

ВЕКОВОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК ОПТИМАЛЬНОЙ СТРАТЕГИИ СТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ БЕЛЛМАНА

Беленький В.З.

(Москва)

Выписано уравнение, названное "вековым", которому обязаны удовлетворять неподвижные точки оптимальной стратегии стационарного уравнения Беллмана (такие уравнения возникают обычно в задачах экономической динамики). Это необходимое условие позволяет конструктивно находить "претендентов" в конкретных задачах. Приведены примеры.

В макромоделях экономической динамики один из наиболее распространенных подходов — использование принципа оптимальности Беллмана. В задачах с бесконечным горизонтом планирования базовая модель обычно строится в стационарной форме с дисконтированием затрат и эффекта к начальному моменту времени. В общем случае уравнение Беллмана для такой модели имеет вид

$$\Phi(x) = \max_{z \in D(x)} K(\Phi(y), y, x, z), \quad y = T(x, z), \quad x \in X, \quad (1)$$

где x — точка (состояние системы) фазового пространства X ; $D(x)$ — множество управлений; $y = T(x, z)$ — новое состояние, в которое система переходит из состояния x при управлении z ; K — функция-ядро данной модели. Функции K , T и отображение $x \rightarrow D(x)$ считаются заданными, тройка (K, T, D) определяет модель полностью. Решением уравнения (1) являются функция Беллмана Φ и стратегия управления ζ , указывающая для каждого состояния x оптимальный ход

$$\zeta(x) = \arg \max_z K(\Phi(y), y, x, z) \mid y = T(x, z).$$

Точка x_0 называется неподвижной, если оптимальный ход в состоянии x_0 оставляет систему в том же состоянии, т.е. $T(x_0, \zeta(x_0)) = x_0$. Вопрос об отыскании неподвижных точек — один из важнейших при аналитическом исследовании модели (1). Траектория, начинающаяся в той точке, будет оставаться в ней всегда. Важен также вопрос об устойчивости, т.е. будет ли неподвижная точка притягивать к себе близкие траектории; магистраль модели, если она существует, является, очевидно, неподвижной точкой.

Выписанное ниже "вековое" уравнение для неподвижных точек (необходимое условие неподвижности) позволяет в конкретных задачах практически отыскивать "претендентов" и анализировать их. По-видимому, оно используется в той или иной скрытой форме всеми, кто вплотную работает с беллмановскими уравнениями, но нигде в литературе в явной общей форме оно не встречалось.

1. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Если некоторая точка x неподвижна для стратегии управления ζ , то:

а) ход z в точке x вполне определен условием неподвижности $T(x, z) = x$; в предположении, что функция $y = T(x, z)$ обратима по z при каждом фиксированном x , т.е. существует обратная функция

$$z = L(x, y) \iff y = T(x, z), \quad (2)$$

ход z в неподвижной точке однозначно определен формулой

$$z = Z(x) := L(x, x),$$

б) значение функционала $\Phi(x)$ не зависит от стратегии ζ в целом и тоже вполне определяется самой точкой x как решение уравнения относительно формальной переменной v

$$G(v, x) := v - K(v, x, x, Z(x)) = 0; \quad (3)$$

обозначим это значение через $\Psi(x): v = \Psi(x)$.

Введенная таким образом функция Ψ непосредственно вычислима, ее можно считать известной. В общем случае она определена не для всех $x \in X$, а только для таких состояний, которые в принципе (потенциально) могут быть неподвижными (хотя бы для какой-нибудь стратегии), т.е. для таких состояний, в которых "неподвижный" ход $Z(x)$ допустим. Поэтому область определения Ψ есть множество потенциально неподвижных точек

$$S := \{ x \in X \mid Z(x) \in D(x) \}.$$

Итак, если x_0 — неподвижная точка, то $\zeta(x_0) = Z(x_0)$, $\Phi(x_0) = \Psi(x_0)$.

Определение. Назовем точку $x \in S$ регулярной, если неподвижный ход не является граничной точкой множества допустимых управлений, т.е. $Z(x) \in \text{int} D(x)$. Множество регулярных точек обозначим через R .

По естественным соображениям непрерывности R — открытое подмножество в S . Следующее основное предложение дает конструктивное необходимое условие, которому должна удовлетворять регулярная неподвижная точка оптимальной стратегии уравнения Беллмана (1). Это условие позволяет явно (вычислимо) найти "претендентов на неподвижность"; вопрос в том, кто из этих претендентов действительно окажется неподвижной точкой, требует дополнительного анализа в каждой конкретной задаче.

Предложение. Пусть x_0 — регулярная точка, входящая в S вместе с некоторой своей окрестностью $O(x_0)$, тогда справедливы следующие два независимых утверждения.

А. Если для модели (1) выполнено условие а) $\forall x \in O(x_0)$ функция $y = T(x, z)$ допускает обращение (2), то для того, чтобы точка x_0 была неподвижной для оптимальной стратегии ζ , необходимо, чтобы она являлась точкой спектра (множества корней) векового уравнения (относительно x)

$$\frac{\partial K}{\partial v} \left[\frac{\partial K}{\partial x} + \frac{\partial K}{\partial z} \frac{\partial L}{\partial x} \right] + \frac{\partial K}{\partial y} + \frac{\partial K}{\partial z} \frac{\partial L}{\partial y} \bigg|_{\substack{y=x, z=Z(x) \\ v=\Psi(x)}} = 0, \quad (4)$$

при этом $\Phi(x_0) = \Psi(x_0)$

$$\Phi'(x_0) = []|_{x=x_0}, \quad (5)$$

где $[]$ — член в квадратной скобке левой части (4).

Б. Если точка x_0 неподвижна и выполнено условие б) $\forall x \in O(x_0)$ функция $G(v, x)$, определенная в (3), возрастает по v в окрестности значения $v = \Psi(x)$, то $\Phi'(x_0) = \Psi'(x_0)$.

Замечание 1. Во всех известных автору задачах вида (1) условие а) выполняется во всех точках x_0 , подозреваемых на неподвижность; условие б) выполняется в более сильной форме: $G(v, x)$ строго возрастает по v $\forall x \in S$. Спектр уравнения (4) разнообразен: он может оказаться пустым либо, напротив, содержать много (в том числе бесконечное количество) точек; примеры такого рода имеются в [1].

Замечание 2. Вековое уравнение выглядит особенно просто, если в качестве параметра управления выбрать непосредственно новое состояние y . В нашей схеме это всегда возможно в окрестности подозреваемой точки x_0 в силу условия а). Полагая $z := L(x, y)$, запишем (1) в форме

$$\Phi(x) = \max_{y \in \tilde{D}(x)} \tilde{K}(\Phi(y), y, x), \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned}\tilde{K}(v, y, x) &= K(v, y, x, L(x, y)), \\ \tilde{D}(x) &= \{y \in X \mid L(x, y) \in D(x)\}.\end{aligned}\quad (7)$$

Уравнение (6) — частный случай (1), в котором $\tilde{T}(x, z) = z$ и функция $\tilde{K}$ не зависит от z . Соответственно вековое уравнение примет вид

$$\frac{\partial \tilde{K}}{\partial v} \frac{\partial \tilde{K}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{K}}{\partial y} \bigg|_{y=x, v=\Psi(x)} = 0, \quad (8)$$

при этом

$$\Phi'(x_0) = \frac{\partial \tilde{K}}{\partial x} \bigg|_{y=x=x_0, v=\Psi(x_0)}. \quad (9)$$

Хотя теоретически (8) проще, на практике бывает удобнее использовать общее уравнение (4).

Замечание 3. И формулировка и доказательство предложения сохраняют силу для многомерного случая, когда x, y — точки n -мерного пространства (K, Φ, Ψ — скалярные функции, T, L — вектор-функции). Если x, y, z, T, L считать векторами-столбцами, а производную (градиент) — вектор-строкой, то все формулы следует понимать в смысле векторной алгебры.

Замечание 4. Производные могут не существовать в обычном смысле. В этом случае их надо понимать обобщенно: производная в точке есть множество, являющееся выпуклой оболочкой, натянутой на производные в данной точке по всевозможным направлениям. Равенство производных следует понимать как непустоту пересечения соответствующих множеств. Например, (4) означает, что левая часть содержит нуль.

Замечание 5. В предложении предполагается существование решения уравнения (1), но единственности его не требуется.

Доказательство предложения. Сначала докажем утверждение Б. В силу (1) при любом $x \in S$

$$\Phi(x) \geq K(\Phi(y), y, x, z) \big|_{z=Z(x), y=T(x, z)} = K(\Phi(x), x, x, Z(x)),$$

т.е., в терминах функции (3), $G(\Phi(x), x) \geq G(\Psi(x), x)$. Отсюда при $x \in O(x_0)$, согласно условию б), $\Phi(x) \geq \Psi(x)$, причем в точке x_0 достигается равенство. Это означает, что функция $F(x) = \Phi(x) - \Psi(x)$ неотрицательна в $O(x_0)$ и достигает минимума, равно нулю, в точке x_0 , следовательно, $F'(x_0) = 0$, т.е. Б доказано.

Перейдем к А. Запишем уравнение (1) в форме (6), при этом оптимальной стратегией для (6) будет $Y(x) := T(x, \zeta(x))$, где ζ — оптимальная стратегия для (1). Если $x \in R$, то точка $Y(x)$ — внутренняя для области $\tilde{D}(x)$, поэтому должно выполняться условие экстремальности правой части (6), т.е.

$$\frac{\partial \tilde{K}}{\partial v} \Phi'(y) + \frac{\partial \tilde{K}}{\partial y} \bigg|_{y=Y(x), v=\Phi(y)} = 0, \quad x \in R. \quad (10)$$

Кроме того, записав для оптимальной стратегии тождество

$$\Phi(x) \equiv \tilde{K}(\Phi(Y(x)), Y(x), x), \quad x \in X, \quad (11)$$

и продифференцировав его по x , получим с учетом (10)

$$\Phi'(x) = \left[\frac{\partial \tilde{K}}{\partial v} \Phi'(y) + \frac{\partial \tilde{K}}{\partial y} \right] Y'(x) + \frac{\partial \tilde{K}}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{K}}{\partial x} \bigg|_{y=Y(x), v=\Phi(y)}, \quad x \in R. \quad (12)$$

Поскольку $x_0 \in R$, из (12) следует (9). Подставляя теперь (9) снова в (10), при $x = x_0$ получим (8). Тем самым утверждение А в форме (8), (9) доказано. Наконец, (4), (5) эквивалентны (8), (9) в силу (7). Предложение доказано.

2. ПРИМЕРЫ

Идея, лежащая в основе вывода векового уравнения, и сам этот термин уже использовались автором ранее в [1, 2]. Для иллюстрации того, как это уравнение "работает", приведем два примера.

Пример 1 [1]. Рассматривается уравнение Беллмана

$$\Phi(x) = \inf_{z > 0} [Q(x+z) + e^{-2\mu z} \Phi(z)], \quad x \in X: = (0, \infty).$$

Здесь $T(x, z) = z$, $D(x) = (0, \infty) \forall x \in X$,

$$K(v, y, x, z) = Q(x+z) + ve^{-2\mu z}, \quad (13)$$

где $\mu > 0$ — параметр модели; $Q(s)$, $s > 0$ — заданная возрастающая функция, причем $Q(+0) > 0$; то обстоятельство, что в (13) $\inf$, а не $\max$, очевидно, не существенно. Применяя изложенную схему, находим последовательно:

$$1) L(x, y) = y, \quad Z(x) = x;$$

2) множество S потенциально неподвижных точек совпадает со всем пространством X , при этом

$$G(v, x) = (1 - e^{-2\mu x})v - Q(2x),$$

соответственно

$$\Psi(x) = \frac{Q(2x)}{1 - e^{-2\mu x}}, \quad x > 0; \quad (14)$$

3) любая точка $x > 0$ регулярна, выполнены оба условия предложения; вековое уравнение имеет вид

$$(1 + e^{-2\mu x}) Q'(2x) - 2\mu e^{-2\mu x} \Psi(x) = 0, \quad x > 0,$$

или с учетом (14)

$$\frac{Q'(2x)}{Q(2x)} = \frac{\mu}{\text{sh}(2\mu x)}, \quad x > 0. \quad (15)$$

Если, например, функция Q выпукла вниз, то спектр уравнения (15) состоит из единственной точки, которая при этом действительно неподвижна.

Пример 2. Один из вариантов модели оптимального управления процессом перехода от традиционной технологии с неймановским темпом роста $\alpha > 1$ к новой, более прогрессивной технологии с темпом $\alpha_1 > \alpha$ приводит к уравнению

$$\Phi(x) = \max_{(1-x)^+ \leq z \leq 1} \mu \{ z^2 \Phi(y) + z(1-z)y \}, \quad x \in X: = [0, \infty),$$

$$y = T(x, z): = \alpha \left(1 + \frac{x-1}{z} \right), \quad \mu: = \alpha_1^{-1}, \quad \mu\alpha < 1.$$

В этом примере $D(x) = [(1-x)^+, 1]$, где $s^+ := \max(0, s)$,

$$K(v, y, x, z) = \mu [z^2 v + z(1-z)y].$$

Находим

$$1) L(x, y) = \alpha \frac{1-x}{\alpha-y}, \quad Z(x) = \alpha \frac{1-x}{\alpha-x},$$

2) множество S задается условиями

$$S = \left\{ x \geq 0 \mid (1-x)^+ \leq \frac{\alpha(1-x)}{\alpha-x} \leq 1 \right\} = [0, 1].$$

При этом

$$G(v, x) = v(1 - \mu z^2) - \mu z(1 - z)x \Big|_{z=Z(x)},$$

соответственно

$$\Psi(x) = \frac{\mu z(1 - z)x}{1 - \mu z^2} \Big|_{z=Z(x)}, \quad x \in [0, 1];$$

3) множество R регулярных точек есть открытый интервал $(0, 1)$ и выполнены условия предложения; вековое уравнение имеет вид

$$\frac{z}{\alpha - x} (1 - \mu \alpha z) (2vz + (1 - 2z)x) + z(1 - z) \Big|_{z=Z(x), v=\Psi(x)} = 0.$$

После преобразований оно приводится к кубическому уравнению относительно z

$$\alpha \mu^2 z^3 - \mu(\alpha + 2)z^2 + (2 + \alpha \mu)z - \alpha = 0,$$

имеющему корни

$$z_1 = \frac{1}{\mu}, \quad z_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - \mu \alpha^2}}{\mu \alpha} \quad (\text{если } \mu \alpha^2 \leq 1).$$

Корень z_1 — побочный, так как $z_1 > 1$, и поэтому недопустим, то же относится к корню z_2 , если он существует. Следовательно, если $\mu \alpha^2 > 1$, неподвижных точек нет, если же $\mu \alpha^2 \leq 1$, то должно быть

$$z_3 = \frac{1 - \sqrt{1 - \mu \alpha^2}}{\mu \alpha} < 1 \Leftrightarrow 1 - \mu \alpha^2 > (\alpha - 1)^2.$$

Таким образом, неподвижная точка может быть лишь в том случае, когда параметры модели удовлетворяют соотношению

$$(\alpha - 1)^2 < 1 - \mu \alpha^2, \quad 1 < \alpha < \alpha_1, \quad \mu = \alpha_1^{-1},$$

при этом корню $z_3 = Z(x_0)$ отвечает точка

$$x_0 = \alpha \frac{1 - z}{\alpha - z} \Big|_{z=z_3} = 1 - \frac{\alpha - 1}{\sqrt{1 - \mu \alpha^2}} \in (0, 1). \quad (16)$$

Дополнительный анализ показывает, что точка x_0 действительно неподвижная.

3. КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Пусть x_0 — неподвижная точка оптимальной стратегии ξ . Рассмотрим вопрос об устойчивости переходного отображения

$$Y(x) = T(x, \xi(x)), \quad x \in X,$$

в окрестности точки x_0 . Отображение Y локально устойчиво и точка x_0 — притягивающая, если в ее окрестности выполняется неравенство

$$|Y(x) - x_0| < |x - x_0|. \quad (17)$$

Но

$$|Y(x) - x_0| = |Y(x) - Y(x_0)| = |Y'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)|,$$

поэтому (17) будет выполняться, если

$$|Y'(x_0)| < 1. \quad (18)$$

Условие (18) достаточно для локальной устойчивости, оно немного сильнее необходимого условия $|Y'(x_0)| \leq 1$.

Значение $Y'(x_0)$ вместе с $\Phi''(x_0)$ могут быть вычислены из системы двух уравнений, получающихся дифференцированием по x тождеств (в R) (10), (12)

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dx} \left\{ \left(\frac{\partial \tilde{K}}{\partial v} \Phi'(y) + \frac{\partial \tilde{K}}{\partial y} \right) \right|_{y=Y(x), v=\Phi(y)} \right\} &= 0 \\ \Phi''(x) &= \frac{d}{dx} \left\{ \frac{\partial \tilde{K}}{\partial x} \right|_{y=Y(x), v=\Phi(y)} \right\} \end{aligned} \right|_{x=x_0}$$

В этих уравнениях в точке $x = x_0$ все аргументы известны: $y = x = x_0$, $v = \Psi(x_0)$, известно также и значение $\Phi(x_0)$ (см. (5)), поэтому $Y'(x_0)$ и $\Phi''(x_0)$ могут быть вычислены (для $Y'(x_0)$ получается квадратное уравнение).

Замечание. Если обозначить $H(x, y) = \tilde{K}(\Phi(y), y, x)$, то система двух тождеств (11), (10)

$$\begin{cases} \Phi(x) \equiv H(x, Y(x)), \\ \frac{\partial H}{\partial y}(x, Y(x)) \equiv 0, \quad x \in R, \end{cases}$$

будучи продифференцирована n раз, дает возможность рекуррентным образом вычислить значения производных $\Phi^{(k)}(x_0)$, $Y^{(k-1)}(x_0)$ до порядка $k = n$ включительно.

В примере 1 при функции Q , выпуклой вверх, неподвижная точка устойчива; в примере 2 точка (16) неустойчива.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бельский В.З. Оптимальное развитие производства при стационарно растущем спросе // Экономика и мат. методы. 1979. Т. XV. Вып. 4.
2. Бельский В.З. Неймановский стационарный рост системы с пороговой затратной характеристикой // Экономика и мат. методы. 1986. Т. XXII. Вып. 2.

Поступила в редакцию
2 IV 1991