МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

СИНТЕЗ СТРАТЕГИЙ ЦЕНООБРАЗОВАНИЯ В ЗАМКНУТОЙ ФОРМЕ ДЛЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ РЫНКА

Минин В.В., Комаров Д.К.

(Москва)

Рассматриваются микроэкономические процессы на рынке, подверженном случайным возмущениям. Предлагается эффективный подход к синтезу алгоритма принятия решений в области ценообразования единичным агентом на рынке на этапе реализации продукта, позволяющий синтезировать процедуру назначения цен в замкнутой форме и базирующийся на методе аналитического конструирования.

Недетерминированность рыночной ситуации со стороны как спроса, так и предложения привели к использованию при моделировании "рыночной стихии" аппарата случайных процессов (см. например, [1–3]).

С точки зрения научного и практического интереса надо выделить исследования, связанные с изменениями рыночной конъюнктуры, и прежде всего спроса на произведенную продукцию. Демократизация условий хозяйствования наряду с расширением прав отдельных товаропроизводителей одновременно означает усиление экономической ответственности за итоги хозяйственной деятельности, необходимость вести обоснованную экономическую политику. Особенно это касается стратегии назначения цен при наличии конкуренции производителей продукции.

Замкнутый характер получаемых на основе предлагаемого ниже подхода алгоритмов ценообразования делает их удобными для реализации и позволяет говорить о структурном синтезе управления рассматриваемым стохастическим экономическим объектом. Это существенно отличает описываемый метод от обычно развиваемых при анализе поведения субъектов экономической деятельности в стохастической среде [3].

Вывод закона ценообразования на стохастическом рынке в замкнутой форме, демонстрирующей связь с динамикой спроса и предложения, открывает дополнительные перспективы для изучения рыночной ситуации на макроуровне, в том числе равновесия рынка, его "робастности" [4] и условий децентрализации экономических механизмов.

Излагаемый подход позволяет воспользоваться эффективными методами оптимального адаптивного стохастического управления динамическими объектами [5–10]. В частности, синтез и анализ оптимальных по нечувствительности адаптивных стохастических систем управления [6–8] дает возможность математически исследовать сочетания рыночного и планового начал.

ПРИНЦИПЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПОВЕДЕНИЯ ПРОДАВЦА НА РЫНКЕ

Рассмотрим задачу синтеза в замкнутой форме стратегии назначения цены (ценообразования) одиночным торговым агентом (продавцом), действующим на рынке при меняющейся конъюнктуре. Условия, в которых продавец принимает решения о назначении цены, приближены к реальным, т.е. условиям "нецивилизованного" торговца: он располагает информацией о текущем количестве проданного товара и имеет из собственного опыта лишь приближенное представление о рыночной конъюнктуре.

Такая ситуация характерна для многих существующих в стране торговых предприятий, особенно мелких и средних. Она отражает действительное положение и при априорном изучении рынка вследствие неизбежных неточностей в оценках.

Когда информация о конъюнктуре рынка ограничена, продавец определяет свою стратегию назначения цены, исходя из некоторой системы мотивов. Предположим, что его главная цель, состоящая в получении максимальной выручки (дохода), может быть операционализирована (т.е. сведена к ряду рабочих, вспомогательных мотивов, реализующихся непосредственно в его практической деятельности) через стремление продавца, с одной стороны, поднять повыше цену, а с другой – уменьшить количество нераспроданного к концу времени работы товара. Стремление реализовать эти два конкурирующих мотива влияет на стратегию принятия решений продавцом и создает предпосылки к постановке задачи ее синтеза как оптимизационной.

Ниже предлагается математическое описание подобной рыночной ситуации. Предполагается, что единственным инструментом воздействия продавца на условия продажи товаров служит назначаемая им цена. Спрос на товар является монотонно невозрастающей функцией от этой цены. Изменение во времени количества распроданного товара описывается дифференциальным уравнением (1), которое ставит в зависимость в каждый момент времени количество проданного товара от всей предыстории назначения цены и колебаний спроса.

Неопределенность представлений продавца о конъюнктуре моделируется введением случайных процессов, описание которых задается стохастическими дифференциальными уравнениями, возбуждаемыми белыми гауссовскими шумами (так называемыми формирующими фильтрами). Это, как известно, эквивалентно предположению о том, что изменение конъюнктуры во времени является марковским случайным процессом.

Операциональные цели продавца задаются с помощью целевого функционала (критерия качества принятия решений), имеющего специальный вид (см. (4)), минимизация которого отражает упоминавшиеся два конкурирующих друг с другом мотива деятельности продавца (подробнее смысл этого функционала обсуждается в следующем разделе).

Таким образом, задачу моделирования поведения продавца в условиях стохастического рынка удается свести к задаче минимизации по цене некоторого функционала при ограничениях, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, возмущаемыми случайными процессами. Существенно, что решение ищется в классе управлений, зависящих лишь от доступной измерению переменной – количества нераспроданного (или, что эквивалентно, распроданного) товара в натуральном выражении.

Решение этой задачи оказывается реализованным в замкнутой форме, т.е. при явной операторной связи цены и доступной измерению переменной. Данное обстоятельство позволяет говорить не только о численном, но и о структурном синтезе модели поведения продавца (его стратегии) на базе согласующихся со здравым смыслом предположений о мотивах его деятельности. Эта стратегия имеет следующий вид.

В блоке оценки конъюнктуры по мере поступления информации о количестве нераспроданного товара оценивается текущее значение параметров спроса. На основании полученной оценки с помощью рассчитанного на этапе синтеза алгоритма назначения цены (модели поведения продавца) производится расчет цены товара.

Для приближения изучаемой ситуации к реальной ниже рассматривается подход к синтезу адаптивной стратегии формирования цен при том, что заранее неизвестно, как цена будет влиять на интенсивность продаж. При этом используется механизм настройки параметров оператора назначения цены.

Замкнутая форма решения открывает широкие возможности для анализа процессов получения не только численных, но и качественных результатов относительно чувствительности стратегии к неточностям априорной информации (коэффициентов уравнений, описывающих динамику продаж, статистических характеристик случайных процессов и начальных условий). На базе предлагаемого здесь подхода можно исследовать и более сложные ситуации, в частности взаимодействие нескольких продавцов на рынке, влияющих на спрос товаров друг у друга. Объем статьи не позволяет привести эти данные, которые помогли бы выявить механизмы и воздействие координации назначения цен отдельными продавцами на величину их дохода, а также и другие характеристики.

Далее изложение ведется для систем в непрерывном времени, однако все результаты могут быть распространены и на случай дискретных процессов.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть на рынке оперирует агент (продавец), располагающий некоторым начальным запасом товара, равным в натуральном выражении S_0. Продавец может назначать цену на единицу товара, влияя тем самым на интенсивность (скорость) продаж товара. Предполагается, что рынок обладает большой емкостью в том смысле, что величина проданного товара не влияет на спрос*. Последний изменяется во времени случайным образом, причем в нем могут быть выделены две составляющие — "медленная", обусловленная изменением общерыночной конъюнктуры, и "быстрая" (связанная, например, с локальными флуктуациями конъюнктуры в месте продаж).

Уравнения динамики продаж товара имеют вид

$$\dot{S}(t) = f(\text{Ц}) + H\varphi(t) + \omega_1(t), \qquad (1)$$

где $S(t)$ — количество проданного к моменту времени товара в натуральном выражении; $f(\text{Ц})$ — монотонно убывающая функция цены Ц, имеющая обратную, характеризующая влияние цены на скорость продаж товара; $\varphi(t)$ — m-мерный вектор состояния формирующего фильтра

$$\dot{\varphi}(t) = D(t)\varphi(t) + \omega_2(t), \qquad (2)$$

генерирующего "медленную" составляющую изменения спроса $H\varphi(t)$; H — $1\times m$-мерный вектор-строка; $D(t)$ — $m\times m$-мерная непрерывная матричная функция; $\omega_1(t)$ — скалярный случайный процесс типа белого гауссовского шума с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $P_{\omega_1}(t)$; $\omega_2(t)$ — m-мерный случайный процесс с нулевым математическим ожиданием типа белого гауссовского шума и $m\times m$-мерной матрицей ковариаций $P_{\omega_2}(t)$. Случайные процессы $\omega_1(t)$ и $\omega_2(t)$ предполагаются для упрощения изложения взаимонезависимыми. Начальное условие для (1) имеет вид $S(t_0) = 0$; $\varphi(t_0)$ — нормально распределенная случайная векторная величина с математическим ожиданием $\bar{\varphi}_0$ и матрицей ковариаций P_{φ_0}.

Соотношения (1) и (2) полагаются стохастическими дифференциальными уравнениями в симметризованной форме [11].

Отметим, что предположение о нулевых математических ожиданиях процессов ω_1 и ω_2 не ограничивает общности изложения, поскольку эти величины могут быть учтены соответствующим расширением вектора состояния формирующего фильтра.

Для изложения последующего материала целесообразно преобразовать (1). Так как $\dot{S}_0 = 0$, то, вычитая из этого соотношения почленно (1), получаем

$$\Delta\dot{S}(t) = -f(\text{Ц}) - H\varphi(t) - \omega_1(t), \quad \Delta S(t_0) = S_0, \qquad (3)$$

где $\Delta S(t) = S_0 - S(t)$ — количество (запас) нераспроданного в момент времени t товара в натуральном выражении.

Поведение продавца направлено на то, чтобы, манипулируя величиной Ц (доступной ему управляющей переменной), обеспечить возможно больший доход и ограничить запас нераспроданного на конец рабочего времени товара.

---

* Полученные ниже результаты достаточно просто могут быть обобщены на случай, когда это ограничивающее предположение снято.

Математическое описание этого поведения может быть самым различным вследствие использования, например, разных оптимизируемых функционалов.

Здесь же ставится задача получения стратегии ценообразования, согласующейся с указанным поведением продавца и допускающей реализацию в замкнутой форме [12]. В связи с этим будем моделировать поведение продавца как процедуру такого назначения цен Ц (t), которая позволяет минимизировать на движениях системы (2), (3) интегральный функционал вида

$$M\ \{\alpha_1 \Delta S^2(T) + \int_{t_0}^{T} [\alpha_2 \Delta S^2(t) + \beta f^2(\text{Ц}, t)]\ dt\}, \tag{4}$$

где $M\{\cdot\}$ – математическое ожидание; $\alpha_1, \alpha_2, \beta$ – известные весовые коэффициенты (которые, вообще говоря, могут зависеть от времени), причем $\alpha_1 \geqslant 0$, $\alpha_2 \geqslant 0$, $\beta > 0$; $[t, T]$ – рабочее время (интервал оптимизации) функционирования системы (2), (3).

Минимизация слагаемого

$$M\{\int_{t_0}^{T} \beta f^2\ (\text{Ц}, t)\, dt\}$$

соответствует стремлению продавца увеличивать цену, а минимизация

$$M\{\alpha_1\ \Delta S^2(T) + \int_{t_0}^{T} \alpha_2 \Delta S^2(t)\, dt\}$$

интерпретируется как необходимость уменьшения нераспроданного запаса товара к концу рабочего времени. Возрастание нераспроданного запаса является фактором, ограничивающим безудержное повышение цены продавцом. Приемлемый уровень запаса товара на конец рассматриваемого периода обусловливает повышение цены до величины, которая дает возможность максимизировать доход.

Критерий (4) можно полагать рабочим, операциональным, имитирующим поведение продавца, стремящегося продать по возможно большей цене как можно больше товара. Такое поведение согласуется с критерием максимума выручки типа

$$\max_{\text{Ц}(t)} M\{\int_{t_0}^{T} \dot{S}(t)\, \text{Ц}\ (t)\, dt\}.$$

Можно качественно охарактеризовать зависимость динамических свойств процесса продажи от параметров функционала (4) $\alpha_1, \alpha_2, \beta$ по аналогии с [12]: рост β – возможность назначить более высокие цены; увеличение α_1 – необходимость уменьшить запас нераспроданного товара на конец рабочего времени $\Delta S(t)$; рост α_2 – требование сократить запасы нераспроданного товара не только к моменту времени T, но и раньше, т.е. ускорить распродажу и сделать ее равномерной.

Предполагается, что продавец может принимать решения о назначении цены на основании наблюдений за ходом торговли, причем единственно доступной измерению переменной является в каждый момент времени t величина

$$y(\tau) = \Delta S(\tau), \quad t_0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T. \tag{5}$$

СИНТЕЗ СТРАТЕГИИ НАЗНАЧЕНИЯ ЦЕН

Система (2) – (5) представляет собой относительно управляющей функции f (Ц) известную задачу линейно-квадратично-гауссовского управления [12, 13] при наличии идеальных (незашумленных) измерений (5) [14].

Закон изменения функции f (Ц), интерпретируемой как управляющее воздействие, имеет вид [12]

$$f\ (\text{Ц}) = -L_1(t)\, \Delta S\ (t) - L_2(t)\, \hat{\varphi}\, (t), \tag{6}$$

где $L_1(t)$ – скаляр и $L_2(t)$ – $1 \times m$-мерная вектор-строка вычисляются в соответствии с

$$L = \frac{1}{\beta} B^{\top} P(t), \tag{7}$$

где $B = [-100 \ldots 0]^{\top}$ – $(m-1)$-мерный вектор-столбец; $P(t)$ – $(m+1) \times (m+1)$-мерное решение матричного дифференциального уравнения Риккати

$$-\dot{P}(t) = A^{\top}(t) P(t) + P(t) A(t) +$$

$$+ Q - \frac{1}{\beta} P(t) BB^{\top} P(t), \quad P(T) = P_f, \tag{8}$$

$$Q = \left[\begin{array}{c|c} \alpha_2 & 0_{1\times m} \\ \hline 0_{m\times 1} & 0_{m\times m} \end{array}\right], \qquad P_f = \left[\begin{array}{c|c} \alpha_1 & 0_{1\times m} \\ \hline 0_{m\times 1} & 0_{m\times m} \end{array}\right];$$

$0_{i\times j}$ – нулевая $i \times j$-матрица;

$$A(t) = \left[\begin{array}{c|c} 0 & H \\ \hline 0_{m\times 1} & D(t) \end{array}\right];$$

$\hat{\varphi}(t)$ – оптимальная в среднеквадратическом значении оценка вектора состояния формирующего фильтра $\varphi(t)$, алгоритм получения которой будет описан ниже.

Преобразование матричных выражений, стоящих в правых частях (7) (8), показывает, что для расчета коэффициентов закона управления (6) L_1 и L_2 достаточно проинтегрировать систему уравнений

$$-\dot{P}_{11}(t) = \alpha_2 - \frac{1}{\beta} P_{11}^2(t), \quad P_{11}(T) = \alpha_1,$$

$$-\dot{P}_{12}(t) = -P_{11}(t) H + P_{12}(t) D(t) - \frac{1}{\beta} P_{11}(t) P_{12}(t), \quad P_{12}(T) = 0_{1\times m}, \tag{9}$$

где $P_{11}(t)$ – скаляр; $P_{12}(t)$ – $1 \times m$-мерный вектор-строка, являющиеся блоками матрицы $P(t)$ (см. (8))

$$P(t) = \left[\begin{array}{c|c} P_{11}(t) & P_{12}(t) \\ \hline P_{21}(t) & P_{22}(t) \end{array}\right],$$

причем $P_{21}(t) = P_{12}^{\top}(t)$.

Уравнения (9) являются более экономными по количеству вычислений в сравнении с (8), так как первые содержат лишь $(m+1)$, а последнее – $(m+1)^2$ неизвестных. При этом

$$L_1(t) = -\frac{1}{\beta} P_{11}(t), \quad L_2(t) = -\frac{1}{\beta} P_{12}(t). \tag{10}$$

С учетом (6) оптимальная стратегия назначения цены имеет вид

$$Ц(t) = F[-L_1(t) \Delta S(t) - L_2(t) \check{\varphi}(t)], \tag{11}$$

где F – функция, обратная f (Ц), а L_1 и L_2 определяются соотношениями (9), (10).

Перейдем к получению алгоритма, позволяющего вычислять на основании доступных измерений (5) оптимальную в смысле минимума среднего квадрата ошибки оценивания величину $\hat{\varphi}(t)$ вектора $\varphi(t)$, необходимую для реализации алгоритма управления (11). Данная задача может быть отнесена к классу сингулярных задач фильтрации (см. например, [14]) из-за отсутствия шумов измерения в (5). В соответствии с общим подходом [14], продифференцировав обе части (5) с учетом (3), можно прийти к уравнениям фильтрации пониженного порядка

$$\dot{\hat{\varphi}}(t) = D(t)\hat{\varphi}(t) + K(t)\,[\dot{y}(t) + f(\text{Ц}) + H\hat{\varphi}(t)], \tag{12}$$

$$K(t) = \frac{1}{P_{\omega_1}(t)}\,P_{\Phi}(t)H^{\top}, \tag{13}$$

где $P_{\Phi}(t)$ – матричная $m \times m$-функция, являющаяся решением дифференциального уравнения Риккати

$$\dot{P}_{\Phi}(t) = D(t)P_{\Phi}(t) + P_{\Phi}(t)D^{\top}(t) + P_{\omega_1}(t) - P_{\Phi}(t)H^{\top}P_{\omega_2}^{-1}(t)HP_{\Phi}(t), \quad t \geqslant t_0. \tag{14}$$

В качестве начальных для (12) и (14) можно взять априорные значения $\hat{\varphi}(t_0) = \bar{\varphi}_0$, $P_{\Phi}(t_0) = P_{\varphi_0}$. Однако вследствие идеальности измерений (5) эти начальные условия могут быть в принципе несколько улучшены (см. например, [15]). Не останавливаясь подробно на этом вопросе, отметим, что в случае некоррелированности величин $\Delta S(t_0)$ и $\varphi(t_0)$ начальные условия $\hat{\varphi}(t_0) = \bar{\varphi}_0$ и $P_{\Phi}(t_0) = P_{\varphi_0}$ нельзя улучшить (это может быть получено непосредственно на основании соотношений [15]).

Реализация алгоритма оценивания (12)–(14) предполагает дифференцирование по времени измерений $y(t)$ (5) (см. (12)).

Из-за чрезвычайной чувствительности этой операции даже к весьма малым по интенсивности ошибкам измерений целесообразно исключить ее из алгоритма подстановкой вида [14]

$$q(t) = \hat{\varphi}(t) - K(t)y(t), \tag{15}$$

где $q(t)$ – $m \times 1$-мерный вектор-столбец вспомогательных переменных.

Запишем $\hat{\varphi}(t)$ как

$$\hat{\varphi}(t) = q(t) + K(t)y(t) \tag{16}$$

и, подставляя это выражение в (12), после преобразований получим

$$\dot{q}(t) = [D(t) + K(t)H]\,q(t) + [D(t)K(t) + K(t)HK(t) - \dot{K}(t)]\,y(t) + K(t)f(\text{Ц}), \tag{17}$$

причем начальное условие $q(t_0)$ связано с $\hat{\varphi}(t_0)$ соотношением (15), т.е. равно

$$q(t_0) = \hat{\varphi}(t_0) - K(t_0)y(t_0) = \bar{\varphi}_0 - K(t_0)y(t_0). \tag{18}$$

Итак, алгоритм оценивания вектора $\varphi(t)$ может быть приведен к виду (13), (14), (16)–(18). Его использование в законе управления (9), (10), (11) обеспечивает решение поставленной задачи.

Пример. Пусть динамика продаж характеризуется уравнениями типа (2), (3), в которых $\varphi(t)$ – скалярная величина $(m = 1)$, $D(t) = 0$, $P_{\omega_2}(t) = 1{,}78$, $f(\text{Ц}) = 1/\ln y$, $P_{\omega_1}(t) = 1{,}78$, $H = 1$. Параметры интегрального функционала оптимизации (4) принимались равными $\alpha_1 = 0{,}11$, $\alpha_2 = 0$, $\beta = 0{,}33$, $T = 10$, а начальные условия: $\Delta S(t_0) = 300$, $\varphi(t_0) = 1$, $\bar{\varphi}_0 = 0$, $P_{\Phi}(t_0) = P_{\varphi_0} = 2$.

Влияние цены на динамику продаж (изменение товарных запасов) показано на рис. 1. При постоянной цене Ц = 1,003 условных денежных единиц – у.д.е. (кривая I) распродажа товарных запасов происходит примерно через 10% времени от продолжительности всего рабочего периода. Полученная при этом выручка составляет 300 у.д.е. При постоянной Ц = 2 продаж нет и выручка остается близкой к нулю за все рабочее время T, равное 10 ч. При постоянной цене Ц = 1,1 динамика продаж имеет вид кривой III на рис. 1. Остаток нераспроданного товара на конечный момент времени $T = 10$ составляет 210 ед., выручка равна 99 у.д.е.

Моделирование на ЭВМ данной системы со стратегией назначения цен, определяемой соотношениями (9)–(11), (13), (16)–(18), показало, что априорная неопределенность знания конъюнктуры существенно влияет на ценообразование.

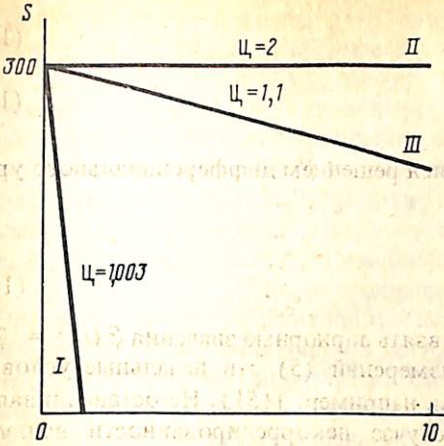

Рис. 1.

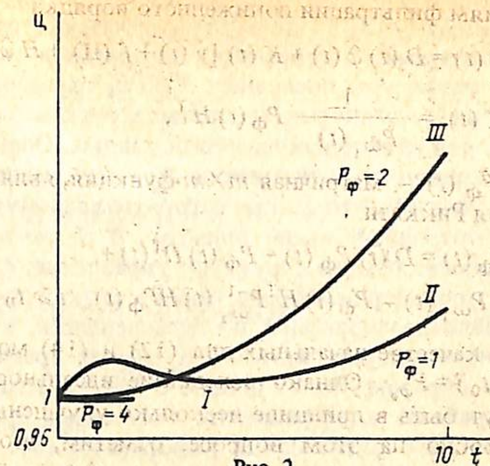

Рис. 2

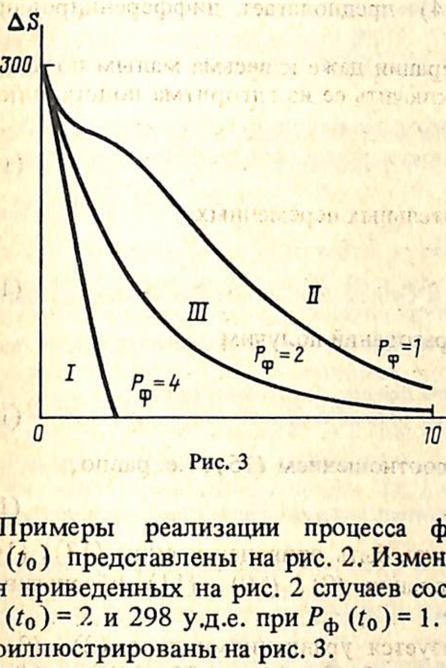

Рис. 3

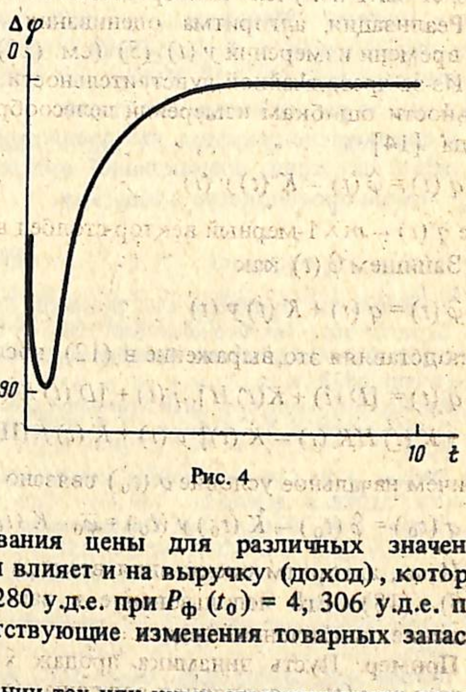

Рис. 4

Примеры реализации процесса формирования цены для различных значений $P_ф(t_0)$ представлены на рис. 2. Изменение цен влияет и на выручку (доход), которая для приведенных на рис. 2 случаев составила 280 у.д.е. при $P_ф(t_0) = 4$, 306 у.д.е. при $P_ф(t_0) = 2$ и 298 у.д.е. при $P_ф(t_0) = 1$. Соответствующие изменения товарных запасов проиллюстрированы на рис. 3.

Исследовалось также влияние ошибок в знании тех или иных статистических характеристик на качество процесса назначения цен. Может быть сделан вывод о достаточной грубости (робастности) полученных алгоритмов. Об этом свидетельствует, например, почти не изменяющаяся динамика ошибки оценивания $\Delta\varphi(t) = \varphi(t) - \hat{\varphi}(t)$ при вариациях дисперсии шума ω_1 относительно номинального значения $P_{\omega_1} = 1{,}78$, принятого при синтезе оптимального алгоритма назначения цен (P_{ω_1} отклонялась до 9, 25 и 49 – см. рис. 4). Отчетливо прослеживается стремление ошибки оценивания к нулю даже при больших (тысячи процентов) ошибках в знании истинной величины P_{ω_1}.

Аналогично и влияние ошибок на размер выручки Ц, и ΔS оказывается в данном алгоритме существенно ослабленным.

РАСШИРЕНИЕ МЕТОДА

Полученный в предыдущем разделе оптимальный по критерию (4) алгоритм назначения цены задает замкнутую структуру процедуры принятий решений о ценообразовании, на вход которой поступает измеренное значение $\Delta S(t)$, на основе которого с помощью (13), (16)–(18) рассчитывается оценка $\hat{\varphi}(t)$ совместно с $\Delta S(t)$, далее используемая в собственно алгоритме назначения цены (управления) (11). Характерные параметры последнего L_1 и L_2 вычисляются заранее согласно (9), (10). В уравнениях упомянутых алгоритмов оценивания и управления (9), (11)–(14) применяется ряд априорных числовых данных. Ошибки в знании истинных значений этих величин приводят к отклонению стратегии назначения цены от оптимальной (следует, однако, отметить, что данные алгоритмы весьма робастны [16], о чем свидетельствует также рассмотренный выше пример). В то же время уточнение априорных характеристик не меняет общую структуру управления, что позволяет говорить о структурном синтезе процедур ценообразования в рамках представленного метода.

Наличие априорной неопределенности, а также отклонений различных параметров от номинальных значений в течение времени функционирования системы естественным образом ставит вопрос о синтезе адаптивных алгоритмов, дающих возможность настраивать коэффициенты полученных процедур оценивания и управления, уточнять их на базе поступающей информации (5). При этом алгоритм (9) –(14) может рассматриваться как задающий основной контур адаптивной системы управления [5, 6].

Представляется перспективным моделировать возникающие в системе флуктуации марковскими процессами и синтезировать адаптивные стохастические стратегии ценообразования в соответствии с подходами [5–8], а также методами оптимальной самонастройки [9, 10]. Изложение полученных авторами результатов в этой области выходит за рамки настоящей статьи.

В заключение отметим, что предложенный подход может быть применен и для более сложной ситуации, возникающей при необходимости управлять не только ценами, но и объемом производства и запасами.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Turnovski S.J., Weintraub E.R.* Stochastic Stability of a General Equilibrium System under Adaptive Expectations // Int. Economic Rev. 1971. V. 12. N 1.
2. *Siljak D.D.* On Stochastic Stability of Competitive Equilibrium // Annals Economic and Social Measurement. 1977. V. 6.
3. Applied Stochastic Control in Economics and Management Science. Amsterdam, 1980.
4. *Бесекерский В.А., Небылов А.В.* Робастные системы автоматического управления. М.: Наука, 1983.
5. *Петров А.И.* Субоптимальное адаптивное управление стохастическим объектом // Докл. АН СССР. 1978. Т. 240. № 2.
6. *Петров Б.Н., Петров А.И.* Оптимальные по нечувствительности стохастические системы управления // Докл. АН СССР. 1980. Т. 251. № 5.
7. *Петров А.И., Минин В.В.* Роль эталонных моделей в снижении чувствительности адаптивных стохастических систем к неконтролируемым возмущениям // Вопр. исследования и проектирования систем автоматического управления при наличии возмущений: Тем. сб. науч. тр. М.: МАИ, 1989.
8. *Петров А.И., Зубов А.Г., Минин В.В.* Анализ траекторной чувствительности адаптивных стохастических систем управления // Автоматика. 1985. № 2.
9. *Петров А.И.* Об одной задаче определения оптимального алгоритма самонастройки // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1971. № 1.
10. *Петров А.И.* Самонастраивающиеся системы стабилизации динамических характеристик по статистическому критерию качества // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1970. № 2.
11. *Стратонович Р.Л.* Условные марковские процессы и их применение в теории оптимального управления. М.: Изд-во МГУ, 1966.
12. *Брайсон А., Хо Ю Ши.* Прикладная теория оптимального управления. М.: Мир, 1972.
13. *Athans M.* The Role and Use of Stochastic Linear Quadratic-Goussian Problem in Control System Design // IEEE Trans. on Automatic Control. 1971. V. AC-16. N 6.
14. *Петров А.И., Минин В.В.* Аналитическое конструирование регуляторов при наличии неполных наблюдений // Аналитические методы синтеза регуляторов: Межвуз. науч. сб. Вып. 2. Саратов: Сарат. пед. ин-т, 1977.
15. *Квакернаак Х., Сиван Р.* Линейные оптимальные системы управления. М.: Мир, 1977.
16. *Safonov M.G., Athans M.* Gain and Phase Margin for Multiloop LQC Regulators // IEEE Trans. on Automatic Control. 1977. V. AC-22. N 2.

Поступила в редакцию
15 V 1990