ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ
1990
Том 26, вып. 3

ОТРАСЛЕВЫЕ ПРОБЛЕМЫ

ОПТИМИЗАЦИЯ РАЗВИТИЯ И РАЗМЕЩЕНИЯ ОТРАСЛИ С КРУПНЫМИ ПРЕДПРИЯТИЯМИ

Шевелёв Я. В., Клименко А. В.

(Москва)

Сформулирована задача оптимизации развития и размещения отрасли с крупными предприятиями с незаданной мощностью, на неизвестных площадках, вводимых очередями.
Описаны модель и алгоритм оптимизации.

В практике хозяйствования важную роль играет оптимизация развития отраслей с предприятиями-комбинатами, производящими продукцию широкого ассортимента с использованием многономенклатурного сырья. Постановка такой задачи рассмотрена в [1]. Однако соответствующая модель не дает ответа на вопрос, следует ли размещать все предприятия на одной площадке, или по одному на каждой, либо, наконец, по нескольку предприятий на одной площадке. Остается неясным также, сколько и каких площадок потребуется.

При размещении предприятий отрасли в общем случае нужно учитывать расходы на транспортировку их продукции к местам потребления и сырья — от поставщиков до этих площадок. Далее, необходимо принимать во внимание затраты на освоение каждой площадки, связанные с ее подключением к транспортным магистралям, развитием инфраструктуры, способствующей обеспечению площадок людскими и материальными ресурсами (строительными материалами, водой, топливом и т. д.), с отчуждением территории. Следует иметь в виду комплексное развитие хозяйства экономических районов, где располагаются площадки, социально-политические факторы, загруженность путей сообщения, условия для средних и малых поселений, регулирования роста крупных городов и т. д.

Учитывая специфику отраслей, образующих топливную базу ядерной энергетики, нет нужды рассматривать конкретные площадки, их удаленность от мест потребления продукции отрасли и ее сырьевой базы. Поэтому в нашем случае проблема сводится к строительству предприятий очередями на «безымянных» площадках, а затраты на освоение каждой из них зависят от суммарной установленной мощности предприятий, которые планируется разместить в данном месте.

Эту зависимость можно представить в виде функции $F(Q_\Sigma)$, где Q_Σ — предельная установленная мощность предприятий площадки. Для этой функции характерно чередование вогнутых и выпуклых участков, как правило, она имеет разрыв в нуле, т. е. при отсутствии выпуска продукции нет и затрат, которые при любом ином (неотрицательном) Q_Σ больше положительной величины $F(+0)$ и по крайней мере не ниже минимума условно-постоянных (фиксированных) затрат. Следовательно, вблизи нуля функция F является вогнутой (выпуклой вверх). С вводом на площадке второго, третьего и т. д. предприятий доля сопутствующих размещению затрат уменьшается, поскольку функционирование этих предприятий в значительной мере обеспечивается ранее проведенными мероприятиями.

Строительство большого количества очередей (предприятий) на одной площадке может потребовать дополнительных больших издержек, вызванных недостатком ресурсов в ее районе, использованием более дорогой земли, трудностями снабжения населения, вводом новых транспортных сетей. Кроме того, нарастают ошибки управления, вызывающие дополнительные потери в производстве и тем самым повышающие себестоимость продукции, замедляется снижение накладных расходов, значительно растут административные. Отсюда прогрессивное увеличение затрат, связанных с размещением производства на одной площадке, после достижения его установленной мощностью Q_Σ определенного предела. Поэтому кривая затрат заканчивается выпуклым вниз участком.

Если спрос на продукцию отрасли столь велик, что для его удовлетворения необходимо превысить предел установленной мощности площадки Q_Σ, за которым $F(Q_\Sigma)$ выпукла вниз, то становится выгоднее развернуть еще одну или несколько площадок. Таким образом, можно говорить об оптимальной предельной установленной мощности площадки, на которой предприятия отрасли вводятся очередями; к ее уменьшению приводит эффект дисконтирования.

Сформулируем математическую модель строительства предприятий отрасли очередями. Площадки вводятся в эксплуатацию последовательно в моменты t_Σ^ω, $0 \leqslant t_\Sigma^\omega < T$, $\omega = 0, \ldots, \Omega$, где T — длительность планового периода; $\Omega+1$ — число вводимых площадок. Предельная установленная мощность каждой площадки Q_Σ^ω должна быть неотрицательна и не меньше суммы установленных мощностей предприятий Q_j^ω, вводимых в плановом интервале $(0, T)$ на этой площадке в моменты t_j^ω, $j = 0, \ldots, n^\omega$ (полное число вводимых предприятий на площадке ω равно $n^\omega + 1$). Следовательно, должно выполняться соотношение

$$Q_\Sigma^\omega \geqslant \sum_{j=0}^{n^\omega} Q_j^\omega, \; Q_\Sigma^\omega \geqslant 0, \; Q_j^\omega \geqslant 0, \; \omega = 0, \ldots, \Omega. \tag{1}$$

Причем момент ввода в эксплуатацию площадки t_Σ^ω совпадает с моментом ввода предприятия с номером $j=0$ на этой площадке t_0^ω, т. е. $t_\Sigma^\omega = t_0^\omega$.

В любой момент времени t, $0 \leqslant t \leqslant T$, суммарная текущая производительность всех предприятий отрасли q может складываться из суммарных текущих производительностей предприятий отдельных площадок q^ω

$$q(t) = \sum_{\omega=0}^{\Omega} q^\omega(t), \quad q^\omega(t) \geqslant 0. \tag{2}$$

Пусть отрасль обеспечивает заданный план выпуска продукции. В этих условиях функционалом служат суммарные приведенные затраты З на размещение, строительство и эксплуатацию предприятий на плановом интервале $(0, T)$

$$З = З_{осв} + З_{соб} + З_{сыр}, \tag{3}$$

где

$$З_{осв} = \sum_{\omega=0}^{\Omega} F(Q_\Sigma^\omega) e^{-pt_0^\omega} \tag{4}$$

— расходы на освоение площадок;

$$З_{соб} = \sum_{\omega=0}^{\Omega} \left\{ \sum_{j=0}^{n^\omega} e^{-pt_j^\omega} \left[f(Q_j^\omega) + \int_{t_j^\omega}^{T} c(Q_j^\omega, t) q_j^\omega(t) e^{-p(t-t_j^\omega)} dt \right] \right\} \tag{5}$$

— собственные издержки отрасли на строительство и эксплуатацию предприятий;

$$З_{сыр} = \sum_{s=1}^{S} \int_0^T Ц_{сыр}^s(t) q^s(t) e^{-pt} dt \tag{6}$$

— расходы отрасли на сырье; p — норматив дисконтирования; $f(Q_j)$ — функция капитальных затрат, зависит от установленной мощности предприятия Q_j и включает в себя также приведенную к моменту пуска t_j часть эксплуатационных расходов, не зависящую от загрузки предприятия j—q_j. Считается, что $f(Q_j)$ имеет невозрастающую производную при $Q_j>0$ и $f(0)=0$. Таким образом, $f(Q_j)$ выпукла вверх; $c(Q_j, t)$ — удельные эксплуатационные расходы, зависящие от установленной мощности предприятия Q_j и изменяющиеся во времени; $ц^s_{\text{сыр}}(t)$ — цена сырья s, потребляемого предприятиями-комбинатами отрасли из ассортимента сырья, $s=1, \ldots, S$; известная функция времени; $q^s(t)$ — поток сырья в момент времени t, забираемого со склада питания сырьем s, для нужд отраслевого производства; e — основание натурального логарифма.

Число площадок размещения предприятий отрасли $\Omega+1$, моменты ввода площадок в эксплуатацию t_0^ω, предельные установленные мощности площадок Q_Σ^ω, а также для каждой площадки количество предприятий $n^\omega+1$, моменты их ввода t_j^ω, установленные мощности Q_j^ω и план загрузки (график изменения текущей производительности $q_j^\omega(t)$ каждого предприятия) подлежат оптимизации по критерию минимума суммарных приведенных затрат (3)—(6) при выполнении (1), (2) и условий, описанных в [1], которые справедливы для каждой площадки.

Алгоритм оптимизации из [1] следует надстроить еще одним уровнем, после чего он имеет следующий вид.

1. Оптимизация в целочисленном пространстве площадок размещения $\Omega+1$ с помощью процедуры покоординатного спуска.

2. Оптимизация в целочисленном пространстве количества предприятий $n^\omega+1$, $\omega=0, \ldots, \Omega$. Для фиксированного числа площадок $\Omega+1$ процедурой покоординатного спуска определяется оптимальный вектор количества предприятий с компонентами $n^\omega+1$.

3. Оптимизация моментов ввода (t_j^ω, $j=0, \ldots, n^\omega$) предприятий в эксплуатацию. Для заданного вектора с компонентами $n^\omega+1$, $\omega=0, \ldots, \Omega$, процедурой покоординатного спуска определяется оптимальный вектор $\vec{t_j^\omega}$.

4. Для заданного вектора $\vec{t_j^\omega}$, $\omega=0, \ldots, \Omega$, производится итерационное уточнение вектора установленных мощностей $\vec{Q_j^\omega}$ до полной сходимости.

5. Для заданного вектора $\vec{t_j^\omega}$ и при фиксированных значениях $\vec{Q_j^\omega}$ решается задача линейного программирования; определяются план и двойственные переменные (последние участвуют в установлении цен на продукцию).

В [1] рассмотрен методический пример оптимизации развития отрасли с одним видом сырья и одним видом продукта для случая $F(Q_\Sigma)=0$, когда безразлично, размещать ли все предприятия отрасли на одной площадке или на многих. Чтобы показать эффект от оптимизации размещения производства, в отличие от [1] была выбрана функция $F(Q_\Sigma)$ вида

$$F(Q_\Sigma) = \left\{\begin{array}{ll} 0, & Q_\Sigma = 0 \\ 10 + 0{,}01\, Q_\Sigma, & Q_\Sigma \leqslant 100 \\ 1 + 0{,}1\, Q_\Sigma, & Q_\Sigma > 100 \end{array}\right\}. \tag{7}$$

Спрос на продукцию отрасли задавался так (ед. продукции/год)

$$q_c(t) = q_{c0} \exp (pt), \quad q_{c0}=1, \tag{8}$$

где $p=0{,}1$ год$^{-1}$ — норматив дисконтирования.

Принималось (в руб. за ед. продукции/ год)

$$f(Q) = f_0 Q^{0,7}, \quad f_0=1, \tag{9}$$

и (в руб. за ед. продукции)

$$c(Q) = c_0 Q^{-0,3}, \quad c_0=1. \tag{10}$$

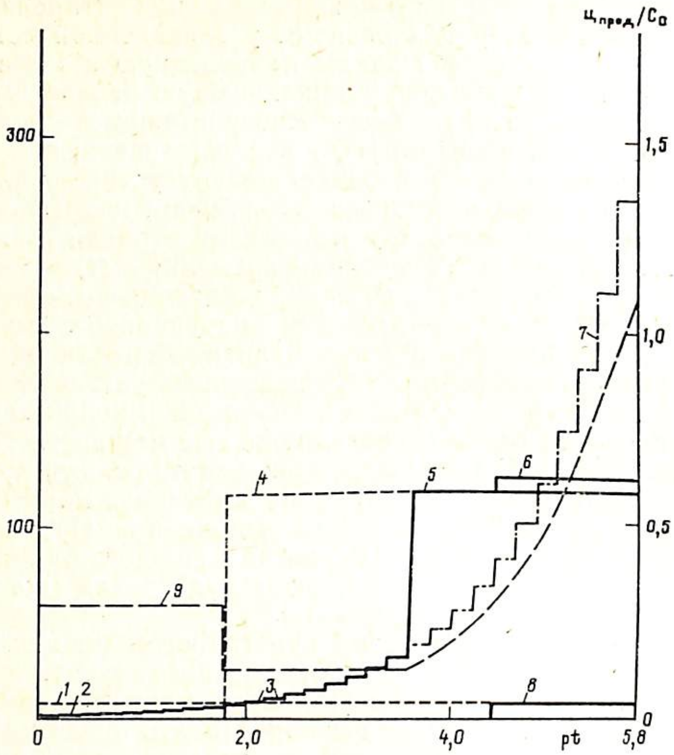

Рис. 1. Локально-оптимальный план и цены для реализации производственной программы отрасли на одной площадке: $F(Q_\Sigma)=\begin{cases}0, & Q_\Sigma=0\\ 10+0{,}01Q_\Sigma, & Q_\Sigma\leqslant 100\\ 1+0{,}01Q_\Sigma, & Q_\Sigma>100\end{cases}$, $f(Q)=f_0Q^{0,7}$; $c(Q,t)=c_0Q^{-0,3}$; $q_c(t)=q_{c0}\exp(pt)$; $f_0=1$ руб/ед. прод./г; $c_0=1$ руб/ед. прод; $q_{c0}=1$ ед. прод/г. $p=0{,}1$ $г^{-1}$; *1* — $q_у^0/q_{c0}=Q_0^0/q_{c0}$; *2* — $q/q_{c0}=q^0/q_{c0}=q_0^0/q_{c0}=q_c/q_{c0}$; *3* — $q/q_{c0}=q^0/q_{c0}=q_1^0/q_{c0}=q_c/q_{c0}$; *4* — $q_у^0/q_{c0}=Q_1^0/q_{c0}$; *5* — $q^0/q_{c0}=Q_1^0/q_{c0}$; *6* — $Q_\Sigma^0/q_{c0}=q_у^0/q_{c0}=q^0/q_{c0}=Q_0^0/q_{c0}+Q_1^0/q_{c0}$; *7* — q_c/q_{c0}; *8* — $q_0^0/q_{c0}=Q_0^0/q_{c0}$; *9* — $ц_{прод}/c_0$; для величин *1—8* левая шкала, для *9* — правая; на всем интервале 0—5,8 — площадка $\omega=0$

Считалось также, что

$$c(Q,t)=c(Q)\,c(t),\quad c(t)=1. \tag{11}$$

Цена сырья полагалась нулевой. Интервал планирования $T=58$ лет разбивался на 29 временны́х подынтервалов, каждый равен 2 года. На временно́м подынтервале все переменные задачи и функции полагались постоянными.

На рис. 1 показан оптимальный план развития отрасли, если все предприятия ее размещены на одной площадке $\omega=0$ (безразмерный момент ввода площадки $pt_0^0=0$). Как видно, план включает два предприятия (безразмерные моменты их ввода $pt_0^0=0$ и $pt_1^0=1{,}8$) с безразмерным функционалом $З/(f_0q_{c0})=41{,}9971$. Штрихпунктирная линия — спрос на продукцию отрасли $q_c(t)$, сплошной — режимы загрузки предприятий $q(t)=q^0(t)=q_j^0(t)$, пунктир (3, 4) — суммарная установленная мощность предприятий на площадке $q_у^0(t)$. Там, где штрихпунктир либо пунктир не видны, они совпадают со сплошной линией. Спрос $q_c(t)$, а следовательно, и $q(t)$, $q^0(t)$, $q_j^0(t)$ аппроксимировался ступенчатой функцией с шагом 2 года. Первое предприятие с порядковым номером $j=0$ работает в течение 18 лет в режиме отслеживания спроса ($q_0^0<Q_0^0$), затем прекращает работу на интервале 26 лет ($q_0^0=0$), далее в последние 14 лет возобновляет ее с полной нагрузкой ($q_0^0=Q_0^0$). В момент пре-

Характеристики локально-оптимальных планов при фиксированном числе площадок размещения предприятий

Безразмерные характеристики площадок	Число площадок $\Omega+1$			
	1	2	3	4
	Функционал $З/(f_0 q_{c0})$			
	41,9971	35,9405	37,1478	38,0967
Моменты ввода площадок в эксплуатацию				
pt_0^0	0,0	0,0	0,0	0,0
pt_0^1		4,4	2,6	2,0
pt_0^2			4,6	4,0
pt_0^3				5,4
Предельные установленные мощности площадок				
Q_Σ^0/q_{c0}	123,242	63,388	10,357	7,769
Q_Σ^1/q_{c0}		414,439	104,594	57,403
Q_Σ^2/q_{c0}			463,718	296,914
Q_Σ^3/q_{c0}				344,005

кращения работы первого предприятия ($t=18$ лет) вводится второе с порядковым номером $j=1$, которое вначале работает в режиме отслеживания спроса ($q_1^0<Q_1^0$) в течение 18 лет, после чего переключается на использование полной нагрузки ($q_1^0=Q_1^0$) и функционирует в этом режиме до конца планового интервала T.

На рис. 1 пунктиром показаны цены продукции отрасли $ц_{\text{прод}}(t)$. Их скачки приходятся на моменты ввода предприятий. Как указано в [2], для интервалов, где $q_0(t)=q_j^0(t)<q_{\text{у}}^0(t)$, цена продукции $ц_{\text{прод}}(t)=c(Q_j^0, t)$, $t_j^0<t<t_{j+1}^0$. Так как в примере цена сырья равна нулю, а $c(Q, t)=c(Q)c(t)=c(Q)$, то $ц_{\text{прод}}(t)=c(Q_j^0)$, $t_j^0<t<t_{j+1}^0$. На интервалах $t_{\text{п}j}^0<t<t_{j+1}^0$, где $t_{\text{п}j}^0$ — момент переключения предприятия j на режим полной нагрузки, склад продукции не пуст, $ц_{\text{прод}}(t)\,e^{-pt}=ц_{\text{прод}}(t_{j+1}^0)\times e^{-pt_{j+1}^0}=c(Q_j^0)\,e^{-pt_{\text{п}j}^0}$.

В таблице даны характеристики локально-оптимальных (наилучших) планов для фиксированных значений числа площадок размещения производства.

Как видно, оптимум достигается не тогда, когда все предприятия, выполняющие производственную программу, дислоцированы на одной площадке и безразмерный функционал $З/(f_0q_{c0})=41{,}9971$, а при размещении трех предприятий на двух площадках с безразмерным функционалом $З/(f_0q_{c0})=36{,}9405$. Этот план показан на рис. 2. Безразмерные моменты ввода площадок $pt_0^\omega=0$; 4,2. Все предприятия на обеих площадках работают в режиме отслеживания спроса, причем каждое следующее вводится в момент прекращения работы предыдущего. Остановленное предприятие не возобновляет работу до конца планового интервала. На площадке $\omega=0$ вводятся два предприятия (безразмерные моменты ввода $pt_0^0=0$ и $pt_0^1=1{,}8$), на площадке $\omega=1$ — одно ($pt_0^1=4{,}2$). Установленная мощность каждого из них больше текущей загрузки этого предприятия в момент прекращения его работы. Оказывается, что на данных площадках каждое из предприятий нигде не достигает своей предельно возможной производительности; становится выгодно прекратить работу раньше. Как отмечено в [1], при хорошем проектировании предприятий описанная ситуация едва ли может реализоваться. Большая установленная мощность здесь выбирается ради снижения текущих издержек. Вероятно, того же можно добиться более дешевыми средствами, не создавая излишней мощности.

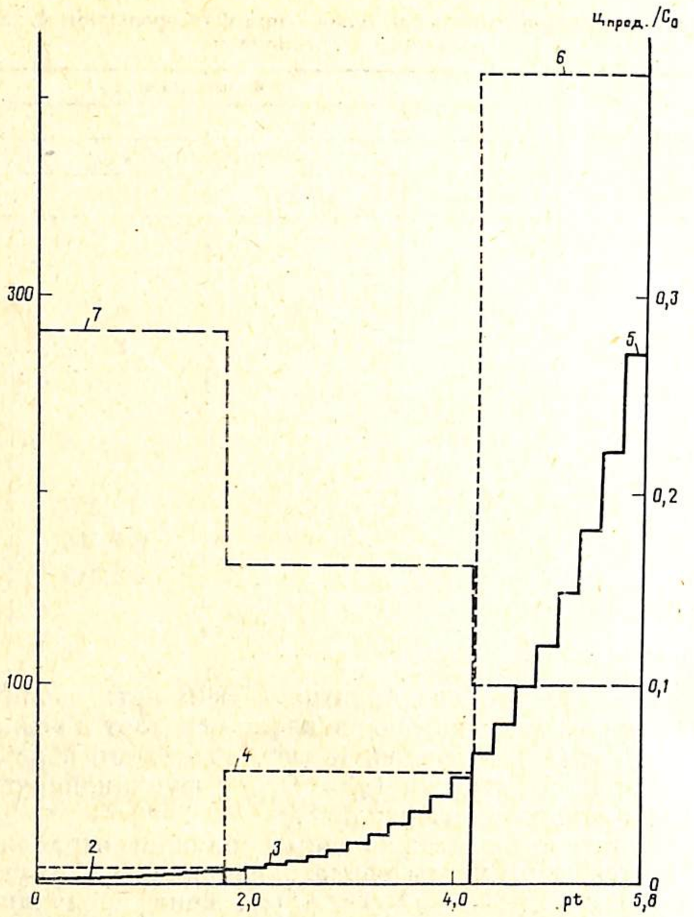

Рис. 2. Оптимальный план и цены для развития и размещения предприятий отрасли: *1* — $q_у^0/q_{c0} = Q_0^0/q_{c0}$; *2* — $q/q_{c0} = q^0/q_{c0} = q_0^0/q_{c0} = q_0/q_{c0}$; *3* — $q/q_{c0} = q^0/q_{c0} = q_1^0/q_{c0} = q_c/q_{c0}$; *4* — $Q_\Sigma/q_{c0} = q_у^0/q_{c0} = (Q_0^0 + Q_1^0)/q_{c0}$; *5* — $q/q_{c0} = q^1/q_{c0} = q_0^1/q_{c0} = q_c/q_{c0}$; *6* — $Q_\Sigma^1/q_{c0} = q_у^1/q_{c0} = Q_0^1/q_{c0}$; *7* — цпрод/с0; величины *1*—*6* — по левой шкале, *7* — по правой; на интервале 0—4,2 — площадка $\omega = 0$; 4,2—5,8 — $\omega = 1$

В этом методическом примере неудачно выбрано соотношение между капитальной и эксплуатационной составляющими затрат на предприятие: последняя сильно завышена. Каким должно быть это соотношение, чтобы установленная мощность предприятия j не превышала его максимальную текущую производительность? Пусть найден оптимальный план развития и размещения отрасли. Вариация затрат по Q_j для предприятия j даст выражение

$$\delta З = e^{-pt_j} \varkappa_j \delta Q_j, \tag{12}$$

где

$$\varkappa_j = \frac{df(Q_j)}{dQ_j} + \int_{t_j}^{T} \frac{\partial c(Q_j, t)}{\partial Q_j} q_j(t) e^{-p(t-t_j)} dt. \tag{13}$$

Пусть $\varkappa_j < 0$ и в оптимальном плане установленная мощность Q_j больше максимальной текущей производительности q_j. Тогда снижение Q_j, т. е. вариация $\delta Q_j < 0$, не нарушающая ограничений, приведет к росту функционала ($\delta З > 0$). При $\varkappa_j > 0$ в оптимальном плане установленная мощность предприятия не может превышать его максимальной текущей производительности, иначе не нарушающая ограничений вариация $\delta Q_j < 0$ могла бы уменьшить функционал.

Определим значение $\varkappa_j$ для приведенного методического примера с учетом (8)—(11), принимая для простоты $T \to \infty$ и $q_j = Q_j$ (режим работы предприятия j с полной нагрузкой)

$$\varkappa_j = \frac{df(Q_j)}{dQ_j} + \frac{1}{p} \frac{dc(Q_j)}{dQ_j} Q_j = Q_j^{-0,3}(0,7-3,0) < 0. \tag{14}$$

Таким образом, чтобы в этом примере установленная мощность предприятия не превышала его максимальную текущую производительность, нужно выбрать функции $f(Q)$ и $c(Q)$ такими, при которых выполнялось бы $\varkappa_j > 0$. Например, если оставить выражение для $c(Q)$ без изменения, то $f(Q)$ следует увеличить более чем в 4,3 раза.

На рис. 2 пунктиром показаны цены продукции отрасли $ц_{прод}(t)$. Для него справедливы все замечания, относящиеся к описанию графика цен на рис. 1.

В этом примере в локально-оптимальных планах при фиксированных числах площадок, равных трем и более, вводится по одному предприятию на каждой площадке. Поэтому моменты ввода предприятий совпадают с моментами ввода площадок, а установленные мощности предприятий равны предельным установленным мощностям площадок, где они размещены. Но такое размещение — не глобальный оптимум.

Заметим также, что оптимальный план, полученный в [1] для $F(Q_\Sigma) = 0$, не является локально-оптимальным планом для случая, когда $F(Q_\Sigma)$ задается выражением (7). Действительно, если $F(Q_\Sigma) = 0$, в этом плане вводятся три предприятия (безразмерные моменты их ввода равны $pt_j = 0$; 2; 4; безразмерные установленные мощности соответственно $Q_j/q_{c0} = 7{,}769$; 57,403; 381,743) с безразмерным функционалом $З/(f_0 q_{c0}) = 25{,}5998$.

Если $F(Q_\Sigma)$ взять из (7) и реализовать этот план без изменения на одной площадке ($pt_0^0 = 0$), то его безразмерный функционал равен $З/(f_0/q_{c0}) = 71{,}2913$, что больше безразмерного функционала для локально-оптимального плана одной площадки (см. таблицу), равного 41,9971.

Если же этот план реализовать на двух площадках так, чтобы первые два предприятия располагались на первой ($pt_0^0 = 0$), а третье — на второй ($pt_0^1 = 4$), то его безразмерный функционал $З/(f_0 q_{c0}) = 36{,}9690$, что также больше безразмерного функционала оптимального плана для двух площадок, составляющего 36,9405.

Наконец, если этот план реализовать на трех площадках так, чтобы на каждой из них вводилось только одно предприятие ($pt_0^\omega = 0$; 2; 4), то его безразмерный функционал $З/(f_0 q_{c0}) = 37{,}8260$, что также больше безразмерного функционала локально-оптимального плана для трех площадок, равного 37,1478.

Таким образом, в приведенном методическом примере предложенный подход позволил выявить преимущества строительства предприятий очередями на разных площадках по сравнению с размещением предприятий на одной из них.

Этот пример решен на ЭВМ ЕС-1033 с помощью разработанного авторами автоматизированного комплекса оптимизационных программ, написанных на языке ФОРТРАН-IV [1]. Максимальная размерность матрицы задачи линейного программирования в этом примере имела 2400 строк и 2195 столбцов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шевелёв Я. В., Клименко А. В.* О перераспределении заданий по выпуску продукции в процессе ввода новых и ликвидации старых предприятий//Экономика и мат. методы. 1989. Т. XXV. Вып. 6.
2. *Шевелёв Я. В., Клименко А. В.* Оптимизация развития отрасли с крупными предприятиями//Экономика и мат. методы. 1981. Т. XVII. Вып. 1.

Поступила в редакцию
9 XI 1989