

3. Лемешев М. Я., Сухотин Ю. В., Демидов А. Ф. Об экономической эффективности космического земледелия // Экономика и мат. методы. 1981. Т. XVII. Вып. 5.
4. Методические указания по комплексной оценке эффективности мероприятий, направленных на ускорение научно-технического прогресса // Бюл. СМ СССР. 1988. № 7.
5. Львов Д. С., Голуб А. А. К дискуссии об измерении экономических процессов // Экономика и мат. методы. 1989. Т. XXV. Вып. 1.

Поступила в редакцию  
12 VII 1989

## УЛУЧШЕНИЕ СХОДИМОСТИ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ АЛГОРИТМОВ, ОСНОВАННЫХ НА АППРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИИ ДОСТИЖИМОСТИ

Казаков В. А., Тартаковский Б. А., Цирлин А. М.

(Москва)

Ниже изложены схема алгоритмов решения задачи математического программирования, основанная на аппроксимации функции достижимости, и приемы, позволяющие повысить точность решения и обеспечить сходимость алгоритмов.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Общая схема вычислительных алгоритмов решения задачи математического программирования

$$f_0(x) \rightarrow \max / f_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad x \in V, \quad (1)$$

базирующихся на аппроксимации функции достижимости (возмущения), такова [1—4].

1. Задаче (1) ставится в соответствие вспомогательная

$$L(x; \lambda) = F_0(f_0, \lambda) + \Phi(f, \lambda) \rightarrow \max_{x \in V}, \quad (2)$$

в которой  $F_0$  монотонно растет с ростом  $f_0$ ,  $\Phi(0, \lambda) \equiv 0$ , а  $\lambda$  — вектор параметров, выбираемый так, что  $f_0(x^0) = L(x^0, \lambda^0)$ .

2. Для исходной (1) и вспомогательной (2) задач вводят функции достижимости

$$f_0^0(c) = \max f_0(x) / f_i(x) = c_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad x \in V, \quad (3)$$

$$L^0(c, \lambda) = \max L(x, \lambda) / f_i(x) = c_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad x \in V, \quad (4)$$

которые связаны друг с другом выражением

$$L^0(c, \lambda) = F_0(f_0^0(c), \lambda) + \Phi(c, \lambda). \quad (5)$$

3. Монотонное преобразование  $F_0$  и исчезающее слагаемое  $\Phi$  выбирают так, чтобы при некотором ограниченном значении  $\lambda^*$  функция  $L^0(c, \lambda^*)$  достигала максимума в точке  $c=0$ , т. е.

$$\arg \max_c L^0(c, \lambda^*) = 0, \quad (6)$$

а матрица Гессе  $\Gamma(c, \lambda^*)$  функции  $L^0(c, \lambda^*)$  с элементами  $\Gamma_{ij} = \partial^2 L^0(c, \lambda^*) / \partial c_i \partial c_j$  была отрицательно-определенной.

4. Аппроксимируют функцию  $f_0^0(c)$  приближенными выражениями типа

$$f_0^0(c) = a + \sum_{i=1}^m b_i c_i, \quad (7)$$

$$f_0^0(c) = a + \sum_{i=1}^m b_i c_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m d_i c_i^2 \quad (7')$$

и находят коэффициенты аппроксимации  $a, b, d$ , используя результаты решения задачи (2) при некотором  $\lambda$ .

Действительно, если  $x^*(\lambda^v)$  — решение задачи (2), то

$$f(x^*) = c(\lambda^v) = c^v, \quad f_0(x^*) = f_0^0(c^v) = c_0^v. \quad (8)$$

В точке  $c^v$  функция  $L^0(c, \lambda)$  достигает максимума по  $c$ , т. е.

$$\nabla_c L^0(c^v, \lambda^v) = 0, \quad (9)$$

а матрица  $\Gamma(c^v, \lambda^v)$  — отрицательно-определенная. Используя условия (8) и (9) и подставляя в них (7) или (7'), уточняют коэффициенты  $a, b, d$ .

5. По найденной аппроксимации  $f_0^0(c)$  находят такое значение  $\lambda^{v+1}$ , для которого выполнены условие (6) и условие отрицательной определенности  $\Gamma(c, \lambda^{v+1})$ .

Вновь решают задачу (2) для  $\lambda = \lambda^{v+1}$  и уточняют коэффициенты аппроксимаций (7) по результатам этого решения. Критерием остановки алгоритма служит достижение заданной точности по близости к нулю вектора невязок  $c$ .

Такая процедура позволяет обоснованно выбрать функцию  $L$  в задаче (2) и получить формулы для пересчета вектора  $\lambda$ .

## 2. КОНКРЕТИЗАЦИЯ АЛГОРИТМОВ, ОСНОВАННЫХ НА АППРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИИ ДОСТИЖИМОСТИ

Конкретизируем изложенную схему применительно к двум формам задания функции  $L$ .

**А. Модифицированная функция Лагранжа.** В [1, 2 и др.] функцию  $L$  предложено составлять в форме

$$L(x, \lambda) = f_0(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \tilde{\lambda}_i f_i^2(x). \quad (5')$$

В соответствии с (5) функция достижимости

$$L^0(c, \lambda) = f_0^0(c) + \sum_{i=1}^m \lambda_i c_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \tilde{\lambda}_i c_i^2. \quad (5'')$$

Условие максимума (9) для дифференцируемой функции достижимости  $f_0^0$  примет вид

$$\frac{\partial f_0^0}{\partial c_i} + \lambda_i^v = \tilde{\lambda}_i^v c_i^v, \quad i = 1, \dots, m. \quad (9')$$

Элементы матрицы Гессе  $\Gamma_{ij}$  функции  $L^0$  связаны с элементами  $\gamma_{ij}$  матрицы Гессе функции  $f_0^0$  как

$$\Gamma_{ij}(c) = \begin{cases} \gamma_{ij}(c), & i \neq j, \\ \gamma_{ij}(c) - \tilde{\lambda}_i, & i = j. \end{cases} \quad (10)$$

Если  $\gamma_{ij}(c)$  ограничены, то всегда найдутся такие конечные значения коэффициентов квадратичного штрафа  $\tilde{\lambda}_i$ , для которых матрица  $\Gamma$  отрицательно определенная.

Изложенная во введении схема при применении линейной аппроксимации (7) для функции  $f_0^0$  приводит к формулам пересчета для параметров  $\lambda$

$$\lambda_i^{v+1} = \lambda_i^v - \tilde{\lambda}_i^v c_i^v, \quad \lambda_i^0 = 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (11)$$

Вектор  $\tilde{\lambda}$  целесообразно выбирать так

$$\tilde{\lambda}_i^{v+1} = \tilde{\lambda}_i^v \max \left( 1, \frac{|c_i^v|}{\|\tilde{c}^v\|} \right) + M, \quad (12)$$

$$\tilde{\lambda}_i^0 > 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

где

$$\|\tilde{c}\| = \frac{1}{m} \sqrt{\sum_{i=1}^m c_i^2}, \quad M > 0. \quad (13)$$

Использование (12) приводит к росту тех составляющих  $\tilde{\lambda}_i^v$  вектора  $\tilde{\lambda}$ , для которых величина  $c_i$  невязки больше средней по  $i$ .

**Б. Монотонное преобразование целевой функции в комбинации с квадратичным штрафом.** Монотонное преобразование  $F_0$  целевой функции  $f_0$  позволяет уменьшить размерность вектора неопределенных параметров  $\lambda$  вспомогательной задачи и более полно использовать информацию, полученную на очередном цикле ее решения.

Условия стационарности (9) должны быть выполнены не только в точке  $c^v$ , которой соответствует решение задачи (2) на  $v$ -м шаге, но и в точке  $c=0$ . При этом для модифицированной функции Лагранжа

$$\left( \frac{\partial f_0^0}{\partial c_i} \right)_{c=0} = -\lambda_i^0. \quad (14)$$

Если же в функции  $L$  слагаемое  $\lambda_i f_i$  отсутствует и градиент  $f_0^0$  в точке  $c=0$  отличен от нуля, то никакие ограниченные коэффициенты штрафа  $\tilde{\lambda}_i$  не приведут к искомому решению.

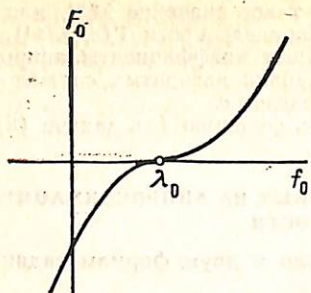


Рис. 1

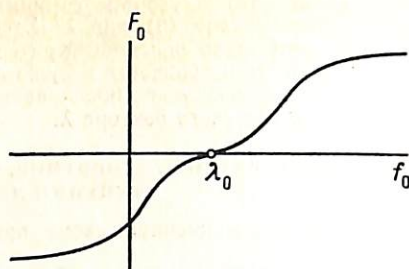


Рис. 2

Рис. 1. Характер монотонных преобразований целевой функции

Рис. 2. Модифицированное монотонное преобразование целевой функции

При применении монотонного преобразования целевой функции в сочетании с квадратичным штрафом

$$L(x, \lambda) = F_0(f_0, \lambda_0) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \tilde{\lambda}_i f_i^2(x) \quad (15)$$

соответствующая функция —

$$L^0(c, \lambda) = F_0(f_0^0, \lambda_0) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \tilde{\lambda}_i c_i^2.$$

Градиент по  $c$  функции  $L^0$

$$\nabla_c L^0(0, \lambda) = \left( \frac{\partial F_0}{\partial f_0} \right)_{f_0^0(0)} \nabla f_0^0$$

будет равен нулю, если выбрать  $F_0$  и  $\lambda_0$  так, чтобы производная  $(\partial F/\partial f_0)_{f_0^0(0)}$  оказалась равной нулю.

Этому условию удовлетворяют, например, преобразования

$$F_0(f_0, \lambda) = \begin{cases} (f_0 - \lambda_0)^{2n+1}, \\ (f_0 - \lambda_0)^{2n} \operatorname{sign}(f_0 - \lambda_0), \end{cases} \quad n = 1, \dots, \quad (16)$$

$$(16')$$

где  $\lambda_0$  — неопределенный параметр, который на искомом решении должен быть равен значению задачи (1), т. е.  $f_0^0(0)$ .

Практически использовались преобразования (16) с  $n=1$ . Они имеют вид, показанный на рис. 1.

Элементы матрицы Гессе функции  $L^0$  при использовании монотонного преобразования (16)

$$\Gamma_{ij}(c, \lambda) = \begin{cases} \frac{\partial^2 F_0}{\partial f_0^2} \frac{\partial f_0^0}{\partial c_j} \frac{\partial f_0^0}{\partial c_i} + \frac{\partial F_0}{\partial f_0} \gamma_{ij}(c), & i \neq j, \\ \frac{\partial^2 F_0}{\partial f_0^2} \left( \frac{\partial f_0^0}{\partial c_i} \right)^2 + \frac{\partial F_0}{\partial f_0} \gamma_{ii}(c) - \tilde{\lambda}_i, & i = j. \end{cases} \quad (17)$$

Первое преобразование (16) будем называть кубическим, а второе — квадратичным.

При линейной аппроксимации (7) для функции  $f_0^0(c)$  изложенная во введении схема приводит к формулам пересчета параметров  $\lambda_0$  и  $\tilde{\lambda}$  для преобразований а) кубического

$$\begin{aligned} \lambda_0^{v+1} &= c_0^v - \frac{1}{3} \sum_{i=1}^m \tilde{\lambda}_i^v (c_i^v)^2 / (c_0^v - \lambda_0^v)^2, \\ \tilde{\lambda}_i^{v+1} &= \frac{2 |\tilde{\lambda}_i^v c_i^v|}{3 (c_0^v - \lambda_0^v)} \left[ |\tilde{\lambda}_i^v c_i^v| (c_0^v - \lambda_0^v) + \right. \\ &\quad \left. + |c_0^v - \lambda_0^v| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m |\tilde{\lambda}_j^v c_j^v| \right] + M, \quad i = 1, \dots, m; \end{aligned} \quad (18)$$

б) квадратичного

$$\begin{aligned}\lambda_0^{v+1} &= c_0^v - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \tilde{\lambda}_i^v (c_i^v)^2 / |c_0^v - \lambda_0^v|, \\ \lambda_i^{v+1} &= \frac{|\tilde{\lambda}_i^v c_i^v|}{(c_0^v - \lambda_0^v)^2} \left[ |\tilde{\lambda}_i^v c_i^v| (c_0^v - \lambda_0^v) + \right. \\ &\left. + |c_0^v - \lambda_0^v| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m |\tilde{\lambda}_j^v c_j^v| \right] + M, \quad i = 1, \dots, m, \quad \tilde{\lambda}_i^0 > 0, \quad M > 0.\end{aligned}\quad (18')$$

При использовании монотонного преобразования в сочетании с квадратичным штрафом размерность вектора  $\lambda$  по сравнению с модифицированной функцией Лагранжа сокращается тем сильнее, чем больше число связей  $m$ , кроме того, используют  $f_0^0(c^v) = c_0^v$  — величину функции  $f_0$  на решении  $x^{*v}$  расширенной задачи (2) в  $v$ -м цикле. За счет этого алгоритмы (18) и (18') сходятся квадратично. Доказательство дано в Приложении. Ранее монотонное квадратичное преобразование для выпуклых задач с ограничениями в форме неравенств без пересчета  $\tilde{\lambda}$  использовалось в [4].

Алгоритм (11), (12) подробно исследован, и для него доказана линейная сходимость [3]. Алгоритм с модифицированной функцией Лагранжа и полной квадратичной аппроксимацией функции достижимости

$$f_0^0(c) = a + \sum_{i=1}^m b_i c_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m g_{ij} c_i c_j \quad (19)$$

эквивалентен методу Ньютона и сходится квадратично при определенных предположениях [3]. В [3] для получения коэффициентов разложения (19) применяется точная формула

$$\frac{\partial^2 f_0^0(c)}{\partial c_i \partial c_j} = -\tilde{\lambda}_i \delta_{ij} + \left\{ \sum_{\mu, \alpha} \frac{\partial f_i}{\partial x_\mu} \left[ \frac{\partial^2 L}{\partial x_\mu \partial x_\alpha} \right]^{-1} \frac{\partial f_j}{\partial x_\alpha} \right\}^{-1}. \quad (20)$$

Ясно, что обратные матрицы в правой части (20) могут и не существовать, а сама процедура расчета (20) очень трудоемка. Если же использовать неполную квадратичную аппроксимацию (7), то возможны две ситуации: 1) если погрешность аппроксимации (7') порядка  $\|c\|^3$ , то алгоритм будет сходиться квадратично; 2) если порядка  $\|c\|^2$  — то линейно, хотя скорость сходимости несколько улучшится [5].

### 3. ОБЕСПЕЧЕНИЕ СХОДИМОСТИ АЛГОРИТМОВ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМ МОНОТОННЫМ ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ

Одним из главных условий для успешного использования приведенных алгоритмов является существование максимума  $L(x, \lambda)$  по  $x$  на множестве  $V$  при конечных значениях вектора  $\lambda$ . Если множество  $V$  не ограничено, то для исчезающего слагаемого в форме  $-\tilde{\lambda} f^2(x)$  существование максимума модифицированной функции Лагранжа или функции с монотонным преобразованием  $f_0$  в форме (16) нельзя гарантировать.

Действительно, если, например,  $f_0$  растет с увеличением  $x_1$ , то при неограниченном множителе возрастание вектора  $f$  определяется конечной степенью  $x_1$ , то при неограниченном множестве допустимых значений  $x_1$  максимума  $L$  не существует. Использование преобразований (16) делает такую возможность еще более вероятной.

Модификация монотонного преобразования  $f_0$  таким образом, чтобы предел  $F_0(f_0, \lambda_0)$  при  $f_0 \rightarrow \infty$  стремился к конечному значению (рис. 2), позволяет избежать подобной опасности. В этом случае решение задачи о максимуме  $L$  всегда существует при конечном  $\tilde{\lambda}$ , если только вектор  $f$  зависит от составляющей  $x_1$ .

Для практической реализации ограниченного монотонного преобразования функции  $f_0$  можно использовать преобразования (16), но не по отношению к  $f_0 - \lambda_0$ , а к функции  $\varphi(f_0) - \lambda_0$ , имеющей вид

$$\varphi(f_0) = \frac{f_0}{1 + |f_0|}. \quad (20')$$

Нетрудно показать, что для широкого класса функций  $f_0(x)$ , растущих с изменением  $x$  не быстрее, чем полином конечной степени, преобразования

$$F(f_0, \lambda_0) = [\varphi(f_0) - \lambda_0]^3 \quad (21)$$

и

$$F_0(f_0, \lambda_0) = [\varphi(f_0) - \lambda_0]^2 \operatorname{sign} [\varphi(f_0) - \lambda_0] \quad (21')$$

ограничены.

Таблица 1

| Номер алгоритма | Вид функции  | Способ аппроксимации функции достижимости | Преобразование (20') |
|-----------------|--------------|-------------------------------------------|----------------------|
| 1               | (5')         | Линейная для $f_0^0(c)$                   | Нет                  |
| 2               | (5')         | Квадратичная для $f_0^0(c)$               | »                    |
| 3               | (16'), $n=1$ | Линейная для $f_0^0(c)$                   | Есть                 |
| 4               | (16'), $n=1$ | Квадратичная для $f_0^0(c)$               | »                    |
| 5               | (16'), $n=1$ | Линейная для $F_0^0(c)$                   | Нет                  |
| 6               | (16'), $n=1$ | Квадратичная для $F_0^0(c)$               | Есть                 |

Таблица 2

| $N$ | $IV$ | $NF$ | $NG$ | $NF+NG$ | $FM$   | $ss$                |
|-----|------|------|------|---------|--------|---------------------|
| 0   | 9    | 619  | 1527 | 2146    | 0,0557 | $0,3 \cdot 10^{-7}$ |
| 1   | 7    | 688  | 1551 | 2239    | 0,0557 | $0,3 \cdot 10^{-7}$ |
| 2   | 8    | 626  | 1486 | 2112    | 0,0557 | $0,2 \cdot 10^{-7}$ |
| 3   | 4    | 388  | 943  | 1331    | 0,0557 | $0,2 \cdot 10^{-7}$ |
| 4   | 3    | 358  | 862  | 1220    | 0,0557 | $0,2 \cdot 10^{-7}$ |
| 5   | 3    | 456  | 1083 | 1539    | 0,0557 | $0,6 \cdot 10^{-8}$ |
| 6   | 3    | 395  | 943  | 1338    | 0,0557 | $0,7 \cdot 10^{-8}$ |

Формулы (18) и (18') для пересчета вектора параметров могут быть использованы и для преобразований (21) с той разницей, что в качестве  $c_0^v$  нужно подставлять в эти формулы величину

$$\varphi_0^0(x^v) = \frac{f_0(x^v)}{1 + |f_0(x^v)|},$$

т. е. значение функции  $\varphi_0^0$  на решении задачи о максимуме  $L$  (15) на  $v$ -м шаге. Таким образом, мы используем линейную аппроксимацию не для  $f_0^0(c)$ , а для  $\varphi_0^0(c)$ .

Преобразования (21) и (21') (рис. 2) неравноценны с точки зрения точности определения искомого решения. Эта точность зависит от скорости сходимости вектора не-

вязок  $c$  к нулю. В окрестности  $c=0$  функция достижимости  $f_0^0(c) \approx f_0^0(0) + \sum_{i=1}^m b_i c_i$ .

Формулы (18)–(18') пересчета вектора  $\lambda$  при использовании монотонного преобразования  $f_0$  зависят от вида такого преобразования. При малой точности определения искомого решения погрешности округления не сказываются на точности счета и алгоритмы с кубическим и квадратичным преобразованиями ведут себя одинаково. Однако при повышении требований к точности решения, когда остановке алгоритма соответствует модуль вектора невязок, имеющий величину порядка  $|c| \sim 10^{-6}$ , погрешности округления сказываются сильно и два этих способа преобразования оказываются неравноценными. В (18) при стремлении вектора невязок  $c$  к нулю, а вместе с ним и раз-

ности  $c_0^v - \lambda_0^v = \varphi_0^0(c^v) - \varphi_0^0(0) = \sum_{i=1}^m b_i c_i^v$ , числитель стремится к нулю как  $|c|^3$ , а

знаменатель как  $|c|^4$ , поэтому погрешности вычисления  $c$  приводят к большим ошибкам в  $\lambda$ . При квадратичном преобразовании, наоборот, числитель в формулах для  $\lambda$  пропорционален  $|c|^3$ , а знаменатель —  $|c|^2$ . Чувствительность к погрешности расчета невязок сказывается здесь гораздо меньше. Поэтому при большой точности решения алгоритм, основанный на квадратичном преобразовании, предпочтительнее.

**Замечание.** Возможно также построение алгоритмов, основанных на аппроксимации не  $f_0^0(c)$ , а  $F_0^0(c)$ . Так, при использовании преобразования (16'') с  $n=1$  и линейной аппроксимации  $F_0^0(c)$  пересчет производится по формулам

$$z = f_0^v - \lambda_0^v - \sum_{i=1}^m \tilde{\lambda}_i^v (c_i^v)^2, \quad \lambda_0^{v+1} = \begin{cases} \lambda_0^v + (z)^{1/2}, & z \geq 0, \\ \lambda_0^v - (|z|)^{1/2}, & z < 0, \end{cases} \quad (22)$$

$$\tilde{\lambda}_i^{v+1} = \max \left( \tilde{\lambda}_i^v; M_1 \tilde{\lambda}_i^v \sqrt{\frac{(c_i^v)^2}{\sum_{j=1}^m (c_j^v)^2}} \right) + M_2, \quad M_1, M_2 > 0.$$

#### 4. ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ И ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Описанные алгоритмы реализованы в виде пакета подпрограмм на языке FORTRAN-IV (см. табл. 1). Пакет позволяет решать задачу (1) с ограничениями в форме равенств. Аналитическая запись производных от целевой функции и функций ограничений для ряда подпрограмм не обязательна. Для решения задачи безусловной максимизации (2) используются подпрограммы ПАОЭМ [6].

В табл. 2 приведены результаты решения тестовой задачи. Используются следующие обозначения:  $IV$  — число внешних итераций, т. е. число решений задачи (2);  $NF$  — число вычислений функции  $L$ ;  $NG$  — число вычислений градиента функции  $L$ ;  $ss$  —

норма нарушения ограничений,  $ss = \sqrt{\sum_{i=1}^m (f_i)^2}$ ;  $N$  — номер алгоритма;  $FM$  — найденное значение  $f_0(x^*)$ . Для сравнения приводится результат решения этой же задачи с помощью подпрограммы  $AC120D$  пакета ПАОЭМ [6] ( $N=0$  в табл. 2), в котором реализован алгоритм  $N=1$  в обозначениях табл. 1, но со скалярным штрафом и специальным правилом останова при решении задачи (2).

Тестовая задача

$$f_0(x) = - \sum_{i=1}^{24} a_i x_i \rightarrow \max_x$$

при ограничениях

$$f_i(x) = \frac{x_{i+12}}{b_{i+12} \sum_{j=13}^{24} \frac{x_j}{b_j}} - \frac{c_i x_i}{40 b_i \sum_{j=1}^{12} \frac{x_j}{b_j}} = 0, \quad i = 1, \dots, 12,$$

$$f_{13}(x) = \sum_{i=1}^{24} x_i - 1 = 0, \quad f_{14}(x) = \sum_{i=1}^{12} \frac{x_i}{d_i} + p \sum_{i=13}^{24} \frac{x_i}{b_{i-12}} - 1,671 = 0,$$

$$f_{15}(x) = \frac{x_1 + x_{13}}{\sum_{i=1}^{24} x_i} - 0,1 + x_{25} = 0,$$

$$f_{16}(x) = \frac{x_2 + x_{14}}{\sum_{i=1}^{24} x_i} - 0,3 + x_{26} = 0,$$

$$f_{17}(x) = \frac{x_3 + x_{15}}{\sum_{i=1}^{24} x_i} - 0,4 + x_{27} = 0,$$

$$f_{18}(x) = \frac{x_7 + x_{19}}{\sum_{i=1}^{24} x_i} - 0,3 + x_{28} = 0,$$

$$x_{19}(x) = \frac{x_8 + x_{20}}{\sum_{i=1}^{24} x_i} - 0,6 + x_{29} = 0, \quad x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, 30,$$

$$f_{20}(x) = \frac{x_9 + x_{21}}{\sum_{i=1}^{24} x_i} - 0,3 + x_{30} = 0, \quad p = 142,224705,$$

$a = (0,0693; 0,0577, 0,05; 0,2; 0,26; 0,55; 0,06; 0,1; 0,12; 0,18; 0,1; 0,09); c = (123,7; 31,7; 45,7; 14,7; 84,7; 27,7; 49,7; 7,1; 2,1; 17,7; 0,85; 0,64); b = (44,094; 58,12; 58,12; 137,4; 120,9; 170,9; 62,501; 84,94; 133,425; 82,507; 46,07; 60,097); d = (31,244; 36,12; 34,784; 92,7; 82,7; 91,6; 56,708; 82,7; 80,8; 64,517; 49,4; 49,1)$ . Начальная точка  $x_i = 0,04, i = 1, \dots, 30$ .

Расчеты показывают, что в большинстве случаев алгоритмы с неполной квадратичной аппроксимацией функции достижимости дают сравнительно малый выигрыш по сравнению с линейной аппроксимацией. От этих алгоритмов можно ожидать большего лишь в тех случаях, когда переменные выбраны таким образом, что диагональная аппроксимация функции достижимости оказывается эффективной. Но дополнительные вычисления, связанные с применением этих алгоритмов, незначительны, и разумно при-

менять их, когда жестких ограничений на оперативную память нет (так как они требуют хранения информации с  $v$ -го и  $v-1$ -го циклов). Расчеты показали также высокую эффективность алгоритмов с монотонным преобразованием (если за показатель трудоемкости алгоритма взять  $(NF+NG)$ , то выигрыш составляет от 30 до 45% по сравнению с алгоритмом 1). При их использовании приходится значительно повышать (по сравнению с алгоритмами без монотонного преобразования) точность решения внутренней задачи (2). Кроме того, в искомой точке  $x^*$  задача (2) для этих алгоритмов вырождена, что ухудшает ее обусловленность и замедляет поиск ее максимума в этой точке. По-видимому, имеет смысл использовать алгоритмы с монотонным преобразованием в тех случаях, когда арифметика вычислительной машины позволяет решать внутреннюю задачу (2) с достаточной точностью. Эта точность равна второй (для квадратичного) или третьей (для кубического преобразования) степени от требуемой точности решения задачи (2) для алгоритмов без монотонного преобразования.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### Сходимость алгоритмов с монотонным преобразованием

Рассмотрим алгоритм (18). Для простоты возьмем скалярное  $\tilde{\lambda}$ . При этом задачу (2) на  $v$ -м шаге можно записать в виде системы уравнений относительно  $(x, \lambda, \lambda_0)$

$$\nabla f_0 + \lambda \nabla f = 0, \quad (23)$$

$$3(f_0 - \lambda_0)^2 \lambda - \tilde{\lambda} f = 0,$$

где  $\lambda$  — множители Лагранжа;  $L_0 = f_0 + \lambda f$  — функция Лагранжа;  $\tilde{\lambda}_0 = \lambda_0^{v+1} = L_0$ . По соответствующим индексам предполагается суммирование (например,  $\lambda \nabla f = \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla f_i$ ).

Если у (1) есть точка регулярного локального максимума  $x^*$ ,  $\lambda^*$  — множители Лагранжа задачи (1) в этой точке, а  $\lambda_0^* = f_0(x^*)$ , то система (23) имеет решение  $(x^*, \lambda^*, \lambda_0^*)$ . Легко видеть, что в этой точке матрица

$$B = A^{-1} = \begin{vmatrix} \nabla_{xx} L_0 & \nabla f \\ 6(f_0 - \lambda_0) \lambda \nabla f - \tilde{\lambda} \nabla f & 3(f_0 - \lambda_0)^2 \end{vmatrix} \quad (24)$$

не вырождена. Следовательно, по теореме о неявной функции найдется такая окрестность  $\lambda_0^*$ ,  $|\lambda_0 - \lambda_0^*| \leq \varepsilon$ , что  $x(\lambda_0)$ ,  $\lambda(\lambda_0)$  существуют, однозначно определены и  $x(\lambda_0^*) = x^*$ , а  $\lambda(\lambda_0^*) = \lambda^*$ . Кроме того, можно выбрать такое  $\varepsilon$ , что норма  $\|A(\lambda_0)\| \leq \|A(\lambda_0^*)\| + \varepsilon_1$  для всех  $\lambda_0$  из этой окрестности, здесь  $\varepsilon_1$  — любое положительное число. Дифференцируя (23) по  $\lambda_0$ , получим

$$\begin{vmatrix} \frac{dx}{d\lambda_0} \\ \frac{d\lambda}{d\lambda_0} \end{vmatrix} = A \begin{vmatrix} 0 \\ 6\lambda |f_0 - \lambda_0| \end{vmatrix}. \quad (25)$$

Следовательно,

$$\tilde{\lambda}_0 - \lambda_0^* = \tilde{\lambda}_0(\lambda_0) - \tilde{\lambda}_0(\lambda_0^*) = \int_{\lambda_0^*}^{\lambda_0} \begin{vmatrix} \nabla_x L_0(\hat{\lambda}) \\ f(\hat{\lambda}) \end{vmatrix} A(\hat{\lambda}) \begin{vmatrix} 0 \\ 6\lambda(\hat{\lambda}) |f_0(\hat{\lambda}) - \hat{\lambda}| \end{vmatrix} d\hat{\lambda} \quad (26)$$

$$\text{и так как } |f_0(\hat{\lambda}) - \hat{\lambda}| \leq |\lambda_0 - \lambda_0^*|, \text{ то } |\tilde{\lambda}_0 - \lambda_0^*| \leq \varepsilon_2 |\lambda_0 - \lambda_0^*|^2. \quad (27)$$

Для  $x$  из (25) имеем

$$\|x - x^*\| \leq \varepsilon_3 |\lambda_0 - \lambda_0^*|^2, \quad (28)$$

т. е. доказана квадратичная сходимость для (18) по  $\lambda_0$  и  $x$ . Нетрудно получить аналогичные результаты и для (18'), отличающиеся от приведенных значениями  $\varepsilon_2$  и  $\varepsilon_3$ .

## ЛИТЕРАТУРА

- Куликовский А. В., Сурис Т. А., Цирлин А. М. Методы решения задач условной оптимизации, основанные на последовательной аппроксимации функции достижимости//Авт. 1982. № 4.
- Цирлин А. М. Оптимальное управление технологическими процессами. М.: Энергоатомиздат, 1986.
- Бертсекас Д. Условная оптимизация и методы множителей Лагранжа. М.: Радио и связь, 1987.
- Morrison D. D. Optimization by Least Squares//SIAM J. Numer. Anal. 1968. V. 5. № 1.
- Поляк Б. Т. Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983.
- Скоков В. А., Нестеров Ю. Е., Пурмаль Е. И. Пакет анализа оптимизационных экономических моделей ППП «ПАОЭМ ЕС ЭВМ». Нелинейное программирование. М.: ЦЭМИ АН СССР, 1981.

Поступила в редакцию  
2 VII 1987