

МНОГОМЕРНАЯ ЗАДАЧА СТАНДАРТИЗАЦИИ С ВЗАИМОЗАВИСИМЫМИ ПРОИЗВОДСТВЕННО-ЭКСПЛУАТАЦИОННЫМИ ЗАТРАТАМИ

Алексеев О. Г., Васильковский С. А.

(Ленинград)

Исследуется многомерная задача стандартизации, в которой производственно-эксплуатационные затраты, связанные с использованием каждого типа изделий, определены на множестве удовлетворяемых им потребностей. Предлагается алгоритм ее решения, основанный на идеях метода ветвей и границ.

Рассмотрим задачу дискретного программирования следующего вида. Найти $\alpha \in I = \{1, \dots, m\}$ такое, что

$$f(\alpha) = \min \{f(\omega) \mid \omega \in I, \omega \neq \emptyset\}, \quad (1)$$

$$f(\omega) = \sum_{i \in \omega} [r_i + \min_{\beta_i \subseteq J} c_i(\beta_i)], \quad (2)$$

$$\beta_i \subseteq J = \{1, \dots, n\}, \bigcup_{i=1}^{|\omega|} \beta_i = J, \beta_i \cap \beta_k = \emptyset, i \neq k. \quad (3)$$

Ее можно интерпретировать как многомерную задачу стандартизации с взаимозависимыми производственно-эксплуатационными затратами, имея в виду следующее [1]. Пусть I — множество типов изделий, обладающих ограниченной заменяемостью и различающихся числовыми значениями параметров. Необходимо определить такую совокупность изделий $\alpha \in I$, которая обеспечивает множество видов потребностей J с минимальными суммарными затратами $f(\alpha)$. При этом r_i отражает затраты на разработку изделий типа i , а $c_i(\beta_i)$ — на производство и эксплуатацию таких же изделий и зависит от всего множества удовлетворяемых им потребностей β_i . Таким образом, налицо обобщение известной задачи унификации [1—3].

Аналогичные задачи могут быть сформулированы как обобщения задач размещения [4] и задач о покрытии [5], что говорит об универсальности рассматриваемой постановки.

Несмотря на достаточную общность и большую практическую значимость, задача (1)—(3) мало исследована. В [6] построен алгоритм ветвей и границ для решения задач линейного программирования с взаимозависимыми доплатами. Далее предлагается подобный алгоритм для задачи (1)—(3), учитывающий ее особенности. В его основе лежит способ сведения этой задачи к задаче унификации в обычной формулировке, методы решения которой довольно хорошо разработаны.

Для описания алгоритма рассмотрим процесс построения дерева возможных вариантов, вершины которого будем нумеровать по мере их появления. Пусть $N^t, t=0, 1, \dots$ — номер вершины и N^0 — корневая вершина. Свяжем с каждой вершиной множество меток $\{l_{ij} \mid i \in I, j \in J\}$ таких, что $l_{ij}=1$ ($l_{ij}=0$), если в процессе построения ветви от N^0 к N^t было принято решение об использовании (неиспользовании) изделий i для удовлетворения потребностей j ; $l_{ij}=S$, если ни одно из этих решений принято не было.

Для каждой вершины N^t и каждого изделия $i \in I$ введем множества

$$K_{it} = \{j \mid l_{ij} = S, j \in J\}, K_{it}^1 = \{j \mid l_{ij} = 1, j \in J\},$$

$$K_{it}^0 = \{j | l_{ij} = 0, j \in J\}.$$

В этом случае общую схему алгоритма можно описать следующим образом.

На каждом шаге алгоритма $v=1, 2, \dots$ выбирается вершина N^t и изделие p , для которого $K_{pt} \neq \emptyset$. Из K_{pt} выбирается переменная q , по которой осуществляется ветвление вершины N^t на две новые: N^{2v-1} и N^{2v} . В вершине N^{2v-1} полагается, что изделие p не будет использоваться для удовлетворения потребностей q ($K_{p,2v-1} = K_{pt} \setminus \{q\}$; $K_{p,2v-1}^1 = K_{pt}^1$; $K_{p,2v-1}^0 = K_{pt}^0 \cup \{q\}$).

В вершине N^{2v} полагается, что изделие p будет использовано для удовлетворения потребностей q ($K_{i,2v} = K_{it} \setminus \{q\}$, $i \in I$; $K_{p,2v}^1 = K_{pt}^1 \cup \{q\}$, $K_{p,2v}^0 = K_{pt}^0$, $K_{i,2v}^0 = K_{it}^0 \setminus \{q\}$, $i \in I$, $i \neq p$).

Таким образом, в каждой вершине N^t множество потребностей, которое может удовлетворить изделие i , равно $J_{it} = K_{it}^1 \cup K_{it}^0$.

Для каждой вновь созданной вершины N^t формируются вспомогательная P_0^t и оценочная P_1^t задачи. Первая (P_0^t) получается из (1)–(3) заменой множества J потребностей, которые может удовлетворить изделие i на J_{it} , $i \in I$, т. е. задача P_0^t имеет вид

$$f(\alpha_t) = \min \{f(\omega) | \omega \subseteq I, K_{it}^1 \subseteq \beta_i \subseteq J_{it}, \omega \neq \emptyset\}, \quad (4)$$

где α_t — ее решение.

Введем величину минимальных затрат при удовлетворении изделием i потребностей j

$$c_{ij}^t = \begin{cases} \min_{K_{it}^1 \subseteq \gamma \subseteq J_{it}} [c_i(\gamma) - c_i(\gamma \setminus \{j\})], & i \in I, j \in K_{it}, \\ 0, & i \in I, j \in K_{it}^1, \\ \infty, & i \in I, j \in K_{it}^0, \end{cases} \quad (5)$$

и сформулируем оценочную задачу P_1^t

$$\tilde{f}(\tilde{\alpha}_t) = \min \{\tilde{f}(\omega) | \omega \subseteq I, \omega \neq \emptyset\}, \quad (6)$$

где

$$\tilde{f}(\omega) = \sum_{i \in \omega} [r_i + c_i(K_{it}^1)] + \sum_{j \in J} \min_{i \in \omega} c_{ij}^t \quad (7)$$

и $\tilde{\alpha}_t$ — решение задачи P_1^t .

Она представляет собой задачу унификации в обычной постановке, и в дальнейшем будем полагать, что методы ее решения известны. При этом если $\tilde{\alpha}_t$ — решение задачи P_1^t , то множество потребностей, удовлетворяемых изделием i , определяется выражением

$$\tilde{\beta}_{it} = \{j | c_{ij}^t = \min \{c_{pq}^t | p \in \tilde{\alpha}_t\}, q \in J_{it}\}. \quad (8)$$

Из определения задач P_0^t и P_1^t следует, что они имеют одно и то же множество допустимых решений. Это обстоятельство позволяет сформулировать теоремы, обосновывающие описанные ниже правила отбраковки бесперспективных вершин.

Теорема 1. Если $\omega_t \subseteq I$, $K_{it}^1 \subseteq \beta_{it} \subseteq J_{it}$ — допустимое решение задачи P_0^t и $\{c_{ij}^t\}$ определены согласно (5), то

$$c_i(\beta_{it}) \geq c_i(K_{it}^1) + \sum_{j \in \beta_{it}} c_{ij}^t, \quad i \in \omega_t.$$

Теорема 2. Для всякого допустимого решения ω_t задачи P_0^t справедлива оценка $\tilde{f}(\omega_t) \geq \tilde{f}(\omega_t)$.

Доказательство приведено в приложении.

Введем оценку

$$\varphi(\tilde{\alpha}_i) = \sum_{i \in \tilde{\alpha}_i} [r_i + c_i(\beta_{it})] \geq f(\tilde{\alpha}_i) \quad (9)$$

и докажем следующие положения.

Следствие 1. В каждой вершине $N^{(i)}$ справедливы оценки $\tilde{f}(\tilde{\alpha}_i) \leq \tilde{f}(\alpha_i) \leq f(\alpha_i) \leq f(\tilde{\alpha}_i) \leq \varphi(\tilde{\alpha}_i)$, т. е. величину $\tilde{f}(\tilde{\alpha}_i)$ можно использовать для оценки нижней границы решения задачи P_0^i .

Доказательство следует из теоремы 2, определения задач P_0^i , P_1^i и оценки (9).

Следствие 2. Если α — решение задачи (1) — (3), то в каждой вершине N^i справедлива оценка $f(\alpha) \leq \tilde{f}(\alpha_i) \leq \varphi(\tilde{\alpha}_i)$, т. е. величину $\varphi(\tilde{\alpha}_i)$ можно использовать для оценки верхней границы решения (рекорда).

Доказательство вытекает из определения задачи P_0^i и следствия 1.

Следствие 3. Если для некоторой вершины N^i выполняется условие $\tilde{f}(\tilde{\alpha}_i) = \varphi(\tilde{\alpha}_i)$, то решения α_t задачи P_0^i во всех вершинах, исходящих из N^i , не лучше, чем решение $\tilde{\alpha}_i$, т. е. продолжение ветвления из N^i нецелесообразно.

Доказательство этого следствия приведено в приложении.

Исходя из сформулированных теорем и следствий дальнейшая работа алгоритма организуется следующим образом.

Величина $\varphi^v = \min\{\varphi(\tilde{\alpha}_i) \mid i=0, \dots, 2v\}$ определяет достигнутую на v -м шаге верхнюю границу решения (рекорд). В процессе построения дерева возможных вариантов на каждом шаге корректируется список перспективных вершин

$$G^v = \{i \mid \tilde{f}(\tilde{\alpha}_i) < \varphi^v, i \in G^{v-1}\}.$$

Если для вновь созданной вершины N^i выполняется условие $\tilde{f}(\tilde{\alpha}_i) = \varphi(\tilde{\alpha}_i)$, то продолжение данной о ветви не дает лучших результатов и $\varphi(\tilde{\alpha}_i)$ — рекорд для всех возможных ветвей, исходящих из N^i . Если $\tilde{f}(\tilde{\alpha}_i) < \varphi^v$, то N^i добавляется в откорректированный список перспективных вершин G^v . Если на некотором шаге $G^v = \emptyset$, то алгоритм заканчивает работу и решение, соответствующее рекорду φ^v , — оптимальное для исходной задачи. В противном случае из G^v выбирается следующая вершина и алгоритм продолжает работу.

Учет особенностей схемы ветвления при решении оценочных задач и переход от точного решения задачи P_1^i к приближенному решению двойственной ей [7] позволяют повысить вычислительную эффективность алгоритма. Предложенный способ построения алгоритма решения задач вида (1) — (3) можно использовать при решении широкого круга задач унификации, размещения и задач о покрытии самого общего вида.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Определим $H_{it} = K_{it} \cap \beta_{it}$. В силу (5) для $i \in I$, $j \in K_{it}$ имеем

$$\begin{aligned} c_{ij}^t &= \min_{K_{it}^1 \subseteq \gamma \subseteq J_{it}} [c_i(\gamma) - c_i(\gamma \setminus \{j\})] \leq c_i(\beta_{it}) - c_i(\beta_{it} \setminus \{j\}) = \\ &= c_i(K_{it}^1 \cup H_{it}) - c_i(K_{it}^1 \cup H_{it} \setminus \{j\}), \end{aligned}$$

откуда $c_i(\beta_{it}) \geq c_i(K_{it}^1 \cup H_{it} \setminus \{j\}) + c_{ij}^t$, и, продолжая по аналогии,

$$\begin{aligned} c_i(\beta_{it}) &\geq c_i(K_{it}^1 \cup H_{it} \setminus \{j, q\}) + c_{ij}^t + c_{iq}^t \geq \dots \geq \\ &\geq c_i(K_{it}^1) + \sum_{j \in H_{it}} c_{ij}^t = c_i(K_{it}^1) + \sum_{j \in \beta_{it}} c_{ij}^t. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Таблица 1

$i = 1$		$i = 2$		$i = 3$	
$\gamma \subseteq J$	$c_1(\gamma)$	$\gamma \subseteq J$	$c_2(\gamma)$	$\gamma \subseteq J$	$c_3(\gamma)$
$\emptyset$	0	$\emptyset$	0	$\emptyset$	0
$\{1\}$	22	$\{2\}$	22	$\{1\}$	59
$\{2\}$	12	$\{3\}$	34	$\{3\}$	51
$\{4\}$	8	$\{4\}$	20	$\{4\}$	29
$\{1, 2\}$	31	$\{2, 3\}$	49	$\{1, 3\}$	97
$\{1, 4\}$	29	$\{2, 4\}$	35	$\{1, 4\}$	87
$\{2, 4\}$	16	$\{3, 4\}$	48	$\{3, 4\}$	70
$\{1, 2, 4\}$	33	$\{2, 3, 4\}$	62	$\{1, 3, 4\}$	125
$r_1 = 45$		$r_2 = 40$		$r_3 = 10$	

Таблица 2

v	t	l_{pq}	$\tilde{\beta}_{1t}$	$\tilde{\beta}_{2t}$	$\tilde{\beta}_{3t}$	$\tilde{\gamma}(\tilde{\alpha}_t)$	$\varphi(\tilde{\alpha}_t)$	φ^v	G^v
0	0	—	$\{1, 2, 4\}$	$\emptyset$	$\{3\}$	116	139	139	$\{0\}$
1	1	$l_{33} = 0$	$\{1, 2, 4\}$	$\{3\}$	$\emptyset$	135	152		
	2	$l_{33} = 1$	$\{1, 2, 4\}$	$\emptyset$	$\{3\}$	129	139	139	$\{1, 2\}$
2	3	$l_{11} = 0$	$\emptyset$	$\{2, 4\}$	$\{1, 3\}$	159	167		
	4	$l_{11} = 1$	$\{1, 2, 4\}$	$\emptyset$	$\{3\}$	134	139	139	$\{1, 4\}$
3	5	$l_{12} = 0$	$\{1, 4\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	159	182		
	6	$l_{12} = 1$	$\{1, 2, 4\}$	$\emptyset$	$\{3\}$	139	139	139	$\{1\}$
4	7	$l_{23} = 0$	—	—	—				
	8	$l_{23} = 1$	$\{1, 2, 4\}$	$\{3\}$	$\emptyset$	142	152	139	$\emptyset$

Доказательство теоремы 2. Оно следует из утверждений

$$\begin{aligned}
 f(\omega_t) &= \sum_{i \in \omega_t} \min_{\beta_{it} \subseteq J_{it}} c_i(\beta_{it}) + \sum_{i \in \omega_t} r_i \geq \sum_{i \in \omega_t} \min_{\beta_{it} \subseteq J_{it}} \left[c_i(K_{it}^1) + \sum_{j \in \beta_{it}} c_{ij}^t \right] + \\
 &+ \sum_{i \in \omega_t} r_i = \sum_{i \in \omega_t} [r_i + c_i(K_{it}^1)] + \sum_{i \in \omega_t} \min_{\beta_{it} \subseteq J_{it}} \sum_{j \in \beta_{it}} c_{ij}^t = \\
 &= \sum_{i \in \omega_t} [r_i + c_i(K_{it}^1)] + \sum_{j \in J} \min_{i \in \omega_t} c_{ij}^t = \tilde{f}(\omega_t).
 \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Доказательство следствия 3. Если $\tilde{f}(\tilde{\alpha}_t) = \varphi(\tilde{\alpha}_t)$, то в силу следствия 1 имеем $f(\alpha_t) = \tilde{f}(\tilde{\alpha}_t)$, т. е. $\tilde{\alpha}_t$ — оптимальное решение задачи P_0^t . Из определения задачи P_0^t для всех $J_{\tau}: K'_{it} \subseteq J_{\tau} \subseteq J_{it}$, $i \in I$ вытекает неравенство $f(\alpha_t) \leq f(\alpha_{\tau})$, и, таким образом, $\tilde{f}(\tilde{\alpha}_t) \leq f(\alpha_{\tau})$ и задачи P_0^{τ} не имеют лучшего решения, чем $\tilde{\alpha}_t$.

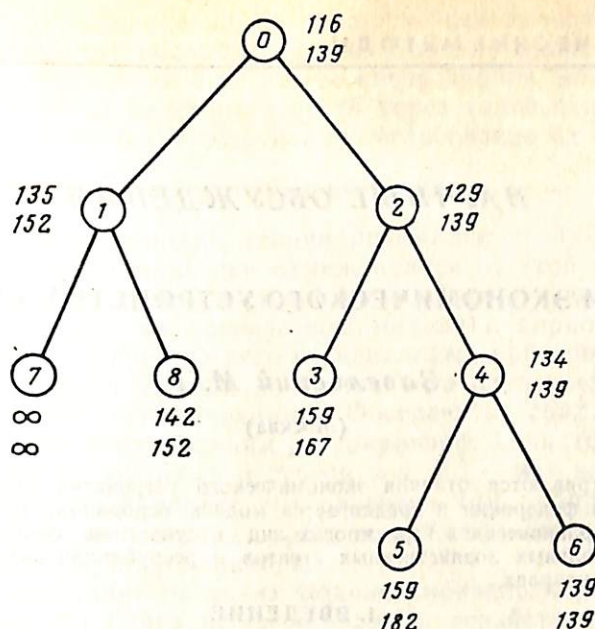
Численный пример. Рассмотрим задачу (1)–(3) с исходными данными, приведенными в табл. 1.

В соответствии с (5)–(7) в вершине N^0 имеем задачу стандартизации P_1^0 с

$$\tilde{f}(\omega) = \sum_{i \in \omega} r_i + \sum_{j \in J} \min_{i \in \omega} c_{ij}^0, \text{ где}$$

$$\|c_{ij}^0\| = \begin{vmatrix} 17 & 4 & - & 2 \\ - & 14 & 27 & 13 \\ 46 & - & 38 & 19 \end{vmatrix}.$$

Ее решение: $\tilde{\alpha}_0 = \{1, 3\}$, $\tilde{\beta}_{10} = \{1, 2, 4\}$, $\tilde{\beta}_{20} = \emptyset$, $\tilde{\beta}_{30} = \{3\}$, $\tilde{f}(\tilde{\alpha}_0) = 116$, $\varphi(\tilde{\alpha}_0) = 139$.



Дерево возможных вариантов. Для каждой вершины (i) показаны величины оценок $\tilde{f}(\alpha_i)$ — верхнее число и $f(\alpha_i)$ — нижнее

Дальнейший ход решения задачи приведен в табл. 2, дерево возможных вариантов показано на рисунке. В результате решения на шаге 4 решения ($v=4$) имеем $G^4=\emptyset$, $\alpha=\{1, 3\}$, $\beta_1=\{1, 2, 4\}$, $\beta_2=\emptyset$, $\beta_3=\{3\}$, и $f(\alpha)=139$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Береснев В. Л., Гимади Э. Х., Дементьев В. Т. Экстремальные задачи стандартизации. Новосибирск: Наука, 1978.
2. Алексеев О. Г. Комплексное применение методов дискретной оптимизации. М.: Наука, 1987.
3. Алексеев О. Г. Многомерная задача стандартизации//Изв. АН СССР. Сер. Техн. кибернетика. 1979. № 1.
4. Михалевич В. С., Трубин В. А., Шор Н. З. Оптимизационные задачи производственно-транспортного планирования. М.: Наука, 1986.
5. Алексеев О. Г. Алгоритм решения задачи о покрытии//Изв. АН СССР. Сер. Техн. кибернетика. 1980. № 5.
6. Erenguc S. S., Benson H. P. The Interactive Fixed Charge Linear Programming Problem//Nav. Res. Log. Quart. 1986. V. 33. № 2.
7. Алексеев О. Г., Кежаев В. А., Субботин А. И. Об одной специальной задаче целочисленного программирования//Изв. АН СССР. Сер. Техн. кибернетика. 1986. № 4.

Поступила в редакцию
25 V 1987