МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

УПОРЯДОЧЕНИЕ РАБОТ ПО СТЕПЕНИ ИХ ВАЖНОСТИ И ВРЕМЕНИ ПЕРЕНАЛАДОК

Бабаев А. А.

(Ленинград)

Рассматривается задача отыскания оптимального порядка выполнения работ одним устройством в предположении, что время переналадки устройства зависит от пары соседних работ. Для решения задачи предлагается вариант метода ветвей и границ, определяемый стратегией ветвления и способом оценки границ.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается следующая задача теории расписаний.

В некоторую систему одновременно поступает N работ с заданной «степенью важности» c_j, $j=1, \ldots, N$, и продолжительностью выполнения τ_j каждой. При составлении расписания процесс обслуживания может начаться с любой работы. Однако перед выполнением каждой новой производится переналадка системы, длительность которой зависит от характера предшествующей работы и задана в виде матрицы $\|t_{ij}\|$, $i=0, \ldots, N$, $j=1, \ldots, N$, $i\neq j$. Требуется составить расписание, оптимальное по критерию минимума суммарной взвешенной длительности T прохождения работ в системе.

Математически эта задача формулируется следующим образом. Определить порядок выполнения работ («матрицу расписания») $X=\|x_{ij}\|$, минимизирующий значение целевой функции

$$T=\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=1}^{N}(t_{ij}+\tau_j)x_{ij}\sum_{j=1}^{N}c_j y_{ij} \quad (1)$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{N}x_{0j}=1,\quad \sum_{j=1}^{N}x_{ij}\leqslant 1,\ i=1,\ldots,N, \quad (2)$$

$$\sum_{i=0}^{N}x_{ij}=1,\quad j=1,\ldots,N, \quad (3)$$

$$z_i-z_j+Nx_{ij}\leqslant N-1,\ 0\leqslant i\neq j\leqslant N, \quad (4)$$

где

$$x_{ij}=\begin{cases}1, & \text{если работа } j \text{ выполняется после работы } i,\\ 0, & \text{в противном случае, } i=0,\ldots,N,\ j=1,\ldots,N;\end{cases}$$

$$y_{ij}=\begin{cases}1, & \text{если } z_i<z_j,\\ 0, & \text{в противном случае, } i=0,\ldots,N,\ j=1,\ldots,N;\end{cases}$$

$z_j\in\{1, \ldots, N\}$, $j=1, \ldots, N$,— очередность выполнения работы j.

Сформулированную задачу в соответствии с классификацией, предложенной в [1], следует отнести к задачам упорядочения. По своему физическому смыслу ее критерий оптимизации как бы объединяет противоречивые требования задач о коммивояжере и минимизации взвешенной средней длительности прохождения работ без переналадок [2].

Целочисленная формулировка задачи (1)—(4) существенно отличается от традиционной модели Таккера для задачи о коммивояжере [3]. Целевая функция (1) содержит принципиально новый сомножитель $\sum_{j=1}^{N} c_j y_{ij}$, который представляет собой сумму важностей работ, ожидающих своего выполнения. Ограничение (2) получено из аналогичного ограничения в задаче о коммивояжере заменой знака «=» на «$\leqslant$». Это объясняется тем, что по условию не требуется возврата системы в исходное состояние. Ограничения (3), (4) идентичны соответствующим ограничениям модели Таккера.

В качестве примера приведем некоторые задачи, имеющие практическую направленность, которые сводятся к постановке (1)—(4).

Задача 1. Транспортное средство доставляет на N объектов от пункта сбора N бригад, состоящих из c_j, $j=1, \ldots, N$, рабочих. Известны время задержки транспортного средства на каждом объекте τ_j, $j=1, \ldots, N$, и матрица времени переезда от одного объекта (или пункта сбора) до другого $\|t_{ij}\|$, $i=0, \ldots, N$, $j=1, \ldots, N$. Требуется указать такой маршрут доставки бригад на объекты, который минимизирует суммарные потери рабочего времени T, связанные с отрывом бригад от работы во время переездов.

Задача 2. Специализированная бригада должна произвести замену некоторого оборудования (реконструкцию) на N участках производственного объединения. Известны время реконструкции каждого участка τ_j и матрица времени перебазирования бригады с участка на участок $\|t_{ij}\|$. После реконструкции за счет повышения производительности труда каждый участок будет давать дополнительную прибыль c_j в единицу времени. Требуется указать такую последовательность реконструкции участков, которая минимизирует потери суммарного дохода объединения за время проведения реконструкции.

Задача 3. Процесс ввода технической системы в рабочее состояние заключается в последовательной проверке и включении в режим холостого хода N устройств. Известны матрица времени переналадок $\|t_{ij}\|$ контрольно-пусковой аппаратуры, время проверки τ_j и расход энергии в режиме холостого хода за единицу времени c_j для каждого устройства. Необходимо найти последовательность включения устройств, минимизирующую расход энергии в процессе ввода технической системы в рабочее состояние.

В содержательных постановках этих задач под работами понимаются доставка бригад, замена оборудования, включение устройств, а под степенью важности — численности бригад, дополнительная прибыль, расход энергии. Параметры τ_j и t_{ij} во всех задачах имеют временной характер.

Смысл минимизации целевой функции в математической модели (1)—(4) поясним на задаче 1. Здесь суммарные потери рабочего времени на маршруте транспортного средства зависят и от численности еще не доставленных на объекты рабочих и от продолжительности их доставки туда. Если указать маршрут доставки минимальной продолжительности (задача о коммивояжере), то может оказаться, что самые большие бригады попадут на объекты в последнюю очередь, и это приведет к увеличению суммарных потерь рабочего времени. Если же сначала привозить на объекты бригады наибольшей численности, то возможна ситуация, при которой маршрут доставки станет слишком продолжительным и в результате суммарные потери также возрастут.

В связи с этим требуется разработка нового подхода в определении минимума целевой функции для сформулированных задач. Поскольку уже рассмотренные по своей природе являются комбинаторными, то для их решения предлагается воспользоваться методом ветвей и границ [4], позволяющим для широкого класса задач теории расписаний существенно сократить объем перебора при поиске оптимальных вариантов. При конкретизации основных идей метода применительно к задаче (1)—(4)

необходимо определить способ оценки нижней границы конструируемого решения, а также выбрать структуру дерева вариантов, стратегию ветвления и систему нумерации вершин [5].

СПОСОБ ОЦЕНКИ НИЖНЕЙ ГРАНИЦЫ РЕШЕНИЯ

Предварительно проанализируем метод решения задачи минимизации взвешенной средней длительности прохождения работ без переналадок [2]. Суть его заключается в построении упорядоченной по убыванию последовательности отношений c_j/τ_j, $1\leqslant j\leqslant N$, причем расписание работ, соответствующее этой последовательности, будет оптимальным.

Подобный подход можно положить в основу оценки нижней границы решения для задачи (1)—(4). С этой целью докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Если выполняются условия*

$$t^*_{j-1,j}=\min_{0\leqslant i\leqslant N} t_{ij},\ j=1,\ldots,N, \tag{5}$$

$$\frac{c_1}{\tau_1^*}\geqslant\frac{c_2}{\tau_2^*}\geqslant\ldots\geqslant\frac{c_N}{\tau_N^*}, \tag{6}$$

где $\tau_j^*=t^*_{j-1,j}+\tau_j$, $j=1,\ldots,N$, $z_1{}^*=1$, $z_2{}^*=2,\ldots,z_N{}^*=N$, *то матрица расписания* $X^*=\|x^*_{ij}\|$ *с единичными значениями диагональных элементов* $x^*_{01}, x^*_{12},\ldots,x^*_{N-1,N}$ *является решением задачи* (1)—(4), *а минимальное значение целевой функции вычисляется по формуле*

$$T^*=\sum_{j=1}^{N}\tau_j^*\sum_{i=j}^{N}c_i. \tag{7}$$

(Доказательство приводится в приложении.)

Следствие. В том случае, когда условие (6) выполняется, а (5) не выполняется, величина T^*, определяемая по (7), является нижней границей значения целевой функции (1).

Таким образом, при решении задачи (1)—(4) методом ветвей и границ для определения нижней границы на дереве вариантов достаточно добиться выполнения условия (6) и произвести вычисления по (7).

ПОВЫШЕНИЕ ТОЧНОСТИ РАСЧЕТА НИЖНЕЙ ГРАНИЦЫ

Рассмотрение теоремы 1 наводит на мысль о проведении эквивалентных преобразований исходных данных задачи (1)—(4). Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Если матрица расписания* $X^*=\|x_{ij}\|$ *является решением задачи* (1)—(4), *то эта же матрица при ограничениях* (2)—(4) *минимизирует целевую функцию*

$$T'=\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=1}^{N}(t'_{ij}+\tau'_j)\,x_{ij}\sum_{j=1}^{N}c_jy_{ij}, \tag{8}$$

где

$$t'_{ij}=t_{ij}-v_i-u_j,\ i=0,\ldots,N,\ j=1,\ldots,N, \tag{9}$$

$$\tau_j'=\tau_j+v_j+u_j,\ j=1,\ldots,N, \tag{10}$$

$$v_i=\min_{1\leqslant j\leqslant N} t_{ij},\ i=0,\ldots,N, \tag{11}$$

$$u_j=\min_{0\leqslant i\leqslant N}(t_{ij}-v_i),\ j=1,\ldots,N. \tag{12}$$

(Доказательство дано в приложении.)

Следствие. Оптимальное значение целевой функции (1) отличается от оптимального значения целевой функции (8) на величину

$$\Delta T=T-T'=\sum_{j=1}^{N}(v_0-v_j)\,c_j. \tag{13}$$

Рассмотренная теорема дает нам право производить предварительные преобразования исходных данных задачи и более точно определить нижнюю границу решения при поиске оптимального варианта расписания.

АЛГОРИТМ ПОИСКА ОПТИМАЛЬНОГО РАСПИСАНИЯ

При определении структуры дерева вариантов будем исходить из физического смысла задачи, заключающейся в выборе некоторой последовательности выполнения N работ. Тогда естественно представить дерево вариантов состоящим из $(N+1)$-го яруса. На нулевом ярусе расположена корневая вершина. Смежными корневой вершине будут N вершин первого яруса, каждой из которых можно поставить в соответствие значение переменной $x_{0j}=1$, $j=1, \ldots, N$. Для каждой вершины первого яруса могут быть смежны $(N-1)$ вершин второго, причем у переменных $x_{ij}=1$ индекс i совпадает по своему значению с индексом j переменной $x_{0j}=1$ смежной вершины первого яруса. Вершинам второго яруса могут быть смежны $(N-2)$ вершин третьего и т. д. Поскольку каждая отдельная ветвь напоминает пирамиду, то о таком дереве вариантов можно сказать, что оно имеет пирамидальную структуру.

Для нумерации вершин дерева воспользуемся списковой системой. Каждой вершине поставим в соответствие список $X_n=\{I_1, \ldots, I_k, \ldots, I_n\}$, где $I_k=\langle i, j\rangle$, $i\in\{0, 1, \ldots, N\}$, $j\in\{1, \ldots, N\}$, $k=1, \ldots, n$, $1\leqslant n\leqslant N$. При такой нумерации расположение любой вершины на дереве вариантов однозначно определяется по ветви, идущей от корневой вершины к рассматриваемой вершине n-го яруса, при этом индексы бинарных отношений $\langle i, j\rangle\in X_n$ указывают на последовательность выполнения работ в конструируемом варианте расписания.

Работы, не вошедшие в список X_n, будем включать в множество $R_n=\{r_k | r_k\neq j\in\langle i, j\rangle\in X_n, k=1, \ldots, N-n\}$, упорядоченное так, что выполняется условие

$$\frac{c_{r_1}}{\tau'_{r_1}}\geqslant \ldots \geqslant \frac{c_{r_{N-n}}}{\tau'_{r_{N-n}}}, \quad 1\leqslant n\leqslant N. \tag{14}$$

Тогда в соответствии с теоремами 1 и 2 для любой вершины дерева вариантов, предварительно положив $T_0(X_0)=0$, $\Delta T_0(X_0)=\Delta T$, нижнюю границу определим по формуле

$$H_n(X_n)=T_n(X_n)+\Delta T_n(X_n)+T_n^*, \tag{15}$$

где

$$T_n(X_n)=T_{n-1}(X_{n-1})+(t'_{ij}+\tau'_j)\left(c_j+\sum_{l\in R_n} c_l\right), \ \langle i, j\rangle\in X_n, \tag{16}$$

$$\Delta T_n(X_n)=\Delta T_{n-1}(X_{n-1})+\sum_{l\in R_n}(v_i-v_l)c_l, \quad i\in I_n, \tag{17}$$

$$T_n^*=\sum_{k=1}^{N-n}\tau'_{r_k}\sum_{l=k}^{N-n}c_l. \tag{18}$$

Последовательность ветвления вершин на дереве вариантов найдем в соответствии со стратегией радиального ветвления по локальному минимуму нижней границы решения. Тогда на n-м ярусе ветвлению подвергнется та вершина $X_n{}^0$, для которой выполняется условие

$$H_n^0(X_n^0)=\min_{I_n\in X_n} H_n(X_{n-1}\cup I_n).$$

В результате на N-м ярусе дерева вариантов будет получено приближенное решение задачи (1)—(4) со значением целевой функции

$$T^0=T_N(X_N)+\Delta T_N(X_N).$$

После этого осуществляется последовательный просмотр неветвленных вершин $(N-1)$-го, $(N-2)$-го и т. д. ярусов и отыскивается ближай-

Таблица 1

i	$\|t_{ij}\|$				
0	2	4	2	2	3
1	∞	5	4	3	3
2	3	∞	6	4	5
3	1	3	∞	3	2
4	4	5	3	∞	1
5	3	2	1	3	∞
τ_j	3	2	1	2	1
c_j	2	3	2	1	1
j	1	2	3	4	5

Таблица 2

i	$\|t'_{ij}\|$				
0	0	1	0	0	1
1	∞	1	1	0	0
2	0	∞	3	1	2
3	0	1	∞	2	1
4	3	3	2	∞	0
5	2	0	0	2	∞
τ'_j	6	6	2	3	2
c_j	2	3	2	1	1
j	1	2	3	4	5

шая вершина, для которой справедливо неравенство

$$H_n(X_n) < T^0. \tag{19}$$

Найденная вершина подвергается ветвлению. Эта процедура осуществляется до тех пор, пока соблюдается условие (19). При этом, если снова удается достичь N-го яруса, то уточняется приближенное решение и величина T^0 получает новое значение.

Если при последующем просмотре неветвленных вершин вернуться к корневой вершине, т. е. на дереве вариантов в соответствии с условием (19) не останется ни одной перспективной вершины, то поиск лучшего расписания на этом заканчивается, и приближенное решение, найденное последним, объявляется оптимальным.

ПРИМЕР

Рассмотрим процесс решения задачи (1)—(4) по исходным данным, представленным в табл. 1.

В соответствии с теоремой 2 по правилам (11), (12) находим приводящие константы $\{v_i\}=\{2, 3, 3, 1, 1, 1\}$, $\{u_j\}=\{0, 1, 0, 0, 0\}$, а по формулам (9), (10) преобразуем исходные данные к виду, показанному в табл. 2. По (13) получим $\Delta T = -1$.

На первом ярусе дерева вариантов для вершины $X_1=\{\langle 0, 1\rangle\}$ по формуле (16) имеем: $T_1(\langle 0, 1\rangle)=0+(0+6)(2+3+2+1+1)=54$. При определении величины $\Delta T_1(\langle 0, 1\rangle)$ из табл. 2 вычеркиваем нулевую строку и первый столбец, производим эквивалентные преобразования (9)—(12) и по (17) получаем $\Delta T_1(\langle 0, 1\rangle) = -1+(-5) = -6$. Для расчета T_1^* предварительно установим соответствие индексов j элементам r_k по условию (14); запишем множество $R_1=3, 5, 2, 4$ и по (18) получим $T_1^*=3(2+1+$ $+3+1)+2(1+3+1)+7(3+1)+3\times 1=62$. Теперь по (15) рассчитаем

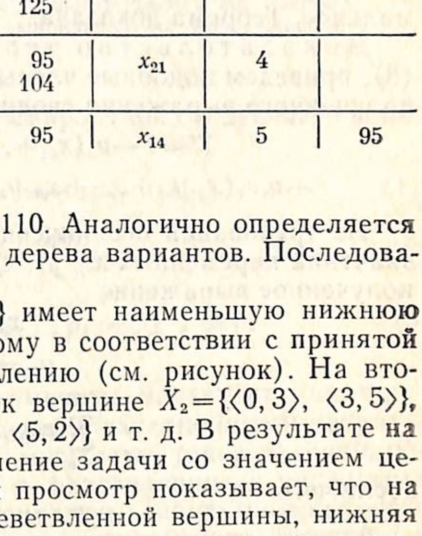
Таблица 3

i	j	$T_n(X_n)$	$\Delta T_n(X_n)$	T_n^*	$H_n(X_n)$	x_{ij}^0	z_j^0	T^0
0	1 2 3 4 5	54 63 18 27 27	—6 —1 —1 —1 —3	62 51 71 70 75	110 113 88 96 99	x_{03}	1	
3	1 2 4 5	60 67 53 39	—4 —3 —1 —4	41 34 54 60	97 98 106 95	x_{35}	2	
5	1 2 4	87 75 87	—7 —4 —6	34 24 44	114 95 125	x_{52}	3	
2	1 4	93 96	—4 —4	6 12	95 104	x_{21}	4	
1	4	99	—4	0	95	x_{14}	5	95

нижнюю границу $H_1(\langle 0, 1\rangle)=54-6+62=110$. Аналогично определяется нижняя граница и для остальных вершин дерева вариантов. Последовательность расчета показана в табл. 3.

На первом ярусе вершина $X_1=\{\langle 0,3\rangle\}$ имеет наименьшую нижнюю границу $\min H_1(X_1)=H_1(\langle 0,3\rangle)=88$, поэтому в соответствии с принятой стратегией она первой подвергается ветвлению (см. рисунок). На втором ярусе такое же правило применено к вершине $X_2=\{\langle 0,3\rangle, \langle 3,5\rangle\}$, на третьем — к вершине $X_3=\{\langle 0,3\rangle, \langle 3,5\rangle, \langle 5,2\rangle\}$ и т. д. В результате на пятом ярусе получаем приближенное решение задачи со значением целевой функции $T^0=95$. Последовательный просмотр показывает, что на дереве вариантов не осталось ни одной неветвленной вершины, нижняя граница которой была бы меньше T^0. Отсюда делаем вывод, что в вершине $X_5=\{\langle 0,3\rangle, \langle 3,5\rangle, \langle 5,2\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 1,4\rangle\}$ достигается оптимальное решение, которому соответствует матрица расписания с единичными значениями переменных x_{03}, x_{35}, x_{52}, x_{21}, x_{14}.

В заключение отметим, что рассмотренный алгоритм решения задачи (1)—(4) запрограммирован на языке ПЛ/1 для ЕС ЭВМ. Программа для своей работы требует рабочую область оперативной памяти объемом около $10N^2$ байт. На ЭВМ ЕС-1030 было решено несколько десятков задач различных размерностей. Вычислительный эксперимент показал, что среднее время решения задачи с увеличением N растет экспоненциально и для $N=20$ оно составляет около 16 мин.



Дерево решений тестового примера

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Пусть имеется два расписания, отличающихся транспозицией (перестановкой) двух работ. В первом условия (5)—(6) выполняются, а во втором — не выполняются для j-го и $(j+1)$-го членов неравенства, т. е. $(j+1)$-я работа выполняется в j-ю очередь, а j-я работа в $(j+1)$-ю. Тогда, раскрыв по формуле (7) содержимое T_1^*

и T_2^* соответственно для первого и второго расписаний, имеем

$$T_1^* = \tau_1'(c_1 + \ldots + c_N) + \tau_2'(c_2 + \ldots + c_N) + \ldots +$$
$$+ \tau_j'(c_j + \ldots + c_N) + \tau_{j+1}'(c_{j+1} + \ldots + c_N) + \ldots + \tau_N' c_N,$$
$$T_2^* = \tau_1'(c_1 + \ldots + c_N) + \tau_2^{\circ}(c_2 + \ldots + c_N) + \ldots + \tau_{j+1}'(c_{j+1} + c_j +$$
$$+ c_{j+2} + \ldots + c_N) + \tau_j'(c_j + c_{j+2} + \ldots + c_N) + \ldots + \tau_N^{\circ} c_N.$$

Определив разность этих величин, получим

$$T_2^* - T_1^* = \tau_{j+1}' c_j - \tau_j c_{j+1} = \tau_j' \tau_{j+1}'(c_j/\tau_j' - c_{j+1}/\tau_{j+1}').$$

Поскольку $\tau_j'\tau'_{j+1} > 0$ и $c_j/\tau_j' > c_{j+1}/\tau'_{j+1}$, то разность $T_2^* - T_1^*$ является положительной величиной, т. е. справедливо утверждение, что по нашему критерию оптимизации первое расписание лучше второго. Аналогично можно показать, что любая транспозиция работ в первом расписании не приведет к его улучшению. Следовательно, это расписание — оптимальное. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Раскроем содержимое формулы (8), приведем подобные члены и, перегруппировав их, заметим, что часть полученного выражения сводится к (1), т. е.

$$T' = T - v_0(x_{01} + \ldots + x_{0N})(c_1 y_{01} + \ldots + c_N y_{0N}) +$$
$$+ v_1 c_1 (x_{01} y_{01} + \ldots + x_{N1} y_{N1}) + \ldots + v_N c_N (x_{0N} y_{0N} + \ldots + x_{NN} y_{NN}).$$

Из требований ограничений (3), (4) и анализа области допустимых значений переменных x_{ij}, y_{ij}, z_j можно сделать следующие подстановки в полученное выражение

$$x_{01} + \ldots + x_{0N} = 1,$$
$$y_{01} = y_{02} = \ldots = y_{0N} = 1,$$
$$\sum_{i=0}^{N} x_{ij} y_{ij} = 1, \quad j = 1, \ldots, N,$$

после чего

$$T' = T - v_0 \sum_{j=1}^{N} c_j + \sum_{j=1}^{N} v_j c_j.$$

Так как второе и третье слагаемые в этом выражении являются константами, то минимум величин T и T' достигается при одних и тех же значениях элементов матрицы расписания $X^* = \|x_{ij}^*\|$.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Танаев В. С., Шкурба В. В.* Введение в теорию расписаний. М.: Наука, 1975.
2. *Конвей Р. В., Максвелл В. Л., Миллер Л. В.* Теория расписаний. М.: Наука, 1975.
3. *Кофман А., Анри-Лабордер А.* Методы и модели исследования операций. Целочисленное программирование. М.: Мир, 1977.
4. *Корбут А. А., Финкельштейн Ю. Ю.* Дискретное программирование. М.: Наука, 1969.
5. *Бабаев А. А.* Организация поиска решений на деревьях детерминированной структуры//Электрон. моделирование. 1985. № 1.

Поступила в редакцию
18 II 1988