

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

ОПТИМАЛЬНАЯ СТРАТЕГИЯ ПРОИЗВОДСТВА ПРОДУКТА ДЛИТЕЛЬНОГО ПОЛЬЗОВАНИЯ

Лебедев С.С., Мовшович С.М.

(Москва)

В статье предлагается модель реализации перспективных направлений НТП в сфере материального производства. Рассматривается процесс создания производства нового товара длительного пользования. Модель позволяет прежде всего оценить, какая информация необходима для ее реализации. Она также дает возможность выбрать рациональную стратегию развития новой отрасли в зависимости от доступных ресурсов, оценить вклад ПН в общественное благосостояние.

Целью определения перспективных направлений научно-технического прогресса (ПН НТП) является отбор важнейших с точки зрения среднесрочных и долгосрочных общественных интересов направлений НТП для оказания государственной поддержки и стимулирования их успешной реализации в условиях ограниченности научно-технических и материальных ресурсов. Выбор ПН осуществляется на различных этапах реализации НТП, и на каждом из них требуется разработка своего инструментария для оценки и сравнения возможных путей развития. Будем различать этапы фундаментальных и прикладных научных исследований, конструкторских и технологических разработок и, наконец, внедрения в соответствующую область народного хозяйства. На каждом этапе ПН определяются на основе информации, выработанной на предыдущих этапах, и оценки имеющихся ресурсов. Наиболее сложен выбор ПН на первом этапе исследований, где он требует экспертизы ученых высокой квалификации. По существу это не является научной задачей. Выбор ПН на последнем этапе практической реализации принципиально наиболее прост. Он может опираться на достаточно надежную информацию о затратах и результатах, связанных с реализацией каждого направления НТП (на этом этапе реализация ПН сводится к осуществлению конкретных крупномасштабных мероприятий). С другой стороны, в процесс реализации вовлекаются огромные материальные ресурсы. Поэтому при наличии альтернативных направлений научно-технического развития необходима достаточно точная оценка их последствий. Естественным инструментом такой оценки являются экономико-математические модели.

Здесь будет рассмотрена ситуация, когда реализация ПН НТП направлена на создание нового типа конечного продукта, предназначенного для удовлетворения потребностей населения, ранее не проявлявшихся и неудовлетворяемых. Историческими примерами таких ПН могут быть производство и внедрение в повседневный быт телевизоров, персональных компьютеров, а еще раньше электроламп и т. п. Процесс реализации подобных ПН связан, как правило, с созданием одной или нескольких новых отраслей промышленности: основной (собственно для производства нового продукта) и нескольких вспомогательных для производства оборудования, комплектующих и т. д.

Рассмотрим полностью монополизированный рынок, что, по-видимому, имеет место

в начальном периоде развития новых отраслей, когда действует патентная защита новых продуктов и технологий.

На этом шаге определяется экономический эффект ПН или его вклад в общественное благосостояние. Первый в соответствии с [1] определяется как разность дисконтированных результатов (доходов) и затрат, т. е. как суммарная приведенная прибыль производителей.

Рассмотрим простейший вариант модели. Пусть процесс реализации ПН заключается в создании и развитии новой отрасли промышленности, производящей новый товар длительного пользования. Предполагается, что при создании и функционировании отрасли используются существующие ресурсы и продукты.

Текущие издержки отрасли включают две части: постоянную, пропорциональную объему мощностей (производственных фондов) и переменную, пропорциональную выпуску. Обе они могут изменяться с течением времени. Предполагается также, что объем производства ограничен в каждом году мощностями. Ввод новых мощностей лимитирован ограниченными возможностями привлечения инвестиционных ресурсов.

Помимо мощностей объем годового производства ограничен текущим спросом на новый продукт (предполагается, что запасы не создаются). Для определения спроса понадобятся следующие две нетрадиционные гипотезы. Во-первых, будем предполагать, что новый продукт и новые производственные мощности имеют конечные сроки службы, которые отражаются в модели заданием постоянных коэффициентов выбытия. Во-вторых, наиболее сильным является предположение о том, что известна функция спроса на новый продукт. Это предположение нуждается в пояснениях. От каких факторов зависит планируемый потребителями объем покупок в каждом периоде? Если допустить, что, принимая решение о покупке, они не учитывают ожидаемых в будущем цен [2], то спрос в каждом периоде зависит от времени (номера периода), текущей и предшествующих цен.

Пусть $q(p, t) = f(t)q(p)$ — количество продукта, которое население готово приобрести в периоде t (рассматриваем дискретное время), если цена продукта в этом периоде равна p и в начале периода ни у кого этого продукта не было. Назовем $q(p, t)$ — исходной (базовой) функцией спроса и предположим, что она известна, а $f(t)$ — возрастающая функция. Построим теперь оценку фактического (т. е. с учетом сделанных ранее покупок) спроса в периоде t как функции t и цен p_t, p_{t-1} . Пусть γ — коэффициент годового выбытия нового продукта (т. е. средний срок его службы равен $\sum_{t=1}^{\infty} t(1 - \gamma)^{t-1} = \gamma^{-2}$). Введем функцию $s_k(p, t)$ — количество продукта, находящегося в период k в пользовании той части населения, которая в период $t, t > k$, готова купить продукт по цене p . Фактический спрос D в период t является функцией $p_1^t = (p_1, \dots, p_t)$ и может быть представлен в форме

$$D_t(p_1^t) = f(t)q(p_t) - (1 - \gamma)s_{t-1}(p_t, t). \quad (1)$$

Вместо того чтобы строить рекуррентные соотношения для функции $s_t(p, t)$, оценим фактический спрос приближенно. Будем считать, что при любом p часть населения, готовая купить новый продукт по цене $p' \leq p$ в период t , купит его по той же цене и в последующие периоды t , т. е. расширение спроса происходит только за счет вовлечения на рынок нового продукта новых групп населения, ранее не предъявлявших спроса ни при каких ценах. В этом предположении, если цены падают, т. е. $p_t \geq p_{t-1} \geq p_t \forall t \leq t-1$, то $s_{t-1}(p_t, t) = f(t-1)q(p_{t-1})$. Поскольку возрастание цены также возможно, положим приближенно

$$D_t(p_1^t) \approx f(t)q(p_t) - (1 - \gamma)f(t-1) \min \{q(p_t), q(p_{t-1})\}. \quad (2)$$

Введем следующие обозначения: $M(t)$ — максимально возможный выпуск нового продукта (мощность новой отрасли) в году t ; ρ — коэффициент годового выбытия производственных фондов новой отрасли; $k(t)$ — объем ввода новых мощностей в году t (действуют начиная с $t+1$). Величина $k(t)$ принимает дискретные значения из

множества $\overline{K(t)}$, содержащего нуль; максимальный его элемент определяется лимитированностью инвестиционных ресурсов.

Возможная динамика развития отрасли ограничивается соотношениями

$$M(t) = (1 - \rho)M(t-1) + k(t-1), \quad t = 1, \dots, T, \quad (3)$$

$$k(t) \in \overline{K(t)}, \quad t = 0, \dots, T-1. \quad (4)$$

Кроме того, $M(0) = 0$.

Положим $q_t = f(t)q(p_t)$. Пусть $q(p)$ — строго монотонная функция. Тогда существует обратная и $p_t = g\left(\frac{q_t}{f(t)}\right) \equiv g_t(q_t)$. При этом в силу (2) фактический спрос равен

$$D_t(p_t^*) = q_t - (1 - \gamma) \min \left\{ q_{t-1}, \frac{f(t-1)}{f(t)} q_t \right\}.$$

Фактический спрос не превосходит текущих возможностей выпуска, поскольку в противном случае его реализация не превосходит $M(t)$ и цену p_t можно поднять, снижая спрос до уровня $M(t)$. Поэтому при оптимальном выборе цен производителем, заинтересованным в максимизации прибыли, должно выполняться соотношение

$$D_t \equiv q_t - (1 - \gamma) \min \left\{ q_{t-1}, \frac{f(t-1)}{f(t)} q_t \right\} \leq M(t), \quad t = 1, \dots, T, \quad q_0 = 0. \quad (5)$$

Выбор оптимальной стратегии реализации ПН при производстве нового продукта, а также оценка его вклада с точки зрения производителей, защищенных патентами, определяется из решения задачи

$$\begin{aligned} & \sum_{t=1}^T \lambda^{-t} [(g_t(q_t) - v(t))(q_t - (1 - \gamma) \min \left\{ q_{t-1}, \frac{f(t-1)}{f(t)} q_t \right\}) - \\ & - c(t)M(t) - r(t)k(t)] - r(0)k(0) - z \rightarrow \max \end{aligned} \quad (6)$$

при условиях (3)–(5). Здесь λ — дисконт; $v(t)$ — переменная часть удельных текущих издержек, предполагается, что они зависят от времени, но не от объема производства, хотя могут быть рассмотрены различные другие зависимости; $c(t)$ — условно постоянные затраты на единицу производственных мощностей отрасли; $r(t)$ — стоимость набора инвестиционных ресурсов, затрачиваемых в году t для ввода единицы производственных мощностей; z — суммарные затраты на исследования и подготовку производства, предстоящие с момента принятия решения и до начала планового периода, приведенные к началу. Эти затраты не оказывают влияния (если они фиксированы) на выбор стратегии развития отрасли и динамику цен, но их учет существен для оценки вклада ПН в общественное благосостояние.

В задаче (3)–(6) искомыми являются q_t , $k(t)$, $M(t)$ и p_t .

Рассмотрим более детально частный случай задачи (3)–(6), в котором определяется оптимальная мощность M , вводимая в начале производственного периода и в дальнейшем уже не меняющаяся, т. е. $M(t) \equiv M$, $t = 1, \dots, T$. Функция спроса предполагается линейной: $g_t(q_t) = g_0 - bq_t$, а $v(t) = v$, $f(t) = f_0$, $t = 1, \dots, T$. Тогда в предположении, что цены со временем не возрастают (эта гипотеза подтверждается ниже)

$$\min \left\{ q_{t-1}, \frac{f(t-1)}{f(t)} q_t \right\} = q_{t-1},$$

и задача заключается в максимизации по q_t , M функции (нетрудно проверить ее вогнутость)

$$\sum_{t=1}^T \lambda^{-t} (a - bq_t)(q_t - (1 - \gamma)q_{t-1}) - kM \quad (7)$$

при ограничениях

$$q_t - (1 - \gamma)q_{t-1} \leq M, \quad t = 1, \dots, T, \quad q_0 = 0, \quad (8)$$

где $a = g_0 - v$, k — удельные капитальные вложения. (Переменные q_t и M должны быть неотрицательными, но q_t монотонно возрастают, так что эти условия можно не выписывать.)

Относительная простота задачи (7)–(8) позволяет исследовать качественную структуру ее оптимальных решений и построить не очень сложный алгоритм ее решения.

Выпишем для задачи (7)–(8) условия оптимальности Куна–Таккера

$$\frac{\lambda + \gamma - 1}{\lambda} a + (1 - \gamma) b q_{t-1} - 2b q_t + \frac{1 - \gamma}{\lambda} b q_{t+1} = u_t - \frac{1 - \gamma}{\lambda} u_{t+1}, \quad t = 1, \dots, T-1, \quad (9)$$

$$a + (1 - \gamma) b q_{T-1} - 2b q_T = u_T, \quad (10)$$

$$u_t \geq 0; \quad u_t = 0, \text{ если } q_t - (1 - \gamma) q_{t-1} < M, \quad t = 1, \dots, T, \quad (11)$$

$$\sum_{t=1}^T \lambda^{-t} u_t = k. \quad (12)$$

Здесь u_t , $t = 1, \dots, T$ — множители Лагранжа, соответствующие ограничениям (8); условие (12) соответствует равенству нулю частной производной функции Лагранжа по M .

Рассмотрим последовательность q_t^L , $t = 1, 2, \dots$, задаваемую формулами (9). Докажем для нее ряд утверждений.

Пусть

$$q^* = \frac{\lambda + \gamma - 1}{\lambda \gamma + \lambda + \gamma - 1} \frac{a}{b}$$

и $q_t = q^* + y_t$. Поскольку

$$q^* = \frac{2\lambda}{1 - \gamma} q^* - \lambda q^* - \frac{\lambda + \gamma - 1}{1 - \gamma} \frac{a}{b},$$

т. е. q^* — оптимальный стационарный план, если $q_0 = q^*$, $M = \gamma q^*$, то

$$y_{t+1} = \frac{2\lambda}{1 - \gamma} y_t - \lambda y_{t-1}. \quad (13)$$

Предложение 1. Пусть $y_{t-1} < 0$, $y_t > 0$. Тогда $y_{t+1} > y_t$.

Действительно, ($\lambda > 1$, $0 < \gamma < 1$)

$$y_{t+1} = \left(\frac{2\lambda}{1 - \gamma} - \lambda \right) y_t + \lambda (y_t - y_{t-1}) > \frac{\lambda(1 + \gamma)}{1 - \gamma} y_t > y_t.$$

Предложение 2. Пусть $q_t > q_{t-1} \geq q^*$. Тогда $q_{t+1} > q_t$ и $q_{t+1} - q_t > q_t - q_{t-1}$.

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} q_{t+1} - q_t &> \left(\frac{2\lambda}{1 - \gamma} - 1 \right) q_t - \lambda q_t - \frac{\lambda + \gamma - 1}{1 - \gamma} \frac{a}{b} > \frac{\lambda \gamma + \lambda + \gamma - 1}{1 - \gamma} q^* - \\ &- \frac{\lambda + \gamma - 1}{1 - \gamma} \frac{a}{b} = 0 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} q_{t+1} - q_t &= \frac{2\lambda + \gamma - 1}{1 - \gamma} (q_t - q_{t-1}) + \frac{\lambda \gamma + \lambda + \gamma - 1}{1 - \gamma} q_{t-1} - \\ &- \frac{\lambda + \gamma - 1}{1 - \gamma} \frac{a}{b} > q_t - q_{t-1}, \end{aligned}$$

так как $\frac{2\lambda + \gamma - 1}{1 - \gamma} > 1$.

Предложение 3. Пусть $q_t < q_{t-1} \leq q^*$. Тогда $q_{t+1} < q_t$ и $q_t - q_{t+1} < q_{t-1} - q_t$.

Доказывается аналогично предложению 2.

Рассмотрим теперь решение системы (13) при $T = \infty$. Будем искать его в виде

$$y_t = y_0 z^t, \quad t = 1, 2, \dots$$

Из (13) получаем

$$z^2 - \frac{2\lambda}{1-\gamma} z + \lambda = 0,$$

откуда

$$z_1 = \frac{\lambda}{1-\gamma} + \sqrt{\frac{\lambda^2}{(1-\gamma)^2} - \lambda} > 1, \quad z_2 = \frac{\lambda}{1-\gamma} - \sqrt{\frac{\lambda^2}{(1-\gamma)^2} - \lambda}, \quad 0 < z_2 < 1.$$

Из предложения 1 для $t = 1$ и предположения, что $y_1 > 0$, следует $y_2 > y_1 > 0$. Тогда по предложению 2 $q_{t+1} > q_t$ и $q_{t+1} - q_t > q_t - q_{t-1}$, т. е. последовательность q_t выпукла. Этому соответствует решение (13) $y_t = y_1 z_1^{t-1}$. Анализ этого случая (который здесь из-за его громоздкости не приводится) показывает, что он возможен лишь при нереальных значениях параметров (в частности, $\gamma > 1$). Поэтому можно считать, что

$$q_t^L = q^* + y_t, \quad y_t = y_0 z_2^t, \quad 0 < z_2 < 1, \quad y_0 < 0. \quad (14)$$

Таким образом, последовательность q_t^L сходится к стационарному решению q^* , оставаясь все время ниже q^* . Это имеет место при $T = \infty$. При конечных, но достаточно больших T качественная картина не меняется, однако вместо (14) надо пользоваться иными формулами, к выводу которых мы переходим. Включим теперь в рассмотрение и ограничения (8).

Из (8), выполняемых в виде равенств, находим

$$q_t^M = \frac{1 - (1-\gamma)^t}{\gamma} M, \quad t = 1, 2, \dots \quad (15)$$

Рассмотрим кусочно-линейные функции $q^M(t)$ и $q_t^L(t)$, определяемые соответственно по (15) при $t = 1, \dots, T$ и по (14) при $t = \tau + 1, \dots, T$, $y_0 \equiv y_\tau = q_\tau^M - q^* < 0$, а в промежуточных точках задаваемые линейной интерполяцией. Эти функции вогнуты и $q^M(\tau) = q_\tau^L(\tau)$. Если при $t > \tau$ эти функции пересекаются, то они либо пересекаются в одной точке, либо совпадают на одном из их отрезков линейности. Если $\gamma^{-1}M > q^*$, то при достаточно больших t $q^M(t) > q^*$ и, следовательно, если $q_1^M > q_1^L$, то $q^M(t)$ и $q_0^L(t)$ обязаны пересечься при некотором $t > 0$. Таким образом, оптимальное решение задачи для $T = \infty$ устроено следующим образом. До некоторого τ условия (8) выполняются в виде равенств, так что $q_t = q_t^M$, $t = 1, \dots, \tau$. Для $t > \tau$ q_t вычисляются по формулам (9) при $u_t = 0$, $t = \tau + 1, T$. Момент переключения τ при фиксированном M определяется условиями

$$q_{\tau+1}^M \leq q_\tau^L(\tau+1), \quad t = 1, \tau - 1; \quad q_{\tau+1}^M > q_\tau^L(\tau+1).$$

Рассмотрим теперь задачу (7), (8) для конечного, но достаточно большого T в предположении, что структура оптимального решения при переходе от $T = \infty$ к конечному T сохраняется. Из условий (9) при $q_t = q_t^M$ получаем систему уравнений для определения множителей Лагранжа

$$u_t - \frac{1-\gamma}{\lambda} u_{t+1} = c_t M b + \frac{\lambda + \gamma - 1}{\lambda} a, \quad t = 1, \dots, \tau - 1,$$

где

$$c_t = \frac{1 - \gamma - (1-\gamma)^{t+2}}{\lambda} - \frac{1 + \gamma - (1-\gamma)^t}{\gamma}.$$

Отсюда находим

$$u_t = p_t u_1 - h_t M b + l_t, \quad t = 1, \dots, \tau, \quad (16)$$

$$\text{где } p_2 = \frac{\lambda}{1-\gamma}, \quad h_2 = \frac{\lambda c_1}{1-\gamma}, \quad l_2 = -\frac{\lambda + \gamma - 1}{1-\gamma} a,$$

а для $t > 1$

$$p_{t+1} = \frac{\lambda}{1-\gamma} p_t, \quad h_{t+1} = \frac{\lambda}{1-\gamma} (h_t + c_t), \quad l_{t+1} = \frac{\lambda}{1-\gamma} l_t.$$

Из условий (9) при $t \geq \tau$ находим

$$q_t = \alpha_t \frac{a}{b} + \beta_t M + \xi_t u_1, \quad (17)$$

где $\alpha_\tau = 0$, $\beta_\tau = \gamma^{-1}(1 - (1-\gamma)^\tau)$, $\xi_\tau = 0$,

$$\alpha_{\tau+1} = -\frac{\lambda + \gamma + 1}{1-\gamma} \frac{a}{b}, \quad \beta_{\tau+1} = \frac{\lambda}{1-\gamma} \left(\frac{3\gamma - 1}{\gamma} - h_\tau - \frac{2\gamma - 1}{\gamma} (1-\gamma)^\tau \right),$$

$$\xi_{\tau+1} = \frac{\lambda p_\tau}{(1-\gamma)b},$$

а для $t = \tau + 1, \dots, T - 1$

$$\alpha_{t+1} = \frac{2\lambda}{1-\gamma} \alpha_t - \lambda \alpha_{t-1} - \frac{\lambda + \gamma - 1}{1-\gamma},$$

$$\beta_{t+1} = \frac{2\lambda}{1-\gamma} \beta_t - \lambda \beta_{t-1},$$

$$\xi_{t+1} = \frac{2\lambda}{1-\gamma} \xi_t - \lambda \xi_{t-1}.$$

Из условия (12), используя (17), выразим M в виде линейной функции от u_1 .

В случае $\tau = 0$ все $u_t = 0$, $t = 1, \dots, T$. При этом из (9) находим

$$q_t = r_t q_1 - s_t \frac{a}{b}, \quad t = 1, \dots, T, \quad (18)$$

где $r_1 = 1$, $s_1 = 0$, $r_2 = \frac{2\lambda}{1-\gamma}$, $s_2 = \frac{\lambda + \gamma - 1}{1-\gamma}$, а для $t = 2, \dots, T - 1$

$$r_{t+1} = \frac{2\lambda}{1-\gamma} r_t - \lambda r_{t-1},$$

$$s_{t+1} = \frac{2\lambda}{1-\gamma} s_t - \lambda s_{t-1} + \frac{\lambda + \gamma - 1}{1-\gamma}.$$

Итак, во всех случаях все переменные выражаются в виде линейных функций (от u_1 или q_1). До сих пор не было еще использовано условие оптимальности (10), получаемое из равенства нулю частной производной функции Лагранжа по q_T . Подставляя в это условие выражения для q_T , q_{T-1} по (17) или (18), получим линейное уравнение для вычисления соответственно u_1 или q_1 . После подстановки найденного значения в (16), (17) или (18) получим оптимальное решение задачи.

При различных положительных значениях коэффициента k возможны оптимальные решения $T + 1$ -типа, характеризующиеся моментом τ перехода с траектории, задаваемой формулами (15), на траекторию, определяемую по (17). Последовательное вычисление этих оптимальных решений, при монотонном увеличении параметра k начиная с

$k = 0$, может быть реализовано достаточно просто, так как значительная часть вычислений предыдущей ситуации может быть использована на следующем этапе.

Если T недостаточно велико для того, чтобы структура (переход с q_t^M на q_{t+T}^L) оптимального решения для $T = \infty$ сохранялась для случая конечного T , это будет обнаружено после вычисления u_t, q_t по (16), (17).

Проведенный анализ позволяет сделать следующие выводы.

Если величина удельной капиталоемкости k достаточно велика, оптимальное значение производственной мощности M не превосходит γq^* . В оптимальном плане мощности используются полностью в любом периоде t , а оптимальный уровень удовлетворения потребностей $q_t \rightarrow \gamma^{-1} M$. Если удельная капиталоемкость не слишком велика, выбирается уровень мощностей, больший, чем γq^* . При этом в течение периода времени $[0, \tau]$ мощности используются полностью, т. е. $q_t - (1 - \gamma)q_{t-1} = M$. В этом периоде q_t монотонно возрастает. После τ оптимальные мощности оказываются избыточными, q_t , монотонно возрастая, с геометрической скоростью сходится к q^* . При достаточно большом T коэффициент оптимального использования мощностей составляет $\gamma q^*/M$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Канторович Л.В., Богачев В.Н., Макаров В.Л. Об оценке эффективности капитальных затрат // Экономика и мат. методы. 1970. Т. VI. Вып. 6.
2. Gul F., Sonnenschein H., Wilson R. Foundations of Dynamic Monopoly and the Coase Conjecture // J. Econ. Theory. 1986. V. 39. №1.

Поступила в редакцию
16 V 1991