M-1} = \int_D \rho_M(x) \int_0^{r_M} \rho_{M-1}(x, \rho_M) \int_0^{r_{M-1}} \rho_{M-2}(x, \rho_{M-1}, \rho_M) (2\pi)^2 \rho_{M-1}^2 d\rho_{M-1} \rho_M d\rho_M dS,$$

$$r_{M-1} = 1/\sqrt{\pi \rho_{M-1}}$$

и т. д.

Поскольку выражения для $F_m, m=1, \dots, M$, довольно громоздки, ограничимся случаем $M=3$, т. е. моделью трехуровневой системы центров.

Чтобы при вычислениях не иметь дело с квадратными корнями из плотностей, выразим все показатели n_3 , F_3 , F_2 , F_1 через r_m , $m=1, 2, 3$. С точностью до постоянных множителей приблизительно имеем

$$n_3 = \int_D r_3^{-2} dS, \quad F_3 = \int_D \int_0^{r_3} r_2^{-2} \rho_3^2 d\rho_3 r_3^{-2} dS,$$

$$F_2 = \int_D \int_0^{r_3} \int_0^{r_2} r_1^{-2} \rho_3^2 d\rho_2 r_2^{-2} \rho_3 d\rho_3 r_3^{-2} dS,$$

$$F_1 = \int_D \int_0^{r_3} \int_0^{r_2} \int_0^{r_1} p(x) r_1 \rho_2 d\rho_2 r_2^{-2} \rho_3 d\rho_3 r_3^{-2} dS.$$

Модель, построенная в [3], основана на предположении, что система центров формируется под воздействием тенденций к минимизации показателей территориальной доступности $F_1, \dots, F_M$ при фиксированном общем количестве n_M центров уровня M (или тенденций к минимизации всех показателей $F_1, \dots, F_M$, n_M ; оба предположения, формулируемые в терминах оптимума по Парето, приводят к одинаковым результатам). Оставим это предположение в силе. Оптимум по Парето показателей $F_1, \dots, F_M$ при фиксированном количестве n_M центров уровня M определяется из уравнения

$$\lambda_1 \delta F_1 + \lambda_2 \delta F_2 + \dots + \lambda_M \delta F_M + \lambda_{M+1} \delta n_M = 0, \quad (1)$$

где δF_m и δn_M — вариации функционалов F_m и n_M , соответствующие вариациям $\delta r_1, \dots, \delta r_M$ функций $r_1, \dots, r_M$; λ_i — положительные множители, $i=1, \dots, M, M+1$ (см [6]). Уравнение (1) должно выполняться тождественно для всех значений вариаций $\delta r_1, \dots, \delta r_M$.

Можно показать (частично соответствующие вычисления приведены в приложении), что (в случае $M=3$) оптимум по Парето показателей F_1, F_2, F_3 при фиксированном значении n_3 достигается при следующей зависимости средних радиусов зон влияния центров от плотности населения и расстояний до центров более высоких уровней:

$$r_1 = C_1 [p(x)]^{-1/3} \rho_2^{1/3}, \quad r_2 = C_2 [p(x)]^{-2/7} \rho_3^{3/7}, \quad r_3 = C_3 [p(x)]^{-4/15},$$

где C_1, C_2 и C_3 — некоторые константы. Отсюда следует, что плотности размещения центров разных уровней равны

$$\rho_1 = \tilde{C}_1 [p(x)]^{2/3} \rho_2^{-2/3}, \quad \rho_2 = \tilde{C}_2 [p(x)]^{4/7} \rho_3^{-6/7}, \quad \rho_3 = \tilde{C}_3 [p(x)]^{8/15}.$$

Из приведенных формул легко видеть, что в нашей модели размеры зон влияния центров падают с повышением плотности населения и растут с увеличением расстояния до центров более высокого уровня. Это согласуется с качественными представлениями о реальном размещении центров (в частности, населенных пунктов) в регионах.

Проверка соответствия полученных результатов реальным системам населенных пунктов (или центров другого вида) осложняется трудностями подготовки материалов в форме, приспособленной для этого, а также спецификой определения плотностей ρ_1, ρ_2 и ρ_3 размещения центров. Можно надеяться провести проверку зависимости плотностей ρ_m не от всех величин $p(x)$, ρ_2 и ρ_3 , а только от одной из них с усреднением по двум другим. Такое усреднение по расстояниям ρ_2 и ρ_3 дает для зависимости плотностей ρ_m от плотности населения $p(x)$ те же выражения, что и в [3]. Поэтому результаты вычислений, проведенных для систем населенных пунктов КазССР [3] и США [4], можно рассматривать как частичное подтверждение применимости в некоторых ситуациях описанной здесь модели. Кроме того, ее выводы дают уточнения выводов модели из [3], согласующиеся с качественными представлениями о реальном размещении населенных пунктов в регионе.

В дальнейшем было бы интересно проанализировать ситуацию, при которой рассматривается размещение центров в регионе, характеризующемся не показателем плотности населения, а определенным образом подобранным показателем уровня продуктивности или освоенности. Роль такого показателя может играть, например, плотность размещения основных фондов. В этом случае плотность населения становится искомой величиной модели.

В заключение приведем соотношения, вытекающие из описанной модели для произвольного количества иерархических уровней M

$$\rho_m = \tilde{C}_m [p(x)]^{\gamma_m} \rho_{m+1}^{-\delta_m}, \quad m=1, \dots, M-1,$$

$$\rho_M = \tilde{C}_M [p(x)]^{\gamma_M},$$

где $\gamma_m = 2^m / (2^{m+1} - 1)$, $\delta_m = 2(2^m - 1) / (2^{m+1} - 1)$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Чтобы несколько сократить вычисления, связанные с нахождением оптимумов по Парето показателей F_1, F_2, F_3 и n_3 , заметим, что среди вариаций $\delta F_1, \delta F_2, \delta F_3$ и δn_3

от вариации δr_1 зависят только первые две (δF_1 и δF_2). При этом

$$\delta F_1 = \int_D \int_0^{r_3} \int_0^{r_2} p(x) \rho_2 \delta r_1 d\rho_2 r_2^{-2} \rho_3 d\rho_3 r_3^{-2} dS$$

плюс члены, не зависящие от вариации δr_1 ,

$$\delta F_2 = -2 \int_D \int_0^{r_3} \int_0^{r_2} r_1^{-3} \rho_2^2 \delta r_1 d\rho_2 r_2^{-2} \rho_3 d\rho_3 r_3^{-2} dS$$

плюс члены, не зависящие от вариации δr_1 . Из (1) следует, что

$$0 = \int_D \int_0^{r_3} \int_0^{r_2} [\lambda_1 p(x) \rho_2 - 2 \lambda_2 r_1^{-3} \rho_2^2] \delta r_1 d\rho_2 r_2^{-2} \rho_3 d\rho_3 r_3^{-2} dS$$

плюс члены, не зависящие от вариации δr_1 , откуда

$$\lambda_1 p(x) \rho_2 - 2 \lambda_2 r_1^{-3} \rho_2^2 = 0, \quad r_1 = C_1 [p(x)]^{-1/3} \rho_2^{1/3}.$$

Пользуясь этим соотношением, можно исключить r_1 из выражений для F_1 и F_2 . При этом получаем, что и F_1 , и F_2 с точностью до (положительных) постоянных множителей, равны

$$\int_D \int_0^{r_3} \int_0^{r_2} [p(x)]^{2/3} \rho_2^{4/3} d\rho_2 r_2^{-2} \rho_3 d\rho_3 r_3^{-2} dS \sim \int_D \int_0^{r_3} [p(x)]^{2/3} r_2^{1/3} \rho_3 d\rho_3 r_3^{-2} dS = \tilde{F}_2$$

($\sim$ означает «пропорционально»). При этом (1) превращается в

$$\tilde{\lambda}_2 \delta \tilde{F}_2 + \lambda_3 \delta F_3 + \lambda_4 \delta n_3 = 0, \quad \tilde{\lambda}_2 > 0.$$

Дальнейшие вычисления проводятся аналогично.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гусейн-Заде С. М. Оптимальное размещение поставщиков с учетом зависимости затрат от их мощностей // Вест. МГУ. Сер. 5. География. 1978. № 2.
2. Гусейн-Заде С. М. Применение вариационных методов в моделях географии населения // Моделирование в географии. М.: Изд-во МГУ, 1981.
3. Гусейн-Заде С. М. Размеры районов в иерархической системе административно-территориального деления. Вест. МГУ. Сер. 5. География. 1981. № 1.
4. Gusein-Zade S. M. Bunge's Problem in Central Place Theory and its Generalizations // Geographical Analysis. 1982. V. 14. № 3.
5. Гусейн-Заде С. М. Равновесные модели и оптимум Парето в экономической географии // Вест. МГУ. Сер. 5. География. 1979. № 4.
6. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. М.: Прогресс, 1975.

Поступила в редакцию
27 II 1984