12. Семья и народное благосостояние в развитом социалистическом обществе. М.: Мысль, 1985.
13. *Grogono A. W., Woodgate D. F.* Measurement of Ill, Health: a Comment//Int. J. Epid. 1973. V. 2. № 1.
14. *Fanshel S., Bush J. W.* A Health Status Index and its Application to Health Services Outcomes//Oper. Res. 1970. V. 18. № 6.
15. *Rosser R. M., Watts V. S.* The Measurement of Hospital Output//Intern. J. Epid. 1972. V. 1. № 1.
16. *Ермаков С. П.* Моделирование процессов воспроизводства здоровья населения. М.: ВНИИМИ Минздрава СССР, 1983.
17. *Бедный М. С.* Медико-демографическое изучение населения. М.: Статистика, 1979.
18. *Sullivan D. F.* Conceptual Problems in Developing an Index Health. Public Health Service Publ//Vital and Health Statistics. 1966. № 17.
19. *Эгбабе С. Ш.* Детская смертность в странах Западной Африки//Сов. здравоохранение. 1989. № 7.
20. Statistical Abstract of United States. Wash., 1986.

Поступила в редакцию
10 VII 1989

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА МУЛЬТИПЛИКАТОРОВ КОНЕЧНОГО СПРОСА

Воропанов С. А.

(Душанбе)

1. ВВЕДЕНИЕ

Одной из важных синтетических характеристик межотраслевых связей является вектор μ мультипликаторов конечного спроса

$\mu_j = \sum\limits_{i=1}^{n} q_{ij}$, $j=1, \ldots, n$, где q_{ij}— элементы матрицы коэффициентов полных материальных затрат $Q=(I—A)^{-1}$; I — единичная матрица; $A=(a_{ij})$ — матрица коэффициентов прямых материальных затрат.

В случае, когда матрица A известна, проблем с расчетом мультипликаторов конечного спроса не возникает. Другое дело, когда исследователю известны лишь некоторые характеристики матрицы A, в частности вектор коэффициентов материалоемкости $w_j = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}$, $j=1, \ldots, n$, а также отдельные коэффициенты a_{ij}.

Сформулируем задачу: по некоторым заданным показателям матрицы A оценить значения мультипликаторов конечного спроса. Такого рода задача возникает в случае, когда недостаток сил и средств не позволяет построить полную межотраслевую таблицу.

В [1] получено соотношение

$$1 + w_j/(1 - \min_j w_j) \leqslant \mu_j \leqslant 1 + w_j/(1 - \max_j w_j),\ j = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

и в качестве оценки μ_j рекомендуется использовать формулу

$$\mu_j \approx 1 + w_j/(1 - \overline{w}),\ j = 1, \ldots, n, \tag{2}$$

где $\overline{m} = n^{-1} \sum\limits_{j=1}^{n} w_j$.

В [2] оценка (2) улучшена исходя из предположения, что кроме w_j известен еще и столбец j (и только он) матрицы A

$$\mu_j \approx 1 + \frac{w_j + P_j/S_j}{1 - a_{jj} - P_j S_j/n},\ j = 1, \ldots, n, \tag{3}$$

где $P_j = \sum\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} a_{ij} w_j$, $S_j = 1 - \sum\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} w_i/n$.

В [3] для случая, когда известны a_{jj}, $j=1, \ldots, n$, предлагается оценивать

$$\mu_j \approx (1-a_{jj})^{-1}\left[1+(w_j-a_{jj})\Big/\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}(1-a_{ii})\right], \; j=1, \ldots, n. \tag{4}$$

Формула (4) весьма неточна (см. [4], а также разд. 4 этой заметки) и пригодна лишь для малых регионов с небольшим количеством выделенных в межотраслевой таблице отраслей [3, 5]. Более точная формула дается в [4]

$$\mu_j \approx \frac{1+\sum_{i=1}^{n}[(w_j-a_{jj})-(w_i-a_{ii})]/R_i}{R_j/(n-1)\left[1-\sum_{i=1}^{n}(w_i-a_{ii})/R_i\right]}, \; j=1, \ldots, n, \tag{5}$$

где $R_i = n-1-na_{ii}+w_i^{\star}$.

При доказательствах в [1] использовалось предположение о равномерности распределения a_{ij} в каждом столбце матрицы A. На самом деле, как правило, о структуре затрат известно больше—по крайней мере некоторые коэффициенты прямых материальных затрат априорно равны нулю.

В [6] предложено для оценки распределения элементов матрицы A применять межотраслевые таблицы-аналоги, в качестве которых могут фигурировать балансы данного региона за предшествующие годы, таблицы других регионов или страны в целом. Эмпирические расчеты, выполненные на материалах межотраслевого баланса Шотландии (аналогом служил межотраслевой баланс Великобритании), дали более точные в сравнении с (2) результаты.

Ниже для определения мультипликаторов конечного спроса предложен подход, основанный на использовании методов теории операторов в пространствах с конусом [7, 8]. Необходимые теоремы см. в разд. 2. Важнейшие результаты содержатся в разд. 3. В разд. 4 на материалах межотраслевых таблиц Латвийской ССР проведен сравнительный анализ точности оценок мультипликаторов конечного спроса. В разд. 5 дано развитие метода для оценивания коэффициентов полных материальных затрат **.

2. ТЕОРЕМЫ

Положим, что в R^n задано уравнение

$$z=zA+d, \tag{6}$$

где z, $d \in R^n$, $a_{ij} \geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = w_j$, $0 < w_j < 1$, $i, j = 1, \ldots, n$.

Для x, $y \in R^n$, будем писать $x \geqslant y$, если $x_i \geqslant y_i$, $i=1, \ldots, n$.

Пусть найдутся элементы u^0 и v^0 такие, что выполняются соотношения

$$u^0=u^0A+d, \tag{7}$$

$$v^0 \geqslant v^0A+d. \tag{8}$$

Организуем далее два итерационных процесса по формулам

$$u^{n+1}=u^nA+d, \; n=0, 1, \ldots, \tag{9}$$

$$v^{n+1}=v^nA+d, \; n=0, 1, \ldots, \tag{10}$$

Имеют место следующие теоремы [7, 8] ***.

Теорема 1. *Последовательные приближения (9), (10) монотонно, соответственно по недостатку и по избытку, сходятся к z^* решению уравнения (6)*

$$u^0 \leqslant u^1 \leqslant u^2 \leqslant \ldots \leqslant z^* \leqslant \ldots \leqslant v^2 \leqslant v^1 < v^0.$$

---

* В целях компактности записи (3) и (5) приведены здесь в отличном от источников виде.

** Предлагаемый подход в несколько иных целях был использован в [9].

*** Теоремы приведены в измененной формулировке для частного случая, когда (6) задано в R^n.

Теорема 2. *Элементы*

$$u^0 = e \min_j [d_j/(1-w_j)],$$
$$v^0 = e \max_j [d_j/(1-w_j)],$$

где $e=(1, \ldots, 1)$, *удовлетворяют соотношениям (7) и (8).*

Таким образом, используя теоремы 1 и 2, можно получать двухсторонние оценки решения (6), причем на первых итерациях не требуется знание всей матрицы A.

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Легко показать, что вектор μ удовлетворяет уравнению $\mu=\mu A+e$.

Исходя из теоремы 2, построим начальные приближения

$$u^0 = e \min_j [1/(1-w_j)] = e[1/(1-\min_j w_j],$$
$$v^0 = e \max_j [1/(1-w_j)] = e[1/(1-\max_j w_j)].$$

Далее по (9) и (10) построим

$$u_j^1 = 1 + w_j/\alpha_1,\ v_j^1 = 1 + w_j/\alpha_2,\ j=1, \ldots, n,$$

где $\alpha_1 = 1 - \min_j w_j$, $\alpha_2 = 1 - \max_j w_j$.

В силу теоремы 1 верны оценки

$$1+w_j/\alpha_1 \leqslant \mu_j \leqslant 1+w_j/\alpha_2,\ j=1, \ldots, n, \tag{11}$$

что совпадает с результатом [1].

Построим по (9) и (10) элементы

$$u_j^2 = 1 + w_j + \sum_{i=1}^n a_{ij}w_i/\alpha_1,\ v_j^2 = 1 + w_j + \sum_{i=1}^n a_{ij}w_i/\alpha_2,\ j=1, \ldots, n.$$

Согласно теореме 1 верны соотношения

$$1 + w_j + \sum_{i=1}^n a_{ij}w_i/\alpha_1 \leqslant \mu_j \leqslant 1 + w_j + \sum_{i=1}^n a_{ij}w_i/\alpha_2,\ \ j=1, \ldots, n, \tag{12}$$

и точечная оценка μ_j может быть рассчитана таким образом

$$\mu_j \approx 1 + w_j + \sum_{i=1}^n a_{ij}w_i/(1-\overline{w}),\ j=1, \ldots, n. \tag{13}$$

Очевидно, что использование (12) и (13) возможно лишь в случае, когда известен столбец j матрицы A.

Попробуем теперь получить точечную оценку μ, применяя следующую геометрическую идею. Ясно, что (11) и (12) задают отрезки, которым принадлежат истинные значения μ_j

$$\overline{\mu}_j \leqslant \mu_j \leqslant \overline{\overline{\mu}}_j,\ j=1, \ldots, n, \tag{14}$$

где $\overline{\mu}_j(\overline{\overline{\mu}}_j)$ — нижняя (верхняя) оценка μ_j. Соотношение (14) наталкивает на мысль искать μ_j в виде

$$\mu_j \approx \beta_j\overline{\mu}_j + (1-\beta_j)\overline{\overline{\mu}}_j,\ j=1, \ldots, n, \tag{15}$$

где $0\leqslant\beta_j\leqslant 1$; при $\beta_j=1$ ($\beta_j=0$) имеем крайние точки отрезка.

Для определения коэффициентов β_j может быть использована межотраслевая таблица-аналог. Сходные черты в структуре производства [10—12 и др.] позволяют надеяться, что найденные таким образом оценки будут близки истинным значениям коэффициентов β_j.

Итак, алгоритм уточнения («подстройки») оценок мультипликаторов конечного спроса включает следующие этапы: вычисление векторов $\overline{\overline{\mu}}$ и $\overline{\mu}$ для межотраслевой таблицы-аналога; расчет «подстроечных» коэффициентов β_j путем решения уравнений (15) относительно β_j на аналоге; определение векторов $\overline{\mu}$ и $\overline{\overline{\mu}}$ для исходной таблицы; выявление искомого вектора μ по (15) с коэффициентами β_j, построенными на таблице-аналоге.

Для вычисления μ и $\bar{\mu}$ могут служить как (11), так и (12), причем последнее применимо лишь для отдельных отраслей с известной структурой затрат

Используя предложенный подход в случае, когда заданы суммы строк $w_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$, $0 \leqslant w_i' < 1$, $i=1, \ldots, n$, матрицы A, можно получить ряд двойственных оценок. Например, оценка (11) переходит в

$$1 + w_i'/\alpha_1' \leqslant \mu_i' \leqslant 1 + w_i'/\alpha_2', \; i = 1, \; \ldots, \; n, \tag{16}$$

а (12) в

$$1 + w_i' + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} w_j'/\alpha_1' \leqslant \mu_i' \leqslant 1 + w_i' + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} w_j'/\alpha_2', \; i = 1, \; \ldots, \; n, \tag{17}$$

где $\mu_i' = \sum_{j=1}^{n} q_{ij}$, $\alpha_1' = 1 - \min_i w_i'$, $\alpha_2' = 1 - \max_i w_i'$.

Справедливость соотношений (16) и (17) легко доказывается, если учесть, что $\mu' = A\mu' + e$, и теоремы 1 и 2 верны также для $z = Az + d$ (именно в таком виде они сформулированы в [7, 8]).

Оценки (16), (17) далее не используются, поскольку величины w_i', во-первых, не имеют в рамках межотраслевого баланса четкой экономической интерпретации, во-вторых, не могут быть определены без знания всей строки коэффициентов a_{ij} и, в-третьих, условие $w_i' < 1$, $i=1, \ldots, n$, для матрицы A, как правило, не выполняется. В качестве возможных приложений (16) и (17) укажем марковскую модель движения трудовых ресурсов [13, с. 298].

4. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Для эмпирической проверки точности предложенных оценок была использована межотраслевая таблица для Латвийской ССР за 1966 г. [14], в качестве аналога выступала межотраслевая таблица этого же региона за 1961 г. Сравнивалось семь методов

Результаты оценивания мультипликаторов конечного спроса

Отрасли	Истинные значения μ_j	Относительная ошибка (в %) по методам						
		1	2	3	4	5	6	7
Черная и цветная металлургия	1,9063	0,78	0,51	1,43	0,82	0,26	77,09	3,29
Топливная промышленность	1,3937	6,37	1,84	0,64	1,13	0,44	77,89	2,61
Электроэнергетика	1,3025	4,29	2,05	1,61	1,34	0,48	108,39	2,21
Машиностроение	1,5253	2,37	0,91	0,79	0,71	0,28	63,81	1,03
Химическая промышленность	1,6662	1,17	1,00	1,26	0,77	0,53	70,37	0,95
Лесная, деревообрабатывающая и целлюлозно-бумажная промышленность	1,6446	3,33	3,46	1,01	1,16	1,05	73,88	1,37
Промышленность строительных материалов	1,5984	5,86	1,75	1,59	1,24	0,63	141,35	2,46
Легкая промышленность	1,7401	0,80	3,11	0,72	0,52	1,24	42,04	1,23
Пищевая промышленность	1,8319	4,56	3,46	2,26	1,96	1,08	126,10	3,37
Прочие отрасли промышленности	1,5497	3,02	1,96	1,80	1,14	0,59	136,43	0,22
Строительство	1,6056	1,85	2,72	2,46	1,53	0,62	151,53	1,56
Сельское хозяйство	1,3942	4,97	1,86	0,52	1,21	0,56	39,55	0,38
Транспорт и связь	1,2524	2,98	1,12	1,02	0,86	0,24	84,17	0,99
Сфера обращения	1,1428	0,86	0,86	0,50	0,43	0,33	51,37	0,04
Прочие отрасли материального производства	1,2586	3,55	1,47	0,69	0,51	0,45	94,71	1,78
Средняя абсолютная ошибка, %		3,11	1,87	1,92	1,22	0,59	89,25	1,57

построения оценок мультипликаторов конечного спроса: 1 — по формуле (2) [1]; 2 — по (15), где $\bar{\mu}$ и $\bar{\bar{\mu}}$ определяются из (11), β_j оцениваются по таблице-аналогу; 3 — по формуле (3) [2]; 4 — по (13); 5 — по (15), где $\bar{\mu}$ и $\bar{\bar{\mu}}$ рассчитываются из (12), β_j оцениваются по таблице-аналогу; 6 — по (4) [3]; 7 — по (5) [4]. Методы 2, 4 и 5 предложены нами.

Результаты расчетов представлены в таблице. По мере увеличения объема исходных данных уменьшается средняя абсолютная ошибка расчета: с 3,11% для оценки по методу 1 до 0,59% для метода 5, основанного на информации о столбцах матрицы A с соответствующей «подстройкой».

В строгом смысле, из семи рассмотренных полностью сопоставимы лишь методы 3 и 4, 6 и 7, так как только они используют идентичную информацию. Метод 4 дает в среднем более точную оценку мультипликаторов конечного спроса по сравнению с методом 3, причем только для трех отраслей его относительная ошибка больше. Крупная средняя ошибка метода 6 (89,25%) ставит под серьезное сомнение целесообразность его применения для расчета мультипликаторов конечного спроса.

«Подстройка» уменьшает среднюю абсолютную ошибку приблизительно в 1,7 раза (методы 1 и 4 сравниваются соответственно с 2 и 5). Это естественно, поскольку, во-первых, при «подстройке» привлекается дополнительная информация, во-вторых, при замене, например, формулы (1) на (2) теряется часть информации.

Как видно из таблицы, задание вектора w позволяет с приемлемой точностью вычислять мультипликаторы конечного спроса. Если же дополнительно известна структура затрат некоторой отрасли j, то эта информация обеспечивает практически точный расчет соответствующего μ_j.

Таким образом, использование полученных оценок в сочетании с методом «подстройки» является достаточно эффективным средством оценивания мультипликаторов конечного спроса.

5. РАЗВИТИЕ МЕТОДА

Предложенный подход дает возможность также получить оценки для элементов матрицы полных материальных затрат. Действительно, рассмотрим уравнение

$$z^k = z^k A + d^k, \tag{18}$$

где d^k — вектор, у которого все координаты нулевые, кроме k-й, равной единице. Из определения матрицы полных материальных затрат имеем следующее соотношение, связывающее коэффициенты полных материальных затрат с решением уравнения (18)

$$q_{kj} = z_j^k,\ k,\ j = 1,\ \ldots,\ n, \tag{19}$$

где z_j^k — координата j вектора z^k, определяемого из (18).

При заданной матрице A, решая n раз (для всех $k=1, \ldots, n$) систему уравнений (18), можно вычислить все коэффициенты полных материальных затрат. Однако, по предположению, в A известны лишь суммы столбцов w_j, $j=1, \ldots, n$; тем не менее, применяя теоремы 1 и 2 (которые, очевидно, для (18) верны), можно рассчитать для каждого k, $k=1, \ldots, n$, нижнюю и верхнюю оценки решения (18). Последние в силу (19) задают нижние и верхние оценки элементов матрицы полных материальных затрат.

Простейшие соотношения имеют вид

$$\delta_{kj} \leqslant q_{kj} \leqslant \delta_{kj} + w_j/(1-w_k),\ k,\ j=1, \ldots, n, \tag{20}$$

где δ_{kj} — символ Кронекера.

Используя дополнительную информацию о матрице A, можно улучшить оценки (20). Например, неравенства

$$\delta_{kj} + a_{kj} \leqslant q_{kj} \leqslant \delta_{kj} + a_{kj} + \sum_{i=1}^{n} a_{ij} w_i/(1 - w_k),\ k,\ j = 1,\ \ldots,\ n,$$

позволяют оценивать элементы q_{kj}, для которых известен соответствующий столбец A.

Нижняя оценка коэффициентов полных материальных затрат может быть улучшена, если известны соответствующие диагональные коэффициенты прямых материальных затрат [15]

$$\delta_{kj} + a_{kj}/(1-a_{kk}) \leqslant q_{kj},\ k,\ j=1,\ \ldots,\ n. \tag{21}$$

Формула (21), очевидно, особенно эффективна для строк k, соответствующих отраслям с высокой долей внутриотраслевого оборота.

Как и в разд. 3, точечная оценка коэффициентов полных материальных затрат может быть получена методом «подстройки». Например, на основе (20) имеем

$$q_{kj} \approx \delta_{kj} + (1-\beta_{kj}) w_j/(1-w_k),\ k,\ j=1, \ldots, n,$$

где β_{kj} — «подстроечные» коэффициенты, вычисленные на межотраслевой таблице-аналоге.

Заметим, что таким же образом можно рассчитать оценки коэффициентов полных материальных затрат по заданным суммам строк w_i', $i=1, \ldots, n$, матрицы A. Тогда, например, (20) примет вид $\delta_{kj} \leqslant q_{kj} \leqslant \delta_{kj} + w_k'/(1-w_j')$, k, $j=1, \ldots, n$.

Схема доказательства аналогична рассуждениям, проведенным относительно соотношений (16), (17). В качестве возможных приложений еще раз отметим задачу оценки параметров марковской модели движения трудовых ресурсов [13, с. 298].

Автор признателен Э. Ф. Баранову, Э. Б. Ершову и М. Д. Самознаеву за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Burford R. L., Katz J. L.* A Method of Estimation of Input-Output Type Output Multipliers when no *I—O* Model Exists//J. Region. Sci. 1981. V. 21. № 2.
2. *Katz J. L., Burgford R. L.* The Estimation of Input-Output Type Output Multipliers when no *I—O* Model Exists: A Reply//J. Region. Sci. 1982. V. 22. № 3.
3. *Phibbs P. J., Holsman A. J.* A Shortcut Method for Computing Final Demand Multipliers for Small Regions//Environment and Planning A. 1980. V. 12. № 9.
4. *Katz J. L.* A Shortcut Method for Computing Final Demand Multipliers for Small Regions: Comment//Environment and Planning A. 1983. V. 15. № 4.
5. *Phibbs P. J., Holsman A. J.* A Reply to Katz's Comment//Environment and Planning A. 1983. V. 15. № 4.
6. *Harrigan F. J.* The Estimation of Input-Output Type Output Multipliers when no Input-Output Model Exists: A Comment//J. Region. Sci. 1982. V. 22. № 3.
7. *Красносельский М. А.* Положительные решения операторных уравнений. М.: Физматгиз, 1962.
8. *Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П., Рутицкий Я. Б., Стеценко В. Я.* Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука, 1969.
9. *Воропанов С. А.* Об одном подходе к определению коэффициентов полных материальных затрат//Математическое моделирование экономических систем. Вып. 15. Душанбе: НИИЭММП с ВЦ Госплана ТаджССР, 1979.
10. *Simpson D., Tsukui J.* The Fundamental Structure of Input-Output Tables, an International Comparison//Rev. Econ. and Stat. 1965. V. XLVII. № 4.
11. *Chenery H. B., Watanabe Ts.* International Comparison of the Structure of Production//Econometrica. 1958. V. 26. № 4.
12. *Augustionovics M.* Methods of International and Intertemporal Comparison of Structure//Contributions to Input-Output Analysis. V. 1. Amsterdam; N. Y., 1970.
13. Система моделей народнохозяйственного планирования. М.: Наука, 1982.
14. Динамика межотраслевых и межреспубликанских экономических связей Латвийской ССР. Сб. статистических материалов. Рига, 1971.
15. *Воропанов С. А.* Математические методы межотраслевого анализа в условиях минимума информации. М.: ЦЭМИ АН СССР, 1984.

Поступила в редакцию
11 V 1983