# НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ФУНКЦИИ КОББА — ДУГЛАСА

*Смагин Б. И.*

**(Мичуринск)**

Рассмотрим логические предпосылки, лежащие в основе производственной функции (ПФ) Кобба — Дугласа.

Пусть для производства продукции требуются $n$ видов ресурсов. Обозначим через $Y$ объем выпускаемой продукции, а через $x_j$, $j=1, \ldots, n$ — затраты ресурса $j$. Тогда $Y=f(x_1, \ldots, x_n)$. Предполагается, что имеет место взаимозаменяемость ресурсов, т. е. одно и то же количество продукции может быть произведено при различных затратах ресурсов и нехватка одного из них покрывается избытком другого.

Если увеличить затраты ресурса $j$ на $\Delta x_j$, то при неизменных объемах других ресурсов количество выпускаемой продукции будет $f(x_1, \ldots, x_j+\Delta x_j, \ldots, x_n)$, а ее прирост, обусловленный дополнительными затратами ресурса $j$

$$\Delta Y=f(x_1, \ldots, x_j+\Delta x_j, \ldots, x_n)-f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n).$$

Величина $Y/x_j$ — средняя производительность ресурса $j$. В этом случае естественно предположить наличие равенства

$$\Delta Y=\alpha_j(Y/x_j)\Delta x_j,\ j=1, \ldots, n, \tag{1}$$

т. е. прирост продукции из-за дополнительных затрат ресурса $j$ прямо пропорционален произведению средней производительности этого ресурса на дополнительные затраты. Коэффициент пропорциональности $\alpha_j \in (0;\ 1)$. Это означает, что при увеличении затрат ресурса выпуск продукции возрастает, но в то же время прирост меньше своего «естественного» уровня $(Y/x_j)\Delta x_j$, так как дополнительные затраты ресурса $j$ не обеспечиваются соответствующим повышением затрат других видов ресурсов, т. е. затраты ресурса $j$ увеличиваются при неизменной производственной базе.

Поделив (1) на $\Delta x_j$ и переходя к пределу при $\Delta x_j \to 0$, получим

$$\partial Y/\partial x_j=\alpha_j(Y/x_j),\ j=1, \ldots, n. \tag{2}$$

Вычислим полный дифференциал функции $Y=f(x_1, \ldots, x_n)$ $\partial Y=(\partial Y/\partial x_1)dx_1+\ldots+(\partial Y/\partial x_n)\partial x_n=\alpha_1(Y/x_1)dx_1+\ldots\times\alpha_n(Y/x_n)dx_n$.

Разделив обе части равенства на $Y$ и интегрируя, имеем $\ln Y=\alpha_1 \ln x_1+\ldots+\alpha_n \ln x_n+\ln a_0$, откуда $Y=a_0x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}=a_0\prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_j}$, т. е. зависимость между объемом выпускаемой продукции и используемыми ресурсами описывается ПФ Кобба — Дугласа.

Условие взаимозаменяемости ресурсов часто вступает в противоречие со свойствами моделируемых производственных систем. Однако в реальных системах ресурсы, как правило, варьируют незначительно, так что в данной области их можно полагать взаимозаменяемыми. Это позволяет успешно применять для описания производственных процессов функцию Кобба — Дугласа.

Для ПФ с $n$ ресурсами величина $\varphi_{0j}=Y/x_j$ выражает среднюю производительность ресурса $j$, а $\gamma_{0j}=\partial Y/\partial x_j$ — его предельную производительность. Введем в рассмотрение величину $E_{0j}=(d\varphi_{0j}/\varphi_{0j})/(d\gamma_{0j}/\gamma_{0j})$, которая характеризует изменение предельной производительности ресурса $j$ с ростом его средней производительности. Ответ на вопрос о взаимосвязи между значениями $E_{0j}$ и ПФ Кобба — Дугласа дает следующее утверждение.

**Теорема.** *Для того чтобы зависимость между факторами производства $x_1, \ldots, x_n$ и объемом выпускаемой продукции $Y$ описывалась ПФ Кобба — Дугласа, необходимо и достаточно выполнения условия $E_{0j}=1$.*

Доказательство. **Необходимость.** Пусть $Y=a_0x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n}$, тогда $\gamma_{0j}=\partial Y/\partial x_j=\alpha_j(Y/x_j)$, $\varphi_{0j}=Y/x_j=\gamma_{0j}/\alpha_j$, $\gamma_{0j}/\varphi_{0j}=\alpha_j$,

$$d\varphi_{0j}/d\gamma_{0j}=1/\alpha_j,\ E_{0j}=(d\varphi_{0j}/d\gamma_{0j})(\gamma_{0j}/\varphi_{0j})=(1/\alpha_j)\alpha_j=1.$$

**Достаточность.** Пусть $E_{0j}=1$, тогда $d\varphi_{0j}/\varphi_{0j}=d\gamma_{0j}/\gamma_{0j}$. Интегрируя это уравнение, будем иметь $\ln|\gamma_{0j}|=\ln|\varphi_{0j}|+\ln\alpha_j$, откуда $\gamma_{0j}=\alpha_j\varphi_{0j}$ или, используя выражение для $\gamma_{0j}$ и $\varphi_{0j}$, получим $\partial Y/\partial x_j=\alpha_j Y/x_j$, $j=1, \ldots, n$.

Эти уравнения совпадают с системой (2), которая, как мы видели, приводит к ПФ Кобба — Дугласа.

Поступила в редакцию
7 V 1987