МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

ИГРОВЫЕ МОДЕЛИ ДОЛГОСРОЧНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Хуторецкий А. Б.

(Новосибирск)

Для долгосрочного планирования экономической системы при неоднозначно определенной потребности в ее продукции предложены модели минимизации максимально возможного ущерба от несовпадения мощностей по выпуску продукции и потребностей в ней. Рассмотрены два способа оценки указанного ущерба: по относительным и абсолютным отклонениям. Выделены практически важные случаи простого решения соответствующих максимальных задач.

Рассмотрим систему, производящую некоторый фиксированный набор конечных продуктов. Пусть x — искомый вектор выпуска; z — искомый вектор внутренних параметров системы (выпуска полуфабрикатов, использования ресурсов, перевозок, динамики наращивания мощностей и т. д.). Ограничения на доступные системе ресурсы и способы их преобразования в продукты порождают допустимое множество M векторов (x, z) . Пусть a — вектор заданий по выпуску. Тогда задача планирования для системы формализуется следующим образом

$$\min \{c(x, z) : x \geq a, (x, z) \in M\}, \quad (1)$$

где $c(x, z)$ — целевая функция системы. Пусть (x^0, z^0) — решение задачи (1). Естественно предположить, что $c(x_1, z) \leq c(x_2, z)$ при $x_1 \leq x_2$. Тогда, как легко показать, $x^0 = a$. Будем говорить, что z^0 — вектор оптимальной настройки системы на объемы a .

Предположим теперь, что в момент планирования a однозначно не определен, но известно некоторое множество Y , такое, что вектор потребных объемов выпуска продукции системы заведомо принадлежит этому множеству и может оказаться равным любому из его элементов. Такая ситуация обычна при долгосрочном планировании.

Компоненты вектора z разобьем на две группы: $z = (z_1, z_2)$. В первую включим те переменные, оптимальные значения которых необходимо должны быть рассчитаны на этапе долгосрочного планирования (это прежде всего переменные, описывающие динамику использования капитальных вложений и наращивания мощностей системы). Во вторую группу войдут переменные, оптимизация которых может быть отложена до этапов среднесрочного и текущего планирования: перевозки, выпуск продуктов и т. д. Фиксация их значений (т. е. выбор способа функционирования системы) при неоднозначной определенности задания не имеет смысла.

Оптимальные значения компонент вектора z_1 , отражающих способ развития системы, зависят от тех объемов работ (выпуска конечных продуктов), к которым система должна быть готова. Возникает, следовательно, проблема выбора того вектора x выпуска продукции, на который мы будем настраивать систему. Этот вектор должен быть допустимым для системы, т. е. существует такой x , что $(x, z) \in M$. Пусть $X = \{x : (\exists z) ((x, z) \in M)\}$. Если система настроена на вектор x , а потреб-

ности в продукции реализовались в виде $y \in Y$ (и $y \neq x$), то возникает некоторый ущерб, связанный либо с невозможностью выполнить задание в нормативном режиме, либо с наличием излишних мощностей. Пусть $\Phi(x, y)$ — функция, описывающая величину этого ущерба. Вектор y для системы — неуправляемый, поэтому естественно выбрать такой x^* , для которого максимально возможный ущерб (указанного выше вида) минимален

$$\max_y \Phi(x^*, y) = \min_x \max_y \Phi(x, y), \quad x^* \in X, \quad (2)$$

поэтому $(x^*, z) \in M$ для некоторого z , отражающего допустимый вариант настройки системы на задания x^* . Оптимальный вектор настройки (в частности, оптимальные значения стратегических переменных z_1) можно теперь определить из (1), заменив в ней a на x^* .

Задача долгосрочного планирования развития системы решается, таким образом, в два этапа. На первом (задача (2)) развитие планируется с позиции некоторой надсистемы, которая порождает потребность в продукции (множество Y), финансирует ее производство и несет убытки при несовпадении выпуска продукции с потребностями. Полученный при этом вектор x^* определяет внешние требования к системе. На втором этапе (задача (1)) система указывает способ выполнения этих требований, минимизируя собственные затраты.

Заметим, что описанный двухэтапный процесс планирования развития системы не является, как может показаться, просто эвристическим сведением к последовательной оптимизации следующей задачи минимизации «суммарных затрат»

$$\min_{v \in X} \{ \varphi(v) + \max_{y \in Y} \Phi(v, y) \}, \quad (2')$$

где $\varphi(v) = \min \{ c(x, z) : (x, z) \in M, x \geq v \}$.

Последовательное решение задач (2), (1) отражает сущность долгосрочного планирования при неопределенном задании лучше, чем прямая минимизация (2'). Действительно, минимизация затрат корректна лишь при фиксированном результате. В нашем же случае желательный результат (объемы производства, к которым должна быть готова система) определяется как раз решением задачи (2), что и позволяет перейти к задаче (1) минимизации затрат. При этом разумный уровень затрат $c(x, z)$ можно обеспечить на стадии решения задачи (2), включив в описание множества M ограничение вида $c(x, z) \leq c_0$. Кроме того, для соизмеримости величин $\varphi(v)$ и $\Phi(v, y)$, предполагаемой в задаче (2'), необходимо найти стоимостной эквивалент ущерба $\Phi(x, y)$, что весьма затруднительно. Именно поэтому мы описываем $\Phi(x, y)$ в формах (3) и (15), (см. ниже) позволяющих оценивать расхождение векторов x и y в «натуральном» виде.

В обоих случаях $\Phi(x, y)$ выпукла по x , и множество Y компактно во всех рассматриваемых ниже задачах, а (2) сводится к минимизации на X выпуклой функции $\max_y \Phi(x, y)$. Следовательно, задачу (2) можно

пытаться решать градиентными методами [1, 2] либо методом штрафных функций [3]. Однако специфика функции Φ позволяет построить конечные методы определения наилучшей чистой стратегии минимизирующего игрока для некоторых практически важных вариантов описания множеств X, Y , что и является целью данной статьи. В последующих конкретизациях задачи (2) оптимальная стратегия определяется либо формульно, либо как решение некоторой задачи линейного программирования (ЗЛП).

Рассмотрим сначала случай, когда оценить компоненты затрат, составляющие функцию Φ , невозможно. Тогда ущерб от несовпадения векторов x и y можно отождествить с напряженностью задания

$$\Phi(x, y) = \max_i \{ y_i / x_i \}. \quad (3)$$

Пусть

$$M = \{(x, z) : Ax + A_1 z \geq a, x \geq 0, z \geq 0\}, \quad (4)$$

$$Y = \{y : By + B_1 y_1 \geq b, y \geq 0, y_1 \geq 0\}, \quad (5)$$

где y_1 — некоторый вектор внешних переменных, использованных при описании области изменения вектора y .

Если множество Y не ограничено, то $\max_Y \Phi(x, y) = \max_Y \max_i \{y_i/x_i\} = +\infty$ для любого x и минимизация функции $\max_Y \Phi(x, y)$ на X не имеет

смысла. Предположим, что Y ограничено, и пусть $y_i^* = \max\{y_i : y \in Y\}$. Если $y_i^* = 0$ для некоторого i (нулевая потребность в продукте i), то соответствующую компоненту из вектора y можно исключить. Поэтому без ограничения общности можно считать, что $Y \neq \emptyset$ и $y_i^* > 0$ для всех i . Заметим, что y_i^* находится как решение ЗЛП $\max\{y_i : y \in Y\}$.

Из [4] вытекает, что при Φ, M, Y , определенных выражениями (3) — (5), задача (2) имеет единственное решение x^* . Причем на x^* достигается $\max_x \min_i \{x_i/y_i^*\} = 1/v^*$, где v^* — цена игры. Следовательно, x^* и $u^* = 1/v^*$ находятся из ЗЛП

$$\max\{u : (x, z) \in M, u \leq x_i/y_i^* \forall i\}. \quad (6)$$

Таким образом, доказана теорема.

Теорема 1. Если Φ, M, Y определены выражениями (3) — (5) и $y_i^* > 0 \forall i$, то (x^*, z^*, u^*) — решение задачи (6) тогда и только тогда, когда x^* — решение задачи (2). Если (x^*, z^*, u^*) — решение задачи (6), то $1/u^*$ — максимальная возможная напряженность плана для системы, настроенной на x^* .

Заметим, что в условиях теоремы 1 задача (2) удовлетворяет определению R -игры [5], но метод решения игры, предложенный в [5, § 1.3], приводит к задаче нелинейного программирования. Для решения (2) в рассматриваемом случае пригоден также метод, описанный в работе [6], где предполагается, что X и Y — симплексы, но ее результаты, по-видимому, допускают обобщение. Все же сведение (2) к ЗЛП представляется нам предпочтительным.

В некоторых частных случаях описания множеств M и Y решение (6) и, следовательно, (2) можно выписать формульно.

Рассмотрим следующее обобщение модели из [2]

$$M = X = \left\{x : x \geq 0, \sum_i x_i \leq B\right\}, \quad (7)$$

$$Y = \left\{y : 0 \leq a_i \leq y_i \leq b_i, \sum_i y_i \leq A\right\}. \quad (8)$$

Содержательная интерпретация (7), (8) может быть, например, такова: система производит один продукт; $x_i(y_i)$ означает плановый выпуск (возможную потребность в нем) продукта в промежутке i планового периода; A — максимально возможная потребность в продукте суммарно за весь плановый период; B — максимально возможный выпуск продукта за весь плановый период (см. также [7]).

Из (8) следует, что $y_{i_0} \leq A - \sum_{i \neq i_0} a_i$ для любого i_0 . Пусть $b'_{i_0} = \min\{b_{i_0}, A - \sum_{i \neq i_0} a_i\}$. Ясно, что

$$Y = \left\{y : 0 \leq a_i \leq y_i \leq b'_{i_0}, \sum_i y_i \leq A\right\}. \quad (9)$$

Пусть $y'_{i_0}(i_0) = b_{i_0}$, $y'_{i_0}(i) = a_i$ для $i \neq i_0$. Тогда $\sum_i y'_{i_0}(i_0) = b'_{i_0} + \sum_{i \neq i_0} a_i \leq A$. Пусть $y'(i_0)$ — вектор с компонентами $y'_{i_0}(i_0)$.

Лемма 1. Если Y определено выражением (8), то: 1) $Y \neq \emptyset$ тогда и только тогда, когда $b_i' \geq a_i \forall i$; 2) если $Y \neq \emptyset$, то $y'(i_0) \in Y$ и $\max\{y_i: y \in Y\} = b_i'$.

Доказательство. Если $Y \neq \emptyset$ и $y \in Y$, то по (9) $a_i \leq y_i \leq b_i' \forall i$. Обратно: пусть $a_i \leq b_i' \forall i$. Тогда вектор $y'(i) \in Y$ для любого i , причем $y_i(i) = b_i'$ и $y_i \leq b_i'$. Следовательно, $\max\{y_i: y \in Y\} = y_i'(i) = b_i'$. Лемма доказана.

Запишем задачу (6) для множества M , определенного по (7), предполагая, что $b_i' > 0 \forall i$

$$\max \left\{ u: \sum_i x_i \leq B, x \geq 0, u \leq x_i/b_i' \forall i \right\}. \quad (10)$$

Теорема 2. Если Φ, M, Y определены выражениями (3), (7), (8), то решением задачи (2) является вектор x^* с компонентами $x_i^* = B b_i' / \sum_i b_i'$.

Доказательство. Из (10) следует, что $u b_i' \leq x_i$. Суммируя по i , получим $u \sum_i b_i' \leq \sum_i x_i \leq B$, откуда $u \leq B / \sum_i b_i'$. Пусть $u^* = B / \sum_i b_i'$. Очевидно, что (x^*, z^*) — допустимое решение (10). Но тогда это и оптимальное решение (10), а x^* — решение (2). Теорема доказана.

Цена игры в рассмотренном случае равна $\sum_i b_i' / B$.

Если, как и ранее, x_i и y_i — плановый выпуск и соответственно потребность в продукте за промежуток i планового периода, то реальная ситуация, когда суммарная потребность за весь период фиксирована и должна быть удовлетворена. Множества M и Y тогда описываются следующим образом

$$M = X = \left\{ x: x \geq 0, \sum_i x_i = A \right\}, \quad (11)$$

$$Y = \left\{ y: 0 \leq a_i \leq y_i \leq b_i, \sum_i y_i = A \right\}.$$

Заменой переменных $x' = Ax, y' = Ay$ выражения (11) преобразуются в

$$X' = \left\{ x': x' \geq 0, \sum_i x_i' = 1 \right\}, \quad (12)$$

$$Y' = \left\{ y': 0 \leq a_i' \leq y_i' \leq b_i', \sum_i y_i' = 1 \right\},$$

где $a_i' = a_i A, b_i' = b_i A$. Задача (3), (12) формульно решена в [7]. Еще один частный случай задачи (3) — (5) разобран в [8, с. 135—138] (см. также [9, с. 89—97]).

Может оказаться, что границы потребности в ресурсе для каждого промежутка неизвестны, но можно определить «накопленные» границы, т. е. такие числа a_i, b_i , что

$$Y = \left\{ y: 0 \leq a_i \leq \sum_{j=1}^i y_j \leq b_i \right\}. \quad (13)$$

Пусть множество M описывается выражением (7). Из (13) следует, что для $1 \leq i_1 \leq i_0 \leq i_2$ и $y \in Y$

$$a_{i_1} \leq \sum_{j=1}^{i_1} y_j \leq \sum_{j=1}^{i_0} y_j \leq \sum_{j=1}^{i_2} y_j \leq b_{i_2}.$$

Отсюда

$$\max \{ a_i: i \leq i_0 \} \leq \sum_{j=1}^{i_0} y_j \leq \min \{ b_i: i_0 \leq i \}. \quad (14)$$

Пусть

$$a'_i = \max \{a_j : j \leq i\}, \quad b'_i = \min \{b_j : j \geq i\}, \quad a'_0 = 0.$$

Ясно, что $a'_i \leq a'_{i+1}$, $b'_i \leq b'_{i+1}$.

Лемма 2. Следующие утверждения эквивалентны: (а) $Y \neq \emptyset$;
(б) $a'_i \leq b'_i \forall i$; (в) $\max \{y_i : y \in Y\} = b'_i - a'_i \forall i$.

Доказательство. Пусть $y \in Y$. Тогда из (14) следует (б). Пусть выполняется (б). Определим вектор

$$\bar{y}_i(i_0) = \begin{cases} a'_i - a'_{i-1}, & 1 \leq i < i_0, \\ b'_i - a'_{i_0-1}, & i = i_0, \\ b'_i - b'_{i-1}, & i_0 < i. \end{cases}$$

Легко видеть, что

$$\sum_{j=1}^i \bar{y}_j(i_0) = \begin{cases} a'_i, & 1 \leq i < i_0, \\ b'_i, & i_0 \leq i. \end{cases}$$

Следовательно,

$$a_i \leq a'_i \leq \sum_{j=1}^i \bar{y}_j(i_0) \leq b'_i \leq b_i, \quad \bar{y}(i_0) \in Y.$$

Из (14) вытекает, что

$$y_{i_0} = \sum_{j=1}^{i_0} y_j - \sum_{j=1}^{i_0-1} y_j \leq b'_{i_0} - a'_{i_0-1}, \quad y \in Y.$$

При этом $\bar{y}_{i_0}(i_0) = b'_{i_0} - a'_{i_0-1}$, что доказывает утверждение (в).

Импликация (в) $\rightarrow$ (а) очевидна. Лемма доказана.

Аналогично доказательству теоремы 2 легко показать, что решением задачи (2) при Φ , M , Y , определенных соответственно выражениями (3), (7), (13), является вектор x^* с компонентами

$$x_i^* = \frac{b'_i - a'_{i-1}}{\sum_j (b'_j - a'_{j-1})} B.$$

Проанализируем случай, когда ущерб от несовпадения i -х компонент векторов x и y пропорционален отклонению x_i от y_i

$$\Phi(x, y) = \sum_i \Phi_i(x_i, y_i), \tag{15}$$

$$\Phi_i(x_i, y_i) = \gamma_i(x, y) |x_i - y_i|,$$

$$\gamma_i(x, y) = \begin{cases} \gamma_i^1, & x_i \leq y_i, \\ \gamma_i^2, & x_i > y_i, \end{cases}$$

$$\gamma_i^1 > 0, \quad \gamma_i^2 > 0.$$

В [10] рассмотрена задача (2) с функцией проигрыша (15) и множествами

$$M = X = \{x : x \geq 0\}, \tag{16}$$

$$Y = \{y : 0 \leq a_i \leq y_i \leq b_i\}.$$

Доказано [5, с. 73—75], что оптимальная стратегия x^* здесь имеет вид

$$x_i^* = \frac{\gamma_i^2 a_i + \gamma_i^1 b_i}{\gamma_i^1 + \gamma_i^2}. \tag{17}$$

Исследуем задачу, отличающуюся от решенной в [10] тем, что множество M описано выражением (4).

Пусть $f_i(x, y) = \gamma_i(x, y) |x_i - y_i|$, $v_i(x) = \max_Y f_i(x, y)$ для $x \in X$. Ясно, что $\max_Y \Phi(x, y) = \sum_i v_i(x)$.

Лемма 3. $v_i(x) = \max\{\gamma_i^2(x_i - a_i), \gamma_i^1(b_i - x_i)\}$ для любого $x \in X$.

Доказательство. Из (15) следует, что $v_i(x) \geq \max\{\gamma_i^2(x_i - a_i), \gamma_i^1(b_i - x_i)\}$. Для доказательства противоположного неравенства достаточно показать, что $f_i(x, y) \leq \gamma_i^2(x_i - a_i)$ или $f_i(x, y) \leq \gamma_i^1(b_i - x_i)$ для любого $y \in Y$. Пусть $y \in Y$, тогда $a_i \leq y_i \leq b_i$.

1. Если $a_i > x_i$, то $f_i(x, y) = \gamma_i^1(y_i - x_i) \leq \gamma_i^1(b_i - x_i)$.

2. Пусть $a_i \leq x_i \leq b_i$. Если $a_i \leq y_i \leq x_i$, то $f_i(x, y) = \gamma_i^2(x_i - y_i) \leq \gamma_i^2(x_i - a_i)$. Если же $x_i < y_i \leq b_i$, то $f_i(x, y) = \gamma_i^1(y_i - x_i) \leq \gamma_i^1(b_i - x_i)$.

3. Если $b_i < x_i$, то $f_i(x, y) = \gamma_i^2(x_i - y_i) \leq \gamma_i^2(x_i - a_i)$. Лемма доказана.

Пусть x^* определен формулой (17).

Лемма 4. Пусть $x \in X$: (а) если $x_i = x_i^*$, то $v_i(x) = \gamma_i^2(x_i^* - a_i) = \gamma_i^1(b_i - x_i^*) = \frac{\gamma_i^1 \gamma_i^2}{\gamma_i^1 + \gamma_i^2} (b_i - a_i)$; (б) если $x_i > x_i^*$, то $v_i(x) = \gamma_i^2(x_i - a_i)$; (в) если $x_i < x_i^*$, то $v_i(x) = \gamma_i^1(b_i - x_i)$.

Доказательство. Все равенства утверждения (а), кроме первого, проверяются непосредственно, а из них с учетом леммы 3 следует первое равенство. Используя (а), при $x_i > x_i^*$ получаем

$$\gamma_i^2(x_i - a_i) > \gamma_i^2(x_i^* - a_i) = \gamma_i^1(b_i - x_i^*) > \gamma_i^2(b_i - x_i).$$

Теперь (б) вытекает из леммы 3. Аналогично доказывается утверждение (в). Лемма доказана.

$$\text{Пусть } \omega_i = \frac{\gamma_i^1 \gamma_i^2}{\gamma_i^1 + \gamma_i^2} (b_i - a_i).$$

Рассмотрим теперь следующую ЗЛП

$$A(x^+ + x^- - x^-) + A_1 z \geq a,$$

$$x^+ \geq 0, x^- \geq 0, x^+ + x^- - x^- \geq 0, z \geq 0,$$

(18)

$$F(x^+, x^-) = \sum_i [\gamma_i^2 x_i^+ + \gamma_i^1 x_i^- + \omega_i] \rightarrow \min.$$

Лемма 5. Если задача (18) разрешима и (x^+, x^-, z) — ее оптимальное решение, то $x_i^+ x_i^- = 0$ для любого i .

Доказательство. Пусть (x^+, x^-, z) — оптимальное решение задачи (18). Предположим, что $x_{i_0}^+ > 0$ и $x_{i_0}^- > 0$ для некоторого i_0 . Определим векторы $\hat{x}^+$ и $\hat{x}^-$

$$\hat{x}_i^+ = x_i^+, \hat{x}_i^- = x_i^-, i \neq i_0,$$

$$\hat{x}_{i_0}^- = 0, \hat{x}_{i_0}^+ = x_{i_0}^+ - x_{i_0}^-, x_{i_0}^+ \geq x_{i_0}^-,$$

$$\hat{x}_{i_0}^+ = 0, \hat{x}_{i_0}^- = x_{i_0}^- - x_{i_0}^+, x_{i_0}^+ < x_{i_0}^-.$$

Очевидно, что $\hat{x}^+ \geq 0$, $\hat{x}^- \geq 0$, $\hat{x}^+ - \hat{x}^- = x^+ - x^-$, поэтому $(\hat{x}^+, \hat{x}^-, z)$ — допустимое решение задачи (18). Из $\hat{x}_{i_0}^+ < x_{i_0}^+$, $\hat{x}_{i_0}^- < x_{i_0}^-$, $\gamma_{i_0}^1 > 0$ и $\gamma_{i_0}^2 > 0$ следует, что $F(\hat{x}^+, \hat{x}^-) < F(x^+, x^-)$, что противоречит выбору x^+ и x^- . Лемма доказана.

Лемма 6. Если Φ, Y, F определены выражениями (15), (16), (18) соответственно $x = x^+ + x^- - x^-$, $x^+ \geq 0$, $x^- \geq 0$ и $x_i^+ x_i^- = 0 \forall i$, то $F(x^+, x^-) = \max_Y \Phi(x, y)$.

Доказательство. Пусть $I^+ = \{i: x_i^+ > 0\}$, $I^- = \{i: x_i^- > 0\}$, $I^0 = \{i: x_i^+ = x_i^- = 0\}$. По условию леммы I^-, I^+ и I^0 попарно не пересека-

ются, а их объединение покрывает всю область изменения индекса i , причем $x_i > x_i^*$ для $i \in I^+$, $x_i < x_i^*$ для $i \in I^-$ и $x_i = x_i^*$ для $i \in I^0$. Используя утверждение (а) леммы 4, получим

$$F(x^+, x^-) = \sum_{i \in I^+} \gamma_i^2 (x_i^+ + x_i^* - a_i) + \sum_{i \in I^-} \gamma_i^1 (x_i^- + b_i - x_i^*) + \sum_{i \in I^0} \omega_i.$$

Применяя утверждения (б), (в) леммы 4, имеем $F(x^+, x^-) = \sum_i v_i(x) = \max_y \Phi(x, y)$ (см. замечание перед леммой 3). Лемма доказана.

Теорема 3. Пусть Φ, M, Y определены выражениями (15), (4), (16). Тогда: (а) если $(\hat{x}^+, \hat{x}^-, \hat{z})$ — оптимальное решение задачи (18), то $\hat{x} = x^* + \hat{x}^+ - \hat{x}^-$ принадлежит X и справедливо равенство $F(\hat{x}^+, \hat{x}^-) = \max_y \times$

$$\times \Phi(\hat{x}, y) = \min_x \max_y \Phi(x, y);$$

(б) если $\hat{x} \in X$ и $\max_y \Phi(\hat{x}, y) = \min_x \max_y \Phi(x, y)$, то существуют векторы $\hat{x}^+, \hat{x}^-, z$ такие, что $\hat{x} = x^* + \hat{x}^+ - \hat{x}^-$ и $(\hat{x}^+, \hat{x}^-, \hat{z})$ — оптимальное решение задачи (18).

Доказательство.

1. Пусть $(\hat{x}^+, \hat{x}^-, \hat{z})$ — оптимальное решение задачи (18), $\hat{x} = x^* + \hat{x}^+ - \hat{x}^-$. Тогда $A\hat{x} + A_i \hat{z} \geq a$, $\hat{x} \geq 0$, $\hat{z} \geq 0$, поэтому $(\hat{x}, \hat{z}) \in M$, $\hat{x} \in X$. По лемме 5 $x_i^+ x_i^- = 0$ для любого i . Тогда по лемме 6 $F(\hat{x}^+, \hat{x}^-) = \max_y \Phi(\hat{x}, y)$. Предположим, что существует $x \in X$ такой, что

$$\max_y \Phi(x, y) < \max_y \Phi(\hat{x}, y).$$

Векторы x^+ и x^- определим таким образом

$$\begin{aligned} x_i^+ &= x_i - x_i^*, x_i^- = 0, x_i \geq x_i^*, \\ x_i^+ &= 0, x_i^- = x_i^* - x_i, x_i < x_i^*. \end{aligned}$$

Тогда $x = x^* + x^+ - x^-$, $x^+ > 0$, $x^- \geq 0$. Из $x \in X$ следует, что $(x, z) \in M$ для некоторого $z \geq 0$. Поэтому (x^+, x^-, z) — допустимое решение задачи (18), причем $x_i^+ x_i^- = 0$ для любого i . По лемме 6 $F(x^+, x^-) = \max\{\Phi(x, y) : y \in Y\}$. Таким образом, $F(x^+, x^-) = \max\{\Phi(x, y) : y \in Y\} < \max\{\Phi(\hat{x}, y) : y \in Y\} = F(\hat{x}^+, \hat{x}^-)$, что противоречит выбору $\hat{x}^+, \hat{x}^-$. Утверждение (а) доказано.

2. Пусть $\hat{x} \in X$, $(\hat{x}, \hat{z}) \in M$ и $\max\{\Phi(\hat{x}, y) : y \in Y\} = \min_x \max_y \Phi(x, y)$. Определим векторы $\hat{x}^+, \hat{x}^-$ так

$$\begin{aligned} \hat{x}_i^+ &= \hat{x}_i - x_i^*, \hat{x}_i^- = 0, \hat{x}_i \geq x_i^*, \\ \hat{x}_i^+ &= 0, \hat{x}_i^- = x_i^* - \hat{x}_i, \hat{x}_i < x_i^*. \end{aligned}$$

Как в доказательстве утверждения (а), легко показать, что $F(\hat{x}^+, \hat{x}^-) = \max\{\Phi(\hat{x}, y) : y \in Y\}$ и $(\hat{x}^+, \hat{x}^-, \hat{z})$ — допустимое решение (18). Следовательно, $F(\hat{x}^+, \hat{x}^-) = \min_x \max_y \Phi(x, y)$. Предположим, что (x^+, x^-, z) — оптимальное решение (18) и $F(x^+, x^-) < F(\hat{x}^+, \hat{x}^-)$. Но тогда по утверждению (а) существует $x' \in X$ такой, что $\min_x \max_y \Phi(x, y) = \max_y \Phi(x', y) = F(x^+, x^-) < F(\hat{x}^+, \hat{x}^-) = \min_x \max_y \Phi(x, y)$. Полученное противоречие доказывает утверждение (б). Теорема доказана.

Предположим, что допустимые объемы выпуска продуктов ограничены только наличными мощностями

$$M = \bar{X} = \{x : 0 \leq x_i \leq A_i\}. \quad (19)$$

Теорема 4. Если Φ, M, Y определены выражениями (15), (19), (16) соответственно, то решение x^0 задачи (2) будет

$$x_i^0 = \min \{x_i^*, A_i\}.$$

Доказательство. Задача (18) имеет вид

$$\begin{aligned} 0 \leq x_i^* + x_i^+ - x_i^- \leq A_i, \quad i = 1, \dots, n, \\ x_i^+ \geq 0, \quad x_i^- \geq 0, \end{aligned} \quad (20)$$

$$F(x^+, x^-) = \sum_i [\gamma_i^2 x_i^+ + \gamma_i^1 x_i^- + \omega_i] \rightarrow \min.$$

После исключения постоянных слагаемых целевая функция принимает вид $F_1(x^+, x^-) = \sum_i [\gamma_i^1 x_i^+ + \gamma_i^2 x_i^-]$. Понятно, что решение задачи (20) — это композиция решений следующих подзадач

$$0 \leq x_i^* + x_i^+ - x_i^- \leq A_i, \quad (20')$$

$$x_i^+ \geq 0, \quad x_i^- \geq 0,$$

$$f(x_i^+, x_i^-) = \gamma_i^1 x_i^+ + \gamma_i^2 x_i^- \rightarrow \min.$$

Решим их.

1. Пусть $x_i^* \leq A_i$. Тогда при $x_i^+ = x_i^- = 0$ получаем допустимое решение задачи (20'), которое, очевидно, не может быть улучшено.

2. Пусть $x_i^* > A_i$ и $(\hat{x}_i^+, \hat{x}_i^-)$ — оптимальное решение (20'). Тогда $\hat{x}_i^+ + \hat{x}_i^- \leq A_i - x_i^* < 0$, откуда $\hat{x}_i^+ < \hat{x}_i^-$. Теперь из леммы 5 следует $\hat{x}_i^+ = 0$. Поэтому задача (20') эквивалентна следующей: $\min \{\gamma_i^1 x_i^- : 0 \leq x_i^* - x_i^- \leq A_i, x_i^- \geq 0\}$. Отсюда $\hat{x}_i^- \geq x_i^* - A_i > 0$ и $\hat{x}_i^- = x_i^* - A_i$. Следовательно, решение (x^+, x^-) задачи (20) имеет вид: $\hat{x}_i^+ = \hat{x}_i^- = 0$ при $x_i^* \leq A_i$; $\hat{x}_i^+ = 0$, $\hat{x}_i^- = x_i^* - A_i$ при $x_i^* > A_i$. По теореме 3 решение x^0 задачи (2) здесь находится в виде $x^0 = x^* + \hat{x}^+ - \hat{x}^-$, откуда

$$x_i^0 = \begin{cases} x_i^*, & x_i^* \leq A_i, \\ A_i, & x_i^* > A_i. \end{cases}$$

Теорема доказана.

До сих пор мы предполагали, что Y — выпуклый многогранник. Часто встречается, однако, «вариантное» описание множества возможных потребностей, т. е. $Y = \{y^k : k = 1, \dots, K\}$. Для такого описания Y при Φ и M , определенных выражениями (15), (4), задача (2) сведена к ЗЛП в [11].

Заметим, что в случае, когда X и Y — выпуклые многогранники, (2) с функцией проигрыша (15) есть обобщение задачи Гросса (см., например, [12]). Функция (15) выпукла по y при $\gamma_i^1, \gamma_i^2 \geq 0$, поэтому $\max \Phi(x, y)$ достигается в вершине многогранника Y . Следовательно, в задаче (2) множество Y можно считать конечным (состоящим из вершин многогранника), что сводит ее к случаю, рассмотренному в [11]. Такое сведение, однако, в реальных задачах представляет лишь теоретический интерес ввиду большого количества вершин и трудности их описания. Впрочем, эти трудности снимаются, если Y — симплекс

$$Y = \left\{ y : y \geq 0, \sum_{j=1}^n c_j y_j \leq A \right\}, \quad c_j > 0, \quad A > 0. \quad (21)$$

Пусть $A_j = A/c_j$. Ясно, что вершины $y^i, i = 0, \dots, n$, многогранника (21) имеют вид

$$y_j^i = A_j, \quad y_j^i = 0, \quad j \neq i, \quad j = 1, \dots, n, \quad y^0 = 0.$$

ЗЛП, построенная в [11], будет

$$x \in X, \quad (22)$$

$$u \geq \sum_j \gamma_j^2 x_j, \quad (23)$$

$$u \geq \gamma_j^1 (A_j - x_j) + \sum_{k \neq j} \gamma_k^2 x_k, \quad j = 1, \dots, n, \quad (24)$$

$$u \geq \gamma_j^2 (x_j - A_j) + \sum_{k \neq j} \gamma_k^2 x_k, \quad j = 1, \dots, n, \quad (25)$$

$$u \rightarrow \min. \quad (26)$$

Рассмотрим случай $X = \{x: x \geq 0\}$. Ограничение (22) принимает вид

$$x \geq 0. \quad (27)$$

Правые части ограничений (23)–(25) обозначим $\rho_0(x)$, $\rho_j(x)$, $\mu_j(x)$.

Лемма 7. Если (x^0, u^0) — решение задачи (23)–(27), то $x_j^0 \leq A_j \forall j$.

Доказательство. Предположим, что $x_{j_1}^0 > A_{j_1}$. Тогда $\rho_{j_1}(x^0) <$

$$\begin{aligned} u^0 &= \max \{ \rho_0(x^0), \max_j \{ \rho_j(x^0) \}, \max_j \{ \mu_j(x^0) \} \} = \\ &= \max \{ \rho_0(x^0), \max_{j \neq j_1} \{ \rho_j(x^0) \}, \max_j \{ \mu_j(x^0) \} \}. \end{aligned}$$

Теперь очевидно, что, полагая $\bar{x}_{j_1} = x_{j_1}^0 - \Delta$, $\bar{x}_j = x_j^0$, $j \neq j_1$, $0 < \Delta < x_{j_1}^0 - A_{j_1}$, получим вектор $\bar{x} \geq 0$, для которого $\rho_{j_1}(\bar{x}) < \mu_{j_1}(\bar{x})$, $\rho_0(\bar{x}) < \rho_0(x^0)$, $\rho_j(\bar{x}) < \rho_j(x^0)$ для $j \neq j_1$, $\mu_j(\bar{x}) < \mu_j(x^0)$. Отсюда следует существование $\bar{u}$ такого, что $(\bar{x}, \bar{u})$ удовлетворяет (23)–(25), (27) и $\bar{u} < u^0$. Это противоречие. Лемма доказана.

Из леммы 7 вытекает, что если (27) заменить на

$$0 \leq x_j \leq A_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad (28)$$

а ограничения (25) исключить, то получим задачу, эквивалентную (23)–(27).

В дальнейшем будем рассматривать случай $n \geq 2$ и считать (без ограничения общности), что $\gamma_j^1 A_j \leq \gamma_k^1 A_k$, $j < k$.

Пусть

$$K(j) = \sum_{i=j+1}^n \frac{\gamma_i^2}{\gamma_i^1 + \gamma_i^2} - \frac{\gamma_j^1}{\gamma_j^1 + \gamma_j^2}, \quad j = 1, \dots, n-1.$$

Лемма 8. Если (x^0, u^0) — решение задачи (23), (24), (26), (28), то существует такое j_1 , $1 \leq j_1 \leq n$, что (а) $u^0 = \rho_{j_1}(x^0)$, $j \geq j_1$; (б) $u^0 > \rho_j(x^0)$, $1 \leq j < j_1$, $j_1 > 1$; (в) $x_j^0 = 0$, $1 \leq j < j_1$, $j_1 > 1$; (г) $j_1 < n$; (д) если $K(j_1) < 0$,

то $j_1 = 1$, $u^0 = \sum_{j=1}^n \frac{\gamma_j^1 \gamma_j^2}{\gamma_j^1 + \gamma_j^2} A_j$ и $x_j^0 = \frac{\gamma_j^1 A_j}{\gamma_j^1 + \gamma_j^2}$, $j = 1, \dots, n$; (е) если $K(j_1) \geq 0$,

то $u^0 = \gamma_{j_1} A_{j_1} + \sum_{k > j_1} \frac{\gamma_k^2}{\gamma_k^1 + \gamma_k^2} (\gamma_k^1 A_1 - \gamma_{j_1}^1 A_{j_1})$ и $(u^0, \bar{x})$ есть решение задачи

$$(23), (24), (26), (28) \text{ при } \bar{x}_j = 0, 1 \leq j \leq j_1, \bar{x}_j = \frac{\gamma_j^1 A_j - \gamma_{j_1}^1 A_{j_1}}{\gamma_j^1 + \gamma_{j_1}^2}, j_1 < j \leq n.$$

Доказательство

1. $u^0 = \max_{0 \leq j \leq n} \rho_j(x^0)$. Предположим, что $u^0 = \rho_0(x^0) > \rho_j(x^0)$, $j = 1, \dots, n$. Тогда $\rho_0(x^0) > 0$ и $x^0 \neq 0$. Вследствие непрерывности функций $\rho_j(x)$, $j = 0, \dots, n$, можно любую ненулевую компоненту вектора x^0 уменьшить так, чтобы для полученного таким образом вектора $\bar{x}$ выполнялись условия $\bar{x} \geq 0$, $\rho_0(x^0) > \rho_0(\bar{x}) > \rho_j(\bar{x})$, $j = 1, \dots, n$. Но тогда $\max_j \rho_j(\bar{x}) < u^0$, что противоречит выбору u^0 . Значит, множество $J = \{j: 1 \leq j \leq n, u^0 = \rho_j(x^0)\}$ непусто. Предположим, что $j_0 \in J$ и $x_{j_0}^0 > 0$, $\rho_{j_0}(x^0) < u^0$. Уменьшая компоненту j_0 вектора x , мы уменьшаем вес $\rho_j(x)$

для $j \neq j_0$ и увеличиваем $\rho_{j_0}(x)$. Следовательно, существует такой вектор $\bar{x}$, что $\bar{x}_j = x_j^0$ для $j \neq j_0$, $0 \leq \bar{x}_{j_0} < x_{j_0}^0$, $\rho_j(\bar{x}) < \rho_j(x^0)$ для $j \in J \cup \{0\}$, $\rho_j(\bar{x}) < u^0$, $j \in J$. Тогда $\max_{0 \leq j \leq n} \rho_j(\bar{x}) < u^0$, что противоречит выбору u^0 . Таким образом, $x_j^0 = 0$, $j \in J$. Пусть $j_1 = \min \{j: j \in J\}$. Тогда $\rho_{j_1}(x^0) = \gamma_{j_1}^1 (A_{j_1} - x_{j_1}^0) +$

$+ \sum_{k \in J \setminus \{j_1\}} \gamma_k^2 x_k^0$, $\rho_j(x^0) = \gamma_j^1 A_j + \sum_{k \in J} \gamma_k^2 x_k^0$, $j \in J$. Из $\rho_{j_1}(x^0) > \rho_j(x^0)$, $j \in J$, следует,

что $x_{j_1}^0 < \frac{\gamma_{j_1}^1 A_{j_1} - \gamma_{j_1}^1 A_j}{\gamma_{j_1}^1 + \gamma_{j_1}^2} x_{j_1}^0 \geq 0$, поэтому $\gamma_{j_1}^1 A_{j_1} > \gamma_{j_1}^1 A_j$ и $j < j_1$. Тогда $j = \{j: j_1 \leq j \leq n\}$ и утверждения (а), (б), (в) леммы 8 доказаны.

Предположим, что $j_1 = n$. Тогда $x_j^0 = 0$, $1 \leq j \leq n-1$, $\rho_0(x^0) = \gamma_n^2 x_n^0$, $\rho_n(x^0) = \gamma_n^1 (A_n - x_n^0)$, $\rho_j(x^0) = \gamma_j^1 A_j + \gamma_n^2 x_n^0$, $1 \leq j \leq n-1$. Из $\rho_n(x^0) > \rho_j(x^0)$, $1 \leq j \leq n-1$, следует, что

$$x_n^0 < \frac{\gamma_n^1 A_n - \gamma_j^1 A_j}{\gamma_n^1 + \gamma_n^2} \leq \frac{\gamma_n^1 A_n}{\gamma_n^1 + \gamma_n^2} \leq A_n.$$

Отсюда $u^0 = \rho_n(x^0) = \gamma_n^1 A_n - \gamma_n^1 x_n^0 > \rho_0(x^0)$. Увеличивая компоненту n вектора x^0 , можно получить такой вектор $\bar{x}$, для которого $\rho_n(x^0) > \rho_n(\bar{x})$ и $\rho_j(\bar{x}) < u^0$ для $0 \leq j < n-1$. Тогда $\max \{\rho_j(\bar{x}): 0 \leq j \leq n\} < u^0$, что противоречит выбору u^0 . Утверждение (г) доказано.

Из $\rho_j(x^0) = \rho_j(x^0)$ при $j_1 < j$ (такие j существуют по (г)) легко получить, что

$$x_j^0 = (\gamma_j^1 + \gamma_j^2)^{-1} [(\gamma_j^1 A_j - \gamma_{j_1}^1 A_{j_1}) + x_{j_1}^0 (\gamma_{j_1}^1 + \gamma_{j_1}^2)]. \quad (29)$$

Отсюда

$$u^0 = \rho_{j_1}(x^0) = \gamma_{j_1}^1 (A_{j_1} - x_{j_1}^0) + \sum_{i_1 < j_1 \leq n} \frac{\gamma_{i_1}^2}{\gamma_{i_1}^1 + \gamma_{i_1}^2} [(\gamma_{i_1}^1 A_{i_1} - \gamma_{j_1}^1 A_{j_1}) + x_{j_1}^0 (\gamma_{j_1}^1 + \gamma_{j_1}^2)]. \quad (30)$$

Коэффициент при $x_{j_1}^0$ в (30) равен

$$\sum_{i_1 < j_1 \leq n} \frac{\gamma_{i_1}^2 (\gamma_{i_1}^1 + \gamma_{j_1}^2)}{\gamma_{i_1}^1 + \gamma_{i_1}^2} - \gamma_{j_1}^1 = (\gamma_{j_1}^1 + \gamma_{j_2}^2) K(j_1).$$

Предположим, что $K(j_1) < 0$ и $j_1 > 1$. Вектор $\bar{x}$ построим следующим образом: $\bar{x}_j = 0$, $j < j_1$,

$$\bar{x}_{j_1} = \frac{\gamma_{j_1}^1 A_{j_1} - \gamma_{j_1-1}^1 A_{j_1-1}}{\gamma_{j_1}^1 + \gamma_{j_1}^2},$$

$\bar{x}_j$, $j_1 < j \leq n$ — по формуле (29) с заменой x_j^0 и $x_{j_1}^0$ на $\bar{x}_j$ и $\bar{x}_{j_1}$, соответственно.

Легко проверить, что величины $\rho_j(\bar{x})$, $j_1 \leq j \leq n$, совпадают и их общее значение определяется выражением (30) с заменой $x_{j_1}^0$ на $\bar{x}_{j_1}$. Обозначим эту величину через $\bar{u}$. Имеем

$$\begin{aligned} \rho_{j_1}(x^0) &= \gamma_{j_1}^1 (A_{j_1} - x_{j_1}^0) + \sum_{i_1 < j_1 \leq n} \gamma_{i_1}^2 x_{i_1}^0 > \rho_{j_1-1}(x^0) = \\ &= \gamma_{j_1-1}^1 A_{j_1-1} + \sum_{i_1 < j_1 \leq n} \gamma_{i_1}^2 x_{i_1}^0, \end{aligned}$$

откуда

$$x_{j_1}^0 < \frac{\gamma_{j_1}^1 A_{j_1} - \gamma_{j_1-1}^1 A_{j_1-1}}{\gamma_{j_1}^1 + \gamma_{j_1}^2} = \bar{x}_{j_1}.$$

Тогда из $K(j_1) < 0$ следует, что $\bar{u} < u^0$.

Легко проверить, что из неравенств

$$\bar{x}_{j_1} < \frac{\gamma_{j_1}^1 A_{j_1}}{\gamma_{j_1}^1 + \gamma_{j_1}^2} \quad \text{и} \quad \bar{x}_{j_1} \leq \frac{\gamma_{j_1}^1 A_{j_1} - \gamma_{j_1}^2 A_j}{\gamma_{j_1}^1 + \gamma_{j_1}^2}, \quad 1 \leq j < j_1,$$

вытекает $\rho_{j_1}(\bar{x}) > \rho_0(\bar{x})$ и $\rho_{j_1}(\bar{x}) \geq \rho_j(\bar{x})$, $1 \leq j < j_1$. Очевидно, $\bar{x}_j \geq 0$, $j_1 \leq j \leq n$. Кроме того,

$$\bar{x}_{j_1} < \frac{\gamma_{j_1}^1 A_{j_1} + \gamma_{j_1}^2 A_j}{\gamma_{j_1}^1 + \gamma_{j_1}^2},$$

откуда $\bar{x}_j < A_j$, $j_1 < j \leq n$. Ясно также, что $\bar{x}_{j_1} \leq A_{j_1}$. Следовательно, $\bar{x}$ удовлетворяет (28) и $\rho_j(\bar{x}) < u^0$, $j=0, \dots, n$, что противоречит выбору u^0 . Это означает, что при $K(j_1) < 0$ должно быть $j_1=1$. Тогда из $\rho_1(x^0) \geq \rho_0(x^0)$ вытекает $x_1^0 \leq \gamma_1^1 A_1 / (\gamma_1^1 + \gamma_1^2) = B$. Предположим, что $x_1^0 < B$. Тогда определим вектор $\bar{x}$ так: $\bar{x}_1 = B$, $\bar{x}_j$, $1 < j \leq n$, по (29) с заменой $x_{j_1}^0$, x_j^0 на $\bar{x}_1$, $\bar{x}_j$. Так же, как в случае $j_1 > 1$, нетрудно получить противоречие. Следовательно, $x_1^0 = \gamma_1^1 A_1 / (\gamma_1^1 + \gamma_1^2)$. Теперь из (29) имеем $x_j^0 = \gamma_j^1 A_j / (\gamma_j^1 + \gamma_j^2)$, $1 < j \leq n$. Утверждение (д) доказано (выражение для u^0 получается непосредственной подстановкой x_1^0 в (30)). Предположим теперь, что $K(j_1) \geq 0$ и $x_{j_1}^0 > 0$. Тогда положим $\bar{x}_j = 0$, $1 \leq j \leq j_1$, $\bar{x}_j = (\gamma_j^1 A_j - \gamma_{j_1}^1 A_{j_1}) / (\gamma_j^1 + \gamma_j^2)$, $j_1 < j \leq n$. Очевидно, что $0 \leq \bar{x}_j \leq A_j$, $j=1, \dots, n$. При этом $\bar{x}_j < x_j^0$, $j_1 \leq j \leq n$, поэтому $\rho_j(\bar{x}) < \rho_j(x^0)$, $1 \leq j < j_1$; $\bar{x}_j$, $j > j_1$, и $\bar{x}_{j_1}$ связаны зависимостью (29), и

$$\rho_j(\bar{x}) = \rho_{j_1}(\bar{x}) = \bar{u} = \gamma_{j_1}^1 A_{j_1} + \sum_{i_1 < i \leq n} \frac{\gamma_i^2 (\gamma_i^1 A_i - \gamma_{j_1}^1 A_{j_1})}{\gamma_i^1 + \gamma_i^2}, \quad j_1 < j \leq n.$$

Здесь $\bar{u}$ определяется формулой (30) при замене $x_{j_1}^0$ на $\bar{x}_{j_1} = 0$. Из $K(j_1) \geq 0$ и $x_{j_1}^0 > 0$ следует, что $\bar{u} \leq u^0$. Поэтому, $\bar{u} = u^0$ и $(u^0, \bar{x})$ — решение задач (23), (24), (26), (28). Выражение для u^0 в утверждении (е) получается подстановкой $\bar{x}_{j_1} = 0$ в (30) вместо $x_{j_1}^0$.

Лемма доказана.

Пусть

$$u(j) = \gamma_j^1 A_j + \sum_{i > j} \frac{\gamma_i^2}{\gamma_i^1 + \gamma_i^2} (\gamma_i^1 A_i - \gamma_j^1 A_j), \quad 1 < j \leq n,$$

$$u(1) = \begin{cases} \gamma_1^1 A_1 + \sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i^2}{\gamma_i^1 + \gamma_i^2} (\gamma_i^1 A_i - \gamma_1^1 A_1), & K(1) \geq 0, \\ \sum_{j=1}^n \frac{\gamma_j^1 \gamma_j^2}{\gamma_j^1 + \gamma_j^2} A_j, & K(1) < 0. \end{cases}$$

Теорема 5. Если Φ , Y определены выражениями (13), (21) соответственно, то

$$\min_{x \geq 0} \max_Y \Phi(x, y) = \min \{u(1), \min_{1 < j \leq n} \{u(j) : K(j) \geq 0\}\} = u^0.$$

При этом вектор x^0 , для которого достигается $\min_{x \geq 0} \max_Y \Phi(x, y)$, определяется как в пункте (е) леммы 8, если $u^0 = u(j)$ и $K(j) \geq 0$, и как в пункте (д) леммы 8, если $u^0 = u(1)$ и $K(1) < 0$.

Доказательство. Как уже отмечалось, x^0 и u^0 определяются из ЗЛП (23), (24), (26), (28). Поэтому утверждение теоремы с очевидностью следует из леммы 8.

Следствие. Если $\gamma_j^1 = \gamma_j^2 = \gamma$, $j=1, \dots, n$, и $Y = \{y : y \geq 0, \sum_i y_i \leq A\}$,

то $\min_{x \geq 0} \max_Y \Phi(x, y)$ достигается при $x=0$ и равен γA .

Доказательство. В рассматриваемом случае $K(j) \geq 0$, $u(j) = \gamma A$, $j=1, \dots, n$. Отсюда и из теоремы 5 немедленно следует доказываемое утверждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Демьянов В. Ф., Малоземов В. Н. Введение в минимакс. М.: Наука, 1972.
2. Вопросы теории и элементы программного обеспечения минимаксных задач. Л.: Изд-во ЛГУ, 1977.
3. Федоров В. В. Численные методы максимина. М.: Наука, 1979.
4. Воробьев Н. Н. Об одной теоретико-игровой схеме оптимального распределения ограниченных ресурсов//Применение математики в экономике. Вып. 10. Л.: Изд-во ЛГУ, 1975.
5. Давыдов Э. Г. Игры, графы, ресурсы. М.: Радио и связь, 1981.
6. Генин М. А. Алгоритмы решения некоторых выпукло-вогнутых и линейно-выпуклых игр//Методы вычислений. Вып. 6. Л.: Изд-во ЛГУ, 1970.
7. Кибалов Е. Б., Хуторецкий А. Б. К вопросу о выборе стратегии развития мощностей строительного комплекса//Моделирование развития строительного комплекса. Новосибирск; ИЭ ОПП СО АН СССР, 1972.
8. Дюбин Г. Н., Суздаль В. Г. Введение в прикладную теорию игр. М.: Наука, 1981.
9. Воробьев Н. Н. Теория игр для экономистов-кибернетиков. Л.: Изд-во ЛГУ, 1974.
10. Кибалов Е. Б., Хуторецкий А. Б. Моделирование целевых строительных комплексов. Новосибирск: Наука, 1983.
11. Хуторецкий А. Б., Савиных О. В. Игровая модель среднесрочного планирования программного строительного комплекса//Повышение эффективности функционирования экономических систем в условиях научно-технического прогресса. Новосибирск: ИЭ ОПП СО АН СССР, 1987.
12. Огарышев В. Ф. Обобщение задачи Гросса//Кибернетику — на службу коммунизму. Вып. 6. М.: Энергия, 1971.

Поступила в редакцию
10 III 1988