ЭКОНОМИКА
И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ
1992
Том 28, вып. 1

КОМПРОМИСС ИНТЕРЕСОВ И СПРАВЕДЛИВОСТЬ В ОПЛАТЕ ТРУДА (МОДЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ)

Гаврилец Ю.Н.

(Москва)

Статья посвящена разработке операциональной и модельной концепции социальной справедливости. Основой согласования принимаются не сами функции полезности, а нормы замещения (компенсации) одного блага другим.

1. ОПЕРАЦИОНАЛИЗАЦИЯ ПРОБЛЕМЫ СОЦИАЛЬНОЙ СПРАВЕДЛИВОСТИ

Так как главной целью этой статьи является вполне определенный модельно-операциональный подход, не будем ничего говорить о других подходах и сразу предложим свое понимание вопроса.

Можно считать, что общество состоит из некоторого числа социально-демографических групп, каждая из которых "имеет свои интересы" в разных областях общественной жизни: в экономике, политике, культуре, религии, экологии и т. п. Состояние этих сфер, положение группы относительно них в той или иной степени соответствует ее собственным интересам, уровню удовлетворения ее потребностей. В ряде случаев можно измерять этот уровень с помощью функций полезности.

Кроме того, группа имеет еще социально-этические интересы, т. е. представления о том, как ее положение должно соотноситься с положением других групп (или с ситуацией в обществе в целом). Мы не будем подробно говорить об информированности группы, о полноте ее представлений, компетентности и т. п.

Очевидно, что социальная напряженность может возникать, когда представления групп о должном будут различаться или когда им не соответствует реальность. В случае такого расхождения каждая группа стремится реализовать свой вариант, который может и не соответствовать социально-этическим представлениям других групп. Отсутствие расхождений между ними считается достижением социальной справедливости. Мерой социальной напряженности служат количественные характеристики этих расхождений. Какие именно – это устанавливается дополнительными эмпирическими или теоретическими исследованиями.

Для иллюстрации общего подхода рассмотрим проблему социальной справедливости в экономической сфере, а именно – оплату труда.

2. МОДЕЛЬ ПРОСТОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТРУДА И ЗАРАБОТНОЙ ПЛАТЫ

Простейшая, с точки зрения модельного представления, проблема нарушения или достижения социальной справедливости возникает в задаче выполнения фиксированного объема однородной работы за определенную плату коллективом из N "одинаковых" работников.

"Состоянием системы" можно считать набор пар (l_k, s_k), удовлетворяющих ограничениям

$$\Sigma l_k = L,\ \Sigma s_k = S,\ l_k,\ s_k > 0, \qquad (1)$$

где L, S – общие объемы работы и оплаты труда; l_k – объем работы, выполненной работником, а s_k – размер его заработной платы, $k = 1, ..., N$.

При наличии трудовых предпочтений, описываемых функцией полезности $U(l, s)$, возможна постановка двух вариантов задачи. В первом необходимо найти оптимальное распределение и работ и заработной платы в соответствии с некоторым представлением о согласовании интересов всех работающих. Естественно считать, что это распределение будет реализовано, т. е. каждый работник работает столько, сколько надо. Во втором – субъектом поведения является коллектив, механизм поведения отдельного работника не конкретизируется, но заранее устанавливается принцип оплаты труда. В этом случае должна быть выполнена вся работа, а не конкретно какие-то нормативы труда каждым участником. В обоих вариантах мы не предполагаем наличия функции оплаты труда, когда каждый работник стремится максимизировать собственную функцию полезности, зная закон оплаты. Можно, конечно, для каждой ситуации (L, S, N) подбирать такую кривую оплаты $S = f(l)$, чтобы работники были заинтересованы в выполнении всей работы, однако более желательно найти общие принципы оплаты – для всех возможных ситуаций и отражающие согласованное мнение самих работающих.

Первый вариант кажется хорошим тем, что в нем заранее известно, сколько кто будет работать и что он за это получит. Однако эта жесткость, плановость может противоречить реальным условиям, когда одни будут работать больше, другие меньше запланированного. Во втором случае коллектив каким-то образом сам распределяет работы, а заработная плата устанавливается апостериорно, но по априорным правилам. Однако на самом деле оба варианта должны образовывать единую систему: первый дает некоторую рекомендацию, второй определяет оплату труда в случае отклонения от рекомендаций.

Так, если предпочтения всех работников одинаковы $(U_k(l, s) = U(l, s))$, критерии согласования вида $W_{\mathrm{I}} = \sum_k U(l_k, s_k) \to \max$ или $W_{\mathrm{II}} = \min_k U(l_k, s_k) \to \max$ приводят (в условиях выпуклости вверх функции U) к оптимальному решению

$$l_k^* = L/N,\ s_k^* = S/N,\ k = 1, ..., N.$$

Правило же справедливой оплаты труда, исходящее из принципа "отсутствия обиды" $(U(l_k, s_k) \geqslant U(l_k, s_i)\ \forall\ i,\ k)$ приводит к равенству: $U(l_k^0, s_k^0) = U(l_i^0, s_i^0)$, где l_k^0, l_i^0 – фиксированные объемы выполненных работ, а s_k^0 и s_i^0 – соответствующие им уровни оплаты.

Различия в функциях полезности усложняют ситуацию и требуют нового решения. Согласно общему определению социальной справедливости, каждый работник кроме "собственных" эгоистических интересов, выражаемых его функцией полезности $U_k(l, s)$, имеет "социально-этические" представления о должном, справедливом. В частности, он может считать "правильным" достижение максимума какого-нибудь согласующего функционала (например, вида $\Sigma \lambda_k U_k$) или соблюдение принципа справедливости путем выполнения "условия отсутствия обиды"

$$U_k(l_k\, s_k) \geqslant U_k(l_i\, s_i)\ \forall\ i, \tag{2}$$

которое приводит к

$$U_k(l_k\, s_k) = U_k(l_i\, s_i). \tag{3}$$

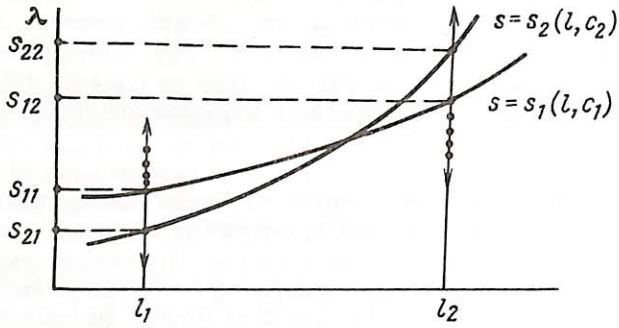
Выполнение условий (1), (3) и одновременная максимизация функции U_k, с точки зрения участника k трудового коллектива, означает справедливое решение задачи на распределение труда и заработной платы. Интересно, что несмотря на различие функций полезности работников, реализация этих субъективных представлений приводит к "уравниловке" $l_k = L/N$, $s_k = S/N$, как это было при совпадении предпочтений. При невыполнении данных индивидуальных "планов–предписаний", но при выполнении коллективом всего объема работ, требуется привести в соответствие объемы работ и заработной платы. Тогда может не существовать такого ее распределения, которое, с точки зрения всех участников, удовлетворяло бы "условию отсутствия обиды", т. е. было бы справедливо (2).

Деистзительно, даже в случае двух участников, первый из которых более, а второй менее трудолюбив, может оказаться, что невозможно оплатить фиксированные работы так, чтобы оба считали выданную им сумму справедливой (без "обиды").

Пусть семейство кривых безразличия участника I описывается функцией $s = s_1(l, c_1)$, а для участника II $s = s_2(l, c_2)$ (c_1 и c_2 — уровни полезности). Тогда первого можно считать более трудолюбивым при

$$E_1 = ds_1/dl < ds_2/dl = E_2$$

в одних и тех же точках (l, s) определения функций полезности. На рисунке показана ситуация, когда более трудолюбивый выполнил объем работы l_1, меньший, чем l_2 —



Случай, когда невозможно достичь взаимной удовлетворенности

объем работы менее трудолюбивого. В этом случае участник I считает справедливым дележ суммы S на $s_{11} + s_{12}$, а участник II — на $s_{21} + s_{22}$. Другие возможные для них дележи изображаются точками выше s_{11} и ниже s_{12} для I участника, и точками над s_{22} и под s_{21} — для II. Видно, что согласованного дележа быть не может. Однако если их поменять местами, т. е. если более трудолюбивый работает больше, а менее трудолюбивый меньше, тогда появляется область согласованного дележа (на отрезках s_{11}, s_{21} и s_{22}, s_{12}), когда каждый получает больше, нежели он мог ожидать при реализации его представлений о справедливой оплате. И если в предыдущем случае налицо было противоречие между взаимными представлениями о справедливой оплате, то теперь возникает новая проблема — как распределять появившийся "добавок" $s_{11} - s_{21} = s_{22} - s_{12}$ (имея в виду, что l_1 — работа менее трудолюбивого, а l_2 — более трудолюбивого).

3. КОМПРОМИСС ПО ПОВОДУ ОПЛАТЫ ТРУДА

Основная идея подхода к решению проблемы заключается в поисках определенного вида компромисса между всеми членами трудового коллектива. Заметим, что согласование интересов — это проблема социального согласия. Всякое правило согласования всегда будет некоторым компромиссом, который предполагает взаимные уступки, равновесие потерь каждого. В ряде случаев "надсистема" определяет этот компромисс; представляется, во многих социальных системах, состоящих из "заинтересованных элементов", сами эти "элементы" должны договориться между собой, найти приемлемую форму компромисса. В частности, простейшие трудовые коллективы, подобные рассмотренным выше, регулярно оказывающиеся в разных ситуациях, определяемых значениями L, S, N, должны выработать общие принципы оплаты своего труда как для отбора приемлемых работ (здесь субъектом поведения выступает сам коллектив), так и для оплаты работы членов коллектива "по труду". Другими словами, коллектив должен иметь собственную целевую функцию. Различие в целевых функциях членов коллектива, ординальность шкал полезности делают невозможным прямое сопоставление индивидуальных полезностей с целью их согласования.

В то же время каждый участник коллектива имеет собственный взгляд на то, как должен оплачиваться дополнительный час его работы, и естественно считать, что это свое мнение он желал бы максимально выразить и в агрегированном предпочтении коллектива. Простейшее предложение заключается в усреднении всех норм компенсации (своего рода аналог "правила большинства"). Будем считать, что компромиссная норма компенсации определяется выпуклой линейной комбинацией всех норм

$$E(l, s) = \Sigma \lambda_k E_k(l, s), \lambda_k > 0, \sum_{k=1}^{N} \lambda_k = 1$$

где λ_k – доля членов коллектива, имеющих норму компенсации $E_k(l, s)$.

Возникают вопросы: 1) существует ли согласованное агрегирование (функция полезности) такое, что для него $E(l, s)$ будет как раз нормой компенсации? 2) окажется ли такое агрегированное предпочтение действительно некоторым "средним", не выведет ли оно руководствующийся им коллектив за пределы зоны решений, естественных с точки зрения отдельных участников? 3) какой вид получит компромиссная функция полезности, как она будет связана с полезностями отдельных членов коллектива? 4) наконец, возможны ли обобщения данного метода компромисса на случай n переменных? Попробуем ответить на эти вопросы.

Продолжим рассмотрение простейшего случая двух переменных l и s и N участников с различающимися функциями полезности $U_k(l, s)$. Очевидно, в условиях достаточной гладкости норм компенсации $E(l, s)$ дифференциальное уравнение

$$ds/dl = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k E_k(l, s)$$

будет иметь единственное решение, непрерывно зависящее от начальных условий l^0, s^0, а функция $W(l, s)$, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{\partial W}{\partial l} + \sum_{k=1}^{N} \lambda_k E_k(l, s) \frac{\partial W}{\partial s} = 0, \qquad (4)$$

– компромиссная функция полезности. В частности, при $U_k = \ln s - \upsilon_k(l)$ нормы компенсации

$$E_k(l, s) = s\upsilon_k'(l), E(l, s) = s\Sigma\lambda_k \upsilon_k'(l),$$

и решение уравнения

$$ds/dl = s\Sigma\lambda_k \upsilon_k'(l)$$

имеет вид

$$s = s_0 e^{\Sigma \lambda_k [\upsilon_k(l) - \upsilon_k(l^0)]},$$

а $W(l, s) = \ln s - \sum_{k=1}^{N} \lambda_k \upsilon_k(l)$ оказывается точно такой же "смесью", как и норма компенсации $E(l, s)$. К сожалению, это едва ли не единственный случай подобного непосредственного "взвешивания" целевых функций отдельных участников.

Итак, пусть $W(l, s)$ будет компромиссной функцией полезности, полученной решением уравнения (4) и являющейся как бы целевой установкой данного коллектива, или "среднего" его представителя. Рассмотрим оптимальное поведение, заключающееся в выборе такого объема работ, который наиболее выгоден при заданном законе оплаты труда. Пусть при законе оплаты

$$s = f(l) \qquad (5)$$

k-й член коллектива выбирает наивыгоднейший объем работы l_k^*, приносящий заработную плату s_k^*. Пусть также максимизация $W(l, s)$ при ограничении (5) дает решение (l^*, s^*). Оказывается, при выполнении довольно естественных условий, накладываемых на функции $U(l, s)$, $f(l)$, компромиссное решение будет находиться где-то между

частными решениями l_k^*, s_k^*

$$\min_k l_k^* < l^* < \max_k l_k^*, \quad \min_k s_k^* < s^* < \max_k s_k^*. \tag{6}$$

Этот факт говорит в пользу построения компромиссной целевой функции путем усреднения норм компенсации, так как для среднего представителя коллектива действительно получается некоторое компромиссное решение (доказательство этого приводится в конце статьи).

Оценивая свое положение относительно других, каждый участник может сопоставлять свой труд и заработную плату с трудом и заработной платой остальных. Рассмотрим произвольную пару i, k. Пусть для определенности $l_i^0 < l_k^0$.

Рассмотрим ситуацию, когда распределение заработной платы осуществляется по труду в соответствии с компромиссной функцией полезности

$$W(l_i^0, s_i^0) = W(l_k^0, s_k^0) \ \forall i, k,$$

где l_i^0, l_k^0 – объемы выполненных работ, а s_i^0, s_k^0 – "справедливая" оплата.

Будем считать, что все нормы компенсации различаются, а неравенства типа $E_i(l, s) < E_k(l, s)$ сохраняются во всех точках (l, s) функций $U_k(l, s)$. Положим также, что ни один из участников не является "диктатором" в том смысле, что: $E_k(l, s) \neq E(l, s) = \Sigma \lambda_k E_k(l, k) \ \forall k$. Тогда, очевидно, в каждой точке будет одна и та же упорядоченность значений E_i и E_k. В этом случае возможны три варианта: 1) $E_i < E < E_k$; 2) $E < E_i < E_k$; 3) $E_i < E_k < E$.

Заметим, что кривые безразличия функций W, U_k, U_i, (обозначим их через $\varphi(l)$, $\varphi_k(l)$, $\varphi_i(l)$, соответственно), проходящие через одну и ту же точку $(\hat{l}, \hat{s})$, расходятся, так что $\varphi_i(l) < \varphi(l) < \varphi_k(l)$ при

$l > \hat{l}$, если $E_i(\hat{l}, \hat{s}) < E(\hat{l}, \hat{s}) < E_k(\hat{l}, \hat{s})$.

Действительно, поскольку, например, $d/dl[\varphi_i(l) - \varphi_k(l)] = E_i(l, s) - E_k(l, s) < 0$, функция $\varphi_i - \varphi_k$ убывает и всегда $\varphi_i(l) < \varphi_k(l)$. В то же время слева от точки пересечения кривых безразличия неравенства изменятся на противоположные.

Пусть для определенности $l_i^0 < l_k^0$. Через точку (l_i^0, s_i^0) проходят три кривые: $\varphi_i(l)$, $\varphi(l)$, $\varphi_k(l)$, причем для первого варианта при $l > l_i^0$ $\varphi_i(l) < \varphi(l) < \varphi_k(l)$, так что в точке $l = l_k^0$ будет $\varphi_i(l) < \varphi(l_k^0) = s_k^0 < \varphi_k(l_k^0)$.

В силу последнего неравенства

$$\Delta_{ki} = \varphi(l_k^0) - \varphi_k(l_k^0) < 0. \tag{7}$$

При этом $\varphi_k(l_k^0)$ – размер оплаты труда k-го работника, соответствующий его точке зрения на справедливость. Напротив, для кривых безразличия, проходящих через точку (l_k^0, s_k^0), при $l < l_k^0$

$$\tilde{\varphi}_i(l_i^0) > \tilde{\varphi}(l_i^0) > \tilde{\varphi}_k(l_i^0),$$

где $\tilde{\varphi}$ – соответствующие кривые. Поэтому

$$\Delta_{ik} = \tilde{\varphi}(l_i^0) - \tilde{\varphi}_i(l_i^0) < 0. \tag{8}$$

Из неравенств (7), (8) ясно, что каждый из участников считает свой труд оплаченным меньше, чем этого требует "справедливость". Если же $l_i > l_k$, то, сравнивая оплату своего труда с оплатой труда другого, каждый будет видеть превышение своей заработной платы над "справедливой"

$$\delta_{ik} = \psi_i(l_i^0) - \psi(l_i^0) > 0,$$

$$\delta_{ki} = \psi_k(l_k^0) - \psi(l_k^0) > 0$$

(здесь ψ – кривые безразличия).

Учитывая свойства кривых безразличия и рассуждая аналогичным образом, приходим к выводу, что во втором варианте (при $l_i^0 < l_k^0$) "обижен" будет тот, кто больше работает, а в третьем – тот, кто работает меньше. Таким образом, для каждого распре-

деления работ между всеми членами коллектива можно определить набор величин Δ (положительных – при отсутствии обиды и отрицательных – при "недоплатах"), отражающих расхождение между "должным" и "реальным" или характеризующих "запас прочности" (положительные δ).

Очевидно, можно выдвинуть разные гипотезы о влиянии этих величин на социальную напряженность в сфере труда и его оплаты. Например, ввести индексы, измеряющие социальную неудовлетворенность участника k и среднюю неудовлетворенность (в рублях). Или учитывать только отрицательные величины, брать лишь превышающий по модулю некоторый порог, и т. п. Однако каждая из этих гипотез должна пройти непосредственную эмпирическую проверку для того, чтобы можно было отобрать индекс, действительно отражающий социальную неудовлетворенность, которая проявляется в своих специфических формах конфликтов, жалоб, забастовок и т. п.

4. СЛУЧАЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Как и раньше, будем использовать понятие нормы замещения [1] или, как ее лучше называть в нашем случае, предельной нормой компенсации труда благом. Именно на его основе далее предлагается осуществлять компромисс интересов.

Пусть $U(l, x_1, ..., x_n)$ – некоторая непрерывно дифференцируемая функция полезности с поверхностями безразличия $U(l, x_1, ..., x_n) = \text{const}$, где l – затраты труда субъекта, а x_j – объем j потребляемого им блага. Выбрав конкретную поверхность безразличия и зафиксировав все переменные, кроме l и x_j, на уровне $\hat{x}_i$, имеем неявное задание функции $x(l, \hat{x}_1, ..., \hat{x}_{j-1}, \hat{x}_{j+1}, ..., \hat{x}_n)$, производная которой определяется по известной формуле

$$\frac{dx_j}{dl} = -\frac{\dfrac{\partial}{\partial l} U(l, \hat{x}_1, ..., x_j, ..., \hat{x}_n)}{\dfrac{\partial}{\partial x_j} U(l, \hat{x}_1, ..., x_j, ..., \hat{x}_n)} = E_j(l, \hat{x}_1, ..., x_j, ..., \hat{x}_n).$$

Таким образом, в каждой точке определения функции $U_k(l, x_1, ..., x_n)$ можно рассчитать величину $E_{kj}(l, x_1, ..., x_n)$. Она показывает, каким дополнительным количеством блага j можно компенсировать малое увеличение затрат труда субъекта k, потреблявшего вектор благ $x = (x_1, ..., x_n)$ и затратившего свой труд в объеме l, так, чтобы общий уровень удовлетворенности не изменился. Два обстоятельства делают эту величину особенно привлекательной. Во-первых, она вполне операциональна и для достаточно компетентного субъекта имеет понятный смысл, так что можно сказать, за какой дополнительный объем блага j Δx_j согласится увеличить свой труд на известное количество Δl. Во-вторых, она не зависит от шкалы, в которой измеряется полезность, поскольку определяется не величиной функции полезности, а ее поверхностями безразличия. В результате статистически можно пытаться восстановить параметры функций $E_{kj}(l, x_1, ..., x_n)$, особенно если иметь гипотезы относительно класса функций полезности $U_k(l, x_1, ..., x_n)$, порождающего данные нормы компенсации. Конечно, формулировка вопросов, проведение опросов, методы статистической обработки ответов – достаточно сложные технические аспекты, но они здесь не принципиальны.

Рассчитаем агрегированную (компромиссную) норму компенсации обычным взвешиванием

$$E_j(l, x_1, ..., x_n) = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k E_{kj}(l, x_1, ..., x_n). \qquad (9)$$

Запишем систему дифференциальных уравнений в частных производных, которой должна удовлетворять компромиссная целевая функция, если она существует

$$\partial W/\partial l + E_j(l, x_1, ..., x_n)\, \partial W/\partial x_j = 0, j = 1, ..., n. \qquad (10)$$

Основной вопрос заключается в выявлении условий, при которых существует реше-

ние системы (10). В противном случае локальные согласования норм компенсации не приводят к непротиворечивому согласованному предпочтению во всей допустимой области векторов $(l, x_1, ..., x_n)$. Получается, что компоненты градиента всякой компромиссной функции $W(l, x_1, ..., x_n)$, удовлетворяющие (10), однозначно не согласовываются между собой в разных точках, что, строго говоря, делает невозможным оптимальный выбор на основе данного компромисса.

Если же система (10) может быть проинтегрирована, то агрегирование норм компенсации приводит к некоторой компромиссной функции полезности, как это было в случае двух переменных. К сожалению, проблема существования решений уравнений в частных производных достаточно сложна, и ясно, что усреднение норм компенсации произвольных функций полезности скорее всего приводит к неинтегрируемой системе. Необходимо проверить условия интегрируемости, т. е. те, которым с необходимостью должны удовлетворять функции $E_{kj}(l, x)$, а значит, и U_k, если существует решение системы.

Можно вывести условие интегрируемости системы (10) для случая, когда функции U_k сепарабельны

$$U_k(l, x_1, ..., x_n) = f_{k0}(l) + \sum_{j=1}^{n} f_{kj}(x_j),\ k = 1, ..., N. \tag{11}$$

Здесь нормы компенсации труда благом j имеют вид $E_{kj} = f'_{k0}/f'_{kj}$, и агрегированная норма компенсации

$$E_j(l, x_j) = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k f'_{k0}/f'_{kj}$$

будет функцией двух переменных. В конце статьи выводится необходимое условие интегрируемости системы (10), которое выполняется при $f_{k0}(l) = A_{kr} f_{r0}(l) + B_{kr}$, где A_{kr}, B_{kr} – константы, т. е. при фактическом равенстве первых слагаемых функций полезности у всех участников (так как константы не играют роли). Этот случай представляет определенный интерес. Он означает, что "чистый вклад" трудовой активности в величину функции полезности одинаков для всех. Другими словами, предпочтения участников различаются лишь по тому, в какой степени полезности различных благ уравновешивают тяжесть одинакового труда

$$U_k(l, x) = F(l) + \sum_{j=1}^{n} f_{kj}(x_j). \tag{12}$$

В этой ситуации мы можем искать компромиссную целевую функцию в виде

$$W(l, x) = F(l) + \sum_{j=1}^{n} F_j(x_j). \tag{13}$$

Подставляя в систему (10) вместо $W(l, x)$ выражение (13) и

$$E_j = -F'(l) : \sum_{k=1}^{N} \lambda_k / f'_k(x_j),$$

получим

$$F'_j(x_j) = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k / f'_{kj}(x_j),$$

откуда

$$F_j(x_j) = \int \frac{dx_j}{\sum\limits_k \lambda_k / f'_{kj}(x_j)}. \tag{14}$$

В частности, при $f_{kj}(x_j) = a_{kj} x_j^{\beta_j}$ компромиссная целевая функция будет иметь вид

$$W(l, x) = F(l) + \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j^{\beta_j}}{\sum\limits_k \lambda_k / a_{kj}} . \qquad (15)$$

Очевидно, довольно часто реальные предпочтения участников компромисса таковы, что функция усталости от трудовой деятельности (первое слагаемое функции полезности, взятое со знаком "минус") у каждого своя. В этом случае условие интегрируемости может не выполняться. Значит, "в чистом виде" не существует компромиссной целевой функции, полученной агрегированием норм компенсации путем некоторого усреднения. Однако можно определять компромиссную функцию, усредняя нормы компенсации не во всех точках определения, а в некотором конечном числе контрольных точек. В самом деле, пусть выделено M точек $(l^i, x_1^i, \ldots, x_n^i)$, $i = 1, \ldots, M$. Так как целевые функции всех N участников известны, можно рассчитать значения всех $N \times M \times n$ норм компенсации $E_{kj}(l, x_1, \ldots, x_n)$ и записать $M \times n$ соотношений, которым должна удовлетворять теоретически компромиссная функция полезности $W(l, x_1, \ldots, x_n)$

$$\frac{\partial W}{\partial l}\Big|_{l^i, x^i} + E_j(l^i, x^i) \frac{\partial W}{\partial x_j}\Big|_{l^i, x^i} = 0,$$

где $E_j(l^i, x^i) = \sum\limits_{k=1}^{N} \lambda_k E_{kj}(l^i, x^i)$.

После этого, задав некоторый класс функций W, необходимо оценить параметры искомой функции (например, методом наименьших квадратов), т. е. найти своего рода приближенное решение системы уравнений (10).

Для иллюстрации рассмотрим следующий пример. Пусть имеются два участника с целевыми функциями

$$U_1 = \ln(13{,}33 - l) + 1{,}2 \ln x_1 + 1{,}6 \ln x_2,$$

$$U_2 = \ln(15{,}00 - l) + 1{,}1 \ln x_1 + 1{,}4 \ln x_2.$$

Условие интегрируемости соответствующей системы принимает вид

$$[(13{,}33 - l)^{-2}(15 - l)^{-1} - (15 - l)^{-2}(13{,}33 - l)^{-1}] \left(\frac{1{,}2 \times 1{,}4}{x_1 x_2} - \frac{1{,}6 \times 1{,}1}{x_1 x_2}\right) = 0.$$

Оно не является тождеством. Значит, точного решения системы

$$\frac{\partial W}{\partial l} + \frac{x_1}{2}\left[\frac{1}{1{,}2(13{,}33 - l)} + \frac{1}{1{,}1(15 - l)}\right] \frac{\partial W}{\partial x_1} = 0,$$

$$\frac{\partial W}{\partial l} + \frac{x_2}{2}\left[\frac{1}{1{,}6(13{,}33 - l)} + \frac{1}{1{,}4(15 - l)}\right] \frac{\partial W}{\partial x_2} = 0$$

не существует. Будем искать приближенное решение в виде $W = \ln(T - l) + A_1 \ln x_1 + A_2 \ln x_2$, где параметры T, A_1, A_2 подлежат оценке. Тогда эта система для M наблюдений (l^i, x_1^i, x_2^i) даст невязки

$$-\frac{1}{T - l^i} + \frac{A_1}{2}\left[\frac{1}{1{,}2(13{,}33 - l^i)} + \frac{1}{1{,}1(15 - l^i)}\right] = \epsilon_1^i,$$

$$-\frac{1}{T - l^i} + \frac{A_2}{2}\left[\frac{1}{1{,}6(13{,}33 - l^i)} + \frac{1}{1{,}4(15 - l^i)}\right] = \epsilon_2^i.$$

Видим, что значения переменных x_j^i оказывают влияние на оценку параметров.

Для девяти точек, образованных комбинациями с тремя значениями переменной $l = 6, 8, 10$ (крайние точки куба и его центр), были рассчитаны значения параметров T, A_1, A_2. Основная часть вычислений заключалась в нахождении корней алгебраи-

ческого уравнения шестой степени для нахождения оценки параметра T*. Искомая функция имеет вид $W = \ln(13{,}75 - l) + 1{,}24\ln x_1 + 1{,}60\ln x_2$. Разумеется, оценки параметров будут различными для разных решеток наблюдений. Как показали расчеты, величина среднего отклонения достаточно мала; в данном случае это позволяет считать полученные результаты приемлемыми.

5. ВОЗМОЖНЫЕ ПЕРСПЕКТИВЫ И ОБОБЩЕНИЯ

Предложенный метод компромисса на основе линейного агрегирования норм компенсации, по-видимому, может быть использован и в макромоделировании, на уровне равновесно-оптимальных народнохозяйственных моделей. Не рассуждая строго, тем не менее можно наметить некоторые общие подходы к дальнейшему более глубокому экономико-математическому анализу. Нетрудно видеть, даже в условиях рыночного равновесия оценка своего положения каждой группой сравнительно с положением других групп может приводить к "зависти", "обиде" и т. п. Очевидно, степень нарушения неравенств типа $U_k(l_k, x_k) > U_k(l_i, x_i)$ различна, в соответствии с чем возможно возникновение социальной напряженности. Можно представить себе регулирование рынка с целью уменьшения такой напряженности путем создания условий, способствующих максимизации некоторой компромиссной целевой функции, например по схеме Роулза: $z = \min\limits_k W(l_k, x_k) \to \max$, где k — номер социальной группы, а переменные l_k, x_k имеют прежний смысл.

По-видимому, при достаточно естественных условиях оптимальные состояния в смысле данной целевой функции будут лежать между равновесными состояниями подобно тому, как компромиссные затраты труда и его оплата находились между индивидуально оптимальными значениями. В этом случае можно было ожидать, что суммарный баланс по труду и продуктам тоже не будет слишком нарушаться, а значит, и равновесные цены — не слишком отличаться от соответствующих объективно обусловленных оценок по критерию z. В условиях динамики, когда само статическое равновесие непрерывно меняется, подобное "сдерживание" дифференциации, возможно, не будет противоречить общей эффективности народного хозяйства.

Разумеется, подобные спекулятивные рассуждения носят чисто умозрительный характер гипотез и должны подкрепляться серьезным модельным анализом, который, мы надеемся, будет проведен.

На пути построения таких моделей стоит ряд проблем, одна из которых заключается в построении компромиссной функции общественного благосостояния $W(l, x)$ на основе норм компенсации частных целевых функций $U_k(l_k, x_k)$. Даже зная вид этих функций, нельзя непосредственно по нормам замещения восстанавливать глобальный функционал $W(l, x)$, поскольку аргументы у частных функций U различны. Поэтому необходимо иметь какие-то гипотезы относительно "частных этик", задаваемых, например, в виде сумм $W_k = \Sigma\lambda_k U_k$, а кроме того, относительно способа соотношения трудозатрат между собой. Простейшая схема может основываться на предположении сепарабельности функций U и на том, что переменные векторов потребления x имеют одно и то же значение разных групп, а затраты труда l сопоставимы между собой, с точки зрения групп, так, что функции усталости $(-f_k(l))$ связаны между собой линейно: $f_k(l) = A_{ki}f(l) + B_{ki}$. В этом простейшем случае можно было бы попытаться определять компромиссную целевую функцию одним из рассмотренных выше методов.

6. ОПТИМИЗАЦИЯ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ И КОМПРОМИССНЫХ РЕШЕНИЙ

Пусть $U_1(l, s)$ и $U_2(l, s)$ — выпуклые вверх непрерывно дифференцируемые функции полезности, заданные в области $l, s > 0$, и $E_k(l, s) = -U'_{kl}/U'_{ks}$ — норма компенсации труда заработной платой.

---

*Все вычисления проделаны дипломницей Экономического факультета МГУ В. Демченко.

Рассмотрим задачу (для $k = 1, 2$)

$$U_k(l, s) \to \max,$$
$$l \geqslant 0,\ s = f(l), \tag{16}$$

где $f(l)$ — непрерывно дифференцируемая функция такая, что $f' > 0$.

Задача (16) является моделью трудового поведения абстрактного работника, выбирающего интенсивность (или объем труда) l при известном законе его оплаты в соответствии со своим трудовым предпочтением [2]. Будем считать, что она имеет оптимальное решение, необходимым условием чего является равенство

$$E_k(l_k^*, s_k^*) = f'(l^*) \tag{17}$$

в точке оптимума. Обозначим $E_k(l) = E_k(l, f(l))$. Рассмотрим задачу

$$W(l, s) \to \max$$
$$l \geqslant 0,\ s = f(l), \tag{18}$$

где $W(l, s)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial W}{\partial l} + E(l, s)\frac{\partial W}{\partial s} = 0 \tag{19}$$

и

$$E(l, s) = \lambda_1 E_1(l, s) + \lambda_2 E_2(l, s),\ \lambda_k > 0,\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1. \tag{20}$$

Другими словами, норма замещения функции $W(l, s)$ в каждой точке (l, s) является выпуклой комбинацией норм E_1 и E_2.

В силу выпуклости кривых безразличия $s_k(l, \hat{l}, \hat{s})$, проходящей через точку $(\hat{l}, \hat{s})$, $s - \hat{s} \geqslant (l - \hat{l})E_k(\hat{l}, \hat{s})$ при $s = s_k(l, \hat{l}, \hat{s})$. Значит, будет выполняться и неравенство

$$s - \hat{s} \geqslant (l - \hat{l})E(\hat{l}\,\hat{s}) \tag{21}$$

для точек кривой $s = \lambda_1 s_1(\,) + \lambda_2 s_2(\,)$, удовлетворяющей уравнению

$$\frac{ds}{dl} = E(l, s), \tag{22}$$

т. е. кривые безразличия функции $W(l, s)$ тоже будут выпуклыми вниз.

Очевидно также, что для решения задачи (18) выполняются необходимые условия, аналогичные (17)

$$E(l^*, s^*) = f'(l^*). \tag{23}$$

Цель нашего анализа — установление связи между оптимальными решениями (l_k^*, s_k^*) и (l^*, s^*) задач (16) и (18). В частности, будут выявлены условия, обеспечивающие попадание величин l^* и s^* в интервалы $[l_1^*, l_2^*]$, $[s_1^*, s_2^*]$.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть решения задач* (1) *различаются* (*для определенности,* $l_1 < l_2$) *и выполняется хотя бы одно из двух условий:*

1) $E_k'(l) > 0$ *и* $f(l)$ *выпукла вверх и* $f'(l) > 0$.

2) $E_1(l, s) < E_2(l, s)$ *или* $E_1(l, s) > E_2(l, s)\ \forall\, l, s > 0$.

Тогда

$$l_1^* < l^* < l_2^*,\ s_1^* < s^* < s_2^*. \tag{24}$$

Доказательство. 1. Пусть выполняются условия 1). Выпуклость $f(l)$ дает: $E_1(l_1^*) = f'(l_1^*) \geqslant f'(l_2^*) = E_2(l_2^*)$, а монотонность функций $E_k(l)$: $E_1(l_1^*) < E_2(l_1^*)$ и $E_2(l_1^*) < E_2(l_2^*)$, что вместе приводит к неравенствам

$$f'(l_1^*) > E_2(l_1^*),\ f'(l_2^*) < E_1(l_2^*). \tag{25}$$

Обозначив через A и B соответствующие положительные величины, имеем

$$A = f'(l_1^*) - E_2(l_1^*) > 0, B = E_1(l_2^*) - f'(l_2^*) > 0. \quad (26)$$

Для значений функции $E(l)$ получим

$$E(l_1^*) = \lambda_1 E_1(l_1^*) + \lambda_2 E_2(l_1) = \lambda_1 f'(l_1) + \lambda_2 [f'(l_1^*) - A] = f'(l_1^*) - \lambda_2 A,$$

$$E(l_2^*) = \lambda_1 E_1(l_2^*) + \lambda_2 E_2(l_2^*) = f'(l_2^*) + \lambda_2 B.$$

Рассмотрим функцию $F(l) = E(l) - f'(l)$. Она непрерывна (и даже строго монотонна, так как $E' \to 0, f'' < 0$). В точках l_1^*, l_2^* имеем

$$F(l_1^*) = -\lambda_1 A < 0, F(l_2^*) = \lambda_2 B > 0. \quad (27)$$

В силу соответствующей теормы анализа найдется такая точка $l^* : l_1^* < l^* < l_2^*$, что $F(l^*) = 0$, т. е. $E(l^*) = f'(l^*)$. Это означает существование единственного решения задачи $l^*, s^* = f(l^*)$, лежащего внутри отрезков $[l_1^*, l_2^*], [s_1^*, s_2^*]$.

2. Пусть выполняется условие доминирования (2). Тогда случай $E_1(l) > E_2(l)$ сразу приводит к (25), и мы получаем тот же вывод о существовании решения l^* внутри отрезка $[l_1^*, l_2^*]$, правда, необязательно единственного (так как f — необязательно выпукла, а E_k могут быть не монотонными. Случай $E_2(l) > E_1(l)$ приводит к тому же результату, поскольку означает лишь смену знака неравенства (26), что все равно даст предыдущий результат. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть число задач типа* (16) $N > 2$ *и задача* (18) *имеет целевую функцию* W, *удовлетворяющую условию* (19), *где* $E(l, s) = \Sigma \lambda_k E_k(l, s)$, *а* $E_k(l, s)$ — *соответствующие нормы компенсации. Тогда при выполнении условий теоремы* 1 (*строгая упорядоченность величин* E_k *или положительность их производных* $E_k'(l)$ *при выпуклости возрастающей функции* $f(l)$) *будут иметь место соотношения*

$$\min_k l_k^* < l^* < \max_k l_k^* \quad \min_k s_k^* < s^* < \max_k s_k^*, \quad (28)$$

где (l_k^*, s_k^*) — *решение соответствующих задач.*

Доказательство. Пусть нормы компенсации упорядочены так, что $E_k(l, k) < E_{k+1}(l, s)$ $\forall l, s$. Докажем справедливость неравенства (28) по индукции. Пусть оно выполняется для $n < M - 1$. Покажем его выполнение и для $n = M$. Пусть $\lambda_k > 0, \sum_{k=1}^{M} \lambda_k = 1$. Обозначим $E^{M-1} = \sum_{k<M} \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_M} E_k$. Очевидно, для оптимального решения задачи (18) с целевой функцией W^{M-1}, соответствующей норме компенсации E^{M-1}, будет выполняться неравенство

$$\min_{k<M} l_k^* < l^{M-1*} < \max_{k<M} l_k^*. \quad (29)$$

Так как $E_k < E_{k+1}$, то $E_M > E^{M-1}$ и для $E^M = \lambda_M E_M + (1 - \lambda_M) E^{M-1}$ соответствующее решение оптимальной задачи l^{M*} должно удовлетворять неравенству $\min(l_M^*, l^{M-1*}) < l^{M*} < \max(l_M^*, l^{M-1*})$ или в силу (29) $\min_{k \leqslant M} l_k^* < l^{M*} < \max_{k \leqslant M} l_k^*$. По определению E^{M-1} имеем

$$E^M = \lambda_M E_M + (1 - \lambda_M) \sum_{k<M} \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_k} = \sum_{k \leqslant M} \lambda_k E_k = E.$$

Значит, необходимое неравенство выполняется для решения задачи с целевой функцией W, соответствующего норме E. Теорема доказана.

7. УСЛОВИЯ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ СИСТЕМЫ ДЛЯ СЕПАРАБЕЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ПОЛЕЗНОСТИ

Пусть для достаточно гладких сепарабельных функций

$$U_k(l, x_1, \ldots, x_n) = f_{k0}(l) + \sum_{j=1}^{n} f_{kj}(x_j),\ k = 1, \ldots, N,$$

нормы компенсации выражаются как $E_{kj} = -f'_{k0}(l) : f'_{kj}(x_j)$, а агрегированная норма компенсации будет иметь вид

$$E_j = -\sum_{k=1}^{N} \lambda_k f'_{k0}(l)/f'_{kj}(x_j).$$

Система уравнений для определения компромиссной функции полезности

$$(\partial W/\partial l) + E_j(\partial W/\partial x_j) = 0,\ j = 1, \ldots, n. \tag{30}$$

Для любой пары переменных x_i, x_j в области компромисса должно выполняться равенство $\partial^2 W/\partial x_i \partial x_j = \partial^2 W/\partial x_j \partial x_i$. Введем обозначения: $W_j = \partial W/\partial x_j$, $W_{ij} = \partial^2 W/\partial x_i \partial x_j$, $E_{ij} = \partial E_i/\partial x_j$, причем переменной 1 присваиваем номер 0.

Рассмотрим два уравнения из системы (30), превращающиеся в тождества, когда $W(l, x_1, \ldots, x_n)$ — решение системы

$$\begin{aligned} &W_0 + E_j W_j \equiv 0, \\ &W_0 + E_i W_i \equiv 0. \end{aligned} \tag{31}$$

Дифференцируя первое из них по x_i, а второе по x_j, получим

$$\begin{aligned} &W_{0i} \equiv -E_i W_{ij}, \\ &W_{0j} \equiv -E_j W_{ij}, \end{aligned} \tag{32}$$

так как E_j зависит от l, x_j, а E_i — от l, x_i.

Дифференцируя затем те же тождества по l, имеем

$$\begin{aligned} &W_{00} + E_{0i} W_i + E_i W_{0i} \equiv 0, \\ &W_{00} + E_{0j} W_j + E_j W_{0j} \equiv 0. \end{aligned} \tag{33}$$

Подставляя в последние соотношения вместо W_i, W_j их выражения из (31), а вместо W_{0i} и W_{0j} — из (32), получим

$$W_0\left(\frac{E_{0j}}{E_j} - \frac{E_{0i}}{E_i}\right) - E_i E_j W_{ij} + E_i E_j W_{ij} \equiv 0, \tag{34}$$

откуда условие интегрируемости принимает вид

$$E_i(l, x_i) E_{0j}(l, x_j) \equiv E_j(l, x_j) E_{0i}(l, x_i) \tag{35}$$

для любой пары переменных (x_i, x_j). Подставив вместо всех норм компенсации их выражения через слагаемые сепарабельных функций полезности, будем иметь

$$\sum_{k=1}^{N} \lambda_k \frac{f'_{k0}(l)}{f'_{ki}(x_i)} \sum_{k=1}^{N} \lambda_k \frac{f''_{k0}(l)}{f_{kj}(x_j)} \equiv \sum_{k=1}^{N} \lambda_k \frac{f'_{k0}(l)}{f'_{kj}(x_j)} \sum_{k=1}^{N} \lambda_k \frac{f''_{k0}(l)}{f'_{ki}(x_i)}. \tag{36}$$

Это тождество выполняется, если имеет место

$$f'_{r0}(l) f''_{k0}(l) \equiv f'_{k0}(l) f''_{r0}(l). \tag{37}$$

Соотношение (39) эквивалентно следующему

$$f_{r0}(l) = A_{rk} f_{k0}(l) + B_{rk}, \qquad (38)$$

где $A_{rk} > 0$, B_{rk} – константы.

Как видим, это – достаточное условие, обеспечивающее решение системы (30) в виде компромиссной функции полезности

$$W(l, x_1, \ldots, x_n) = F(l) + \sum_{j=1}^{n} F_j(x_j).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кини Р.Л., Райфа Х.* Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения. М.: Радио и связь, 1981.
2. *Гаврилец Ю.Н.* Об использовании функций полезности в экономическом анализе // Экономика и мат. методы. 1988. Т. XXIV. Вып. 5.

Поступила в редакцию
16 VII 1991