

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

ОДНОСТОРОННИЕ НАИЛУЧШИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ И ИХ ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ

Финкельштейн Ю.Ю.

(Москва)

Исследуется простейший случай, когда роль выпуклой оболочки играет полигон Клейна. Тем самым продолжено установление связи между классической теоретико-числовой проблематикой и целочисленным линейным программированием.

1. В [1] начато выяснение связей между односторонними наилучшими приближениями и некоторой модификацией обычных непрерывных дробей.

Настоящая работа продолжает [1]. Здесь основное внимание обращается на геометрическую интерпретацию и устанавливается связь односторонних наилучших приближений и полигонов Клейна.

2. Напомним некоторые определения и утверждения, касающиеся классических наилучших приближений. Пусть α — вещественное число; x, y — целые, $x \geq 1$. Рациональная дробь y/x называется наилучшим приближением (второго рода) числа α , если выполнено следующее условие (см. [2–4]). Из $z/t \neq y/x$, $0 < t \leq x$, где z, t — целые, необходимо вытекает

$$|t\alpha - z| > |x\alpha - y|.$$

Известно [1, 2], что задача нахождения наилучших приближений в указанном выше смысле сводится к вычислению подходящих дробей для регулярной непрерывной дроби, в которую разлагается число α

$$\alpha = q_0 + \frac{1}{|q_1|} + \frac{1}{|q_2|} + \dots,$$

где q_0 — целое ≥ 0 , все остальные q_i — натуральные*. Имеют место утверждения.

Утверждение 1 [2, с. 35]. *Всякое наилучшее приближение второго рода — это подходящая дробь**.*

Утверждение 2 [2, с. 37]. *Всякая подходящая дробь — наилучшее приближение второго рода; единственное (тривиальное) исключение представляет*

$$\alpha = q_0 + \frac{1}{2}, \quad P_0/Q_0 = q_0/1.$$

Кроме того, имеет место следующее утверждение.

*Это современная экономная запись непрерывной дроби. Развернутая запись имеет вид

$$\alpha = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \dots}}.$$

**Т.е. несократимые дроби с натуральным знаменателем:

$$P_0/Q_0 = q_0/1, \quad P_1/Q_1 = q_0 + 1/q_1,$$

$$P_2/Q_2 = q_0 + 1/\left(q_1 + \frac{1}{q_2}\right), \dots$$

Утверждение 3 [2, с. 13, 16]. Подходящие дроби четного порядка образуют возрастающую, а подходящие дроби нечетного порядка — убывающую последовательность.

Обе последовательности сходятся к α . Всякая подходящая дробь четного порядка меньше α , а нечетного — больше α . Единственное исключение, возникающее при рациональном α , — это последняя подходящая дробь, равная α .

Таким образом, наилучшие приближения второго рода — чередующиеся приближения снизу и сверху. Далее употребляются обычные обозначения: $[\beta]$ — целая часть β ; $\{\beta\}$ — дробная часть β ; $\|\beta\|$ — расстояние от β до ближайшего целого числа.

3. Естественно определяются односторонние наилучшие приближения.

Определение 1'. Рациональная дробь y/x , $x \geq 1$, называется наилучшим приближением снизу числа α , если выполнено условие

$$\begin{aligned} \alpha x - y &= \{\alpha x\} & \text{при } x = 1, \\ \alpha x - y &= \{\alpha x\} < \min_{t=1, \dots, x-1} \{\alpha t\} = \{\alpha t\} & \text{при } x \geq 2. \end{aligned} \quad (1)$$

Определение 1''. Рациональная дробь y/x , $x \geq 1$, называется наилучшим приближением сверху числа α , если выполнено условие

$$\begin{aligned} y - \alpha x &= \{1 - \{\alpha x\}\} & \text{при } x = 1, \\ y - \alpha x &= \{1 - \{\alpha x\}\} < \min_{t=1, \dots, x-1} \{1 - \{\alpha t\}\} & \text{при } x \geq 2. \end{aligned} \quad (2)$$

4. Имеют место следующие теоремы.

Теорема 1'. Последовательность рациональных дробей — наилучших приближений снизу числа α (упорядоченная по возрастанию знаменателей) — совпадает с последовательностью подходящих дробей (упорядоченных по возрастанию знаменателей) для непрерывной дроби, в которую разлагается число α

$$\alpha = q'_0 + \frac{1}{|q'_1|} - \frac{1}{|q'_2|} - \frac{1}{|q'_3|} - \dots, \quad (3)$$

где $q'_1 - \frac{1}{|q'_2|} - \frac{1}{|q'_3|}$ — приведенная регулярная непрерывная дробь (eine reduzierte regelmäßige Kettenbruch) [3–6].

Теорема 1''. Последовательность рациональных дробей — наилучших приближений сверху числа α (упорядоченная по возрастанию знаменателей) — совпадает с последовательностью подходящих дробей (упорядоченных по возрастанию знаменателей) для приведенной регулярной непрерывной дроби, в которую разлагается число α

$$\alpha = q''_0 - \frac{1}{|q''_1|} - \frac{1}{|q''_2|} - \frac{1}{|q''_3|} - \dots \quad (4)$$

5. Приведенные регулярные непрерывные дроби впервые, по-видимому, рассмотрел А.Ф. Мёбиус [7] и подробно изучила Э. Цурль [6]. Некоторые свойства односторонних приближений в связи с разложением чисел в регулярные непрерывные дроби исследовали Л.Г. Эгган и И. Нивен [8].

Автору неизвестны работы, в которых односторонние наилучшие приближения связывали бы с разложением приближаемого числа в приведенные регулярные непрерывные дроби (теорема 1') и в непрерывные дроби, несущественно отличающиеся от приведенных регулярных (теорема 1'').

6. Из определений 1' и 1'' следует, что если дробь y/x — наилучшее приближение сверху числа α , то $-y/x$ — наилучшее приближение снизу ($-\alpha$), и наоборот: если y/x — наилучшее приближение снизу числа α , то $-y/x$ — наилучшее приближение сверху ($-\alpha$). Поэтому можно ограничиться изучением наилучших приближений снизу (или сверху).

7. Приведенные рассуждения перекликаются с проблематикой целочисленного линейного программирования. Этому вопросу была посвящена дипломная работа Л.И. Аруина, выполненная под руководством автора. Ее содержание опубликовано

в [9]. Один из результатов Л.И. Аруина был независимо получен Д.С. Рубиным [10]. Трудности, возникающие при обобщении классического алгоритма непрерывных дробей, отмечал еще А.Я. Хинчин [11].

Итак, подмечена любопытная связь между классической теоретико-числовой проблематикой и целочисленным линейным программированием. Она осуществляется через известную интерпретацию наилучших приближений как вершин соответствующих полигонов (полигонов Клейна [12, 13]).

Подчеркнем существенное отличие, возникающее при геометрической интерпретации обычных (классических) и односторонних наилучших приближений. Обычные наилучшие приближения соответствуют вершинам полигонов Клейна, причем четные — это вершины нижнего полигона, а нечетные — верхнего.

Для односторонних приближений геометрическая интерпретация тоже дается на полигонах Клейна. Здесь все приближения снизу лежат на нижнем полигоне, а сверху — на верхнем. Однако, вообще говоря, односторонние наилучшие приближения не обязательно являются вершинами полигонов Клейна, а могут лежать и на их сторонах, не будучи при этом вершинами.

Заметим, что сам Ф. Клейн никак не называл эти полигоны (возможно, полигонами Клейна их назвал Б.Н. Делоне [13]). Кроме того, Ф. Клейн говорил не о нижнем и верхнем полигонах, а соответственно о правом и левом [12, с. 17] (разница чисто терминологическая).

8. Существует много аналогий между обычными (регулярными) непрерывными дробями и приведенными регулярными непрерывными дробями. Ограничимся одной из основных (см. [2, с. 12, формула (8)] и [6, с. 683, формула (4)]).

Для обычных непрерывных дробей

$$P_{k-1}/Q_{k-1} - P_k/Q_k = (-1)^k / Q_k Q_{k-1}.$$

Для приведенных регулярных непрерывных дробей

$$P'_{k-1}/Q'_{k-1} - P'_k/Q'_k = 1/Q'_k Q'_{k-1}.$$

9. Среди упомянутой литературы особо выделяется фундаментальная монография О. Перрона, неоднократно переиздававшаяся [3–5], а также его же обстоятельная ранняя работа [14]. Хороший обзор ранних исследований по непрерывным дробям дан в известной монографии Я. Коксмы [15]. Среди более поздних стоит упомянуть обзор Л. Бернштейна [16], а также А. Брентье [17]. Особое место занимает классическая статья К. Якоби [18].

10. Докажем теорему 1' (теорема 1'' доказывается аналогично).

Введем следующие обозначения для односторонних наилучших приближений (имея в виду, что это несократимые дроби с натуральным знаменателем): P'_n/Q'_n — n -е наилучшее приближение снизу, $n = 0, 1, \dots$; P''_n/Q''_n — n -е наилучшее приближение сверху, $n = 0, 1, \dots$.

Лемма 1.

$$P'_0 = [\alpha], \quad Q'_0 = 1. \quad (5)$$

Если $\{\alpha\} = 0$, то $\alpha = q'_0$, $P'_0/Q'_0 = \alpha$ и вычисления завершаются. Если же $\{\alpha\} \neq 0$, то

$$P'_1 = - \left[- \frac{1}{\{\alpha\}} \right] [\alpha] + 1, \quad Q'_1 = - \left[- \frac{1}{\{\alpha\}} \right]. \quad (6)$$

Доказательство. Из определения 1' следует, что $Q'_0 = 1$, $P'_0 = [Q'_0 \alpha] = [\alpha]$. Если $\{\alpha\} \neq 0$, то Q'_1 и P'_1 — определены. Очевидно, что Q'_1 удовлетворяет соотношению

$$(Q'_1 - 1) \{\alpha\} < 1 \leq Q'_1 \{\alpha\} < 2,$$

откуда следует, что $Q'_1 = - \left[-1/\{\alpha\} \right]$. Далее, $P'_1 = [Q'_1 \alpha] = [Q'_1 [\alpha] + Q'_1 \{\alpha\}] = - \left[-1/\{\alpha\} \right] [\alpha] + 1$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Если t — целое, $1 \leq t < Q'_{n+1}$, $t \neq Q'_n$, то $\{\alpha t\} > \{\alpha Q'_n\}$.

Доказательство. 1) Ясно, что $\{\alpha t\} \geq \{\alpha Q'_n\}$ (следствие определения 1').
 2) Если $t < Q'_n$, то лемма вытекает из определения 1'. 3) Пусть $Q'_n < t < Q'_{n+1}$. Допустим, что $\{\alpha t\} = \{\alpha Q'_n\}$,

$$0 < t - Q'_n < Q'_{n+1}, \quad \{\alpha(t - Q'_n)\} = 0.$$

Это противоречит определению 1'. Лемма 2 доказана.
 Лемма 3.

$$\begin{aligned} \{\eta - \delta\} &= \begin{cases} \{\eta\} - \{\delta\}, & \text{если } \{\eta\} \geq \{\delta\}, \\ 1 + \{\eta\} - \{\delta\}, & \text{если } \{\eta\} < \{\delta\}, \end{cases} \\ [\eta - \delta] &= \begin{cases} [\eta] - [\delta], & \text{если } \{\eta\} \geq \{\delta\}, \\ [\eta] - [\delta] - 1, & \text{если } \{\eta\} < \{\delta\}. \end{cases} \end{aligned}$$

Она является непосредственным следствием определения функций $\{x\}$ и $[x]$.

Лемма 4. Пусть $n \geq 1$, тогда если $\{\alpha Q'_n\} = 0$, то $\alpha = P'_n/Q'_n$ и вычисления завершаются. Если же $\{\alpha Q'_n\} \neq 0$, то

$$Q'_{n+1} = q'_{n+1}Q'_n - Q'_{n-1}, \quad (7)$$

$$P'_{n+1} = q'_{n+1}P'_n - P'_{n-1}, \quad (8)$$

$$\text{где } q'_{n+1} = - \left[- \frac{\{\alpha Q'_{n-1}\}}{\{\alpha Q'_n\}} \right] \star. \quad (9)$$

Доказательство. 1) Ясно, что $Q'_{n+1} = m_0 Q'_n - r_0$, где m_0, r_0 — целые, $m_0 \geq 2$, $0 \leq r_0 \leq Q'_n - 1$. 2) Из леммы 2 следует, что если $r_0 \neq Q'_{n-1}$, то

$$\{\alpha r_0\} > \{\alpha Q'_{n-1}\}. \quad (10)$$

3) Определим целое S

$$(S-1)\{\alpha Q'_n\} < \{\alpha Q'_{n-1}\} \leq S\{\alpha Q'_n\}. \quad (11)$$

Отсюда следует

$$S = - \left[- \frac{\{\alpha Q'_{n-1}\}}{\{\alpha Q'_n\}} \right]. \quad (12)$$

4) Пусть $m_0 \leq S-1$. Тогда

$$\{m_0 Q'_n \alpha\} = m_0 \{\alpha Q'_n\} < \{\alpha Q'_{n-1}\} \leq \{r_0 \alpha\}.$$

Применяя лемму 3, получаем $\{\alpha(m_0 Q'_n - r_0)\} = 1 + m_0 \{\alpha Q'_n\} - \{\alpha r_0\} > \{\alpha Q'_{n-1}\}$, что невозможно.

Итак, $m_0 \geq S$.

5) Рассмотрим

$$\{\alpha(SQ'_n - Q'_{n-1})\} = \{\alpha SQ'_n - \alpha Q'_{n-1}\}.$$

Возможны два случая а) $S\{\alpha Q'_n\} < 1$, т.е. $\{\alpha SQ'_n\} = S\{\alpha Q'_n\} \geq \{\alpha Q'_{n-1}\}$, $\{\alpha SQ'_n - \alpha Q'_{n-1}\} = S\{\alpha Q'_n\} - \{\alpha Q'_{n-1}\}$. В силу (11) получаем $\{\alpha(SQ'_n - Q'_{n-1})\} < \{\alpha Q'_n\}$;

б) $S\{\alpha Q'_n\} \geq 1$. Согласно (11)

$$1 - \{\alpha Q'_{n-1}\} + \{\alpha SQ'_n\} < \{\alpha Q'_n\}. \quad (14)$$

*Заметим, что $-[-a] = [a]$, где $[a]$ — наименьшее целое число, не меньшее a .

Кроме того, очевидно

$$\{\alpha S Q'_n\} < \{\alpha Q'_n\} \leq (S-1) \{\alpha Q'_n\} < \{\alpha Q'_{n-1}\}. \quad (15)$$

Из (14), (15) и леммы 3

$$\{\alpha S Q'_n - \alpha Q'_{n-1}\} = 1 + \{\alpha S Q'_n\} - \{\alpha Q'_{n-1}\} < \{\alpha Q'_n\}.$$

Итак, во всех случаях

$$\{\alpha(S Q'_n - Q'_{n-1})\} < \{\alpha Q'_n\}. \quad (16)$$

Из (16) следует

$$m_0 \leq S. \quad (17)$$

Сравнивая (13) и (17), получаем

$$m_0 = S. \quad (18)$$

6) Из п. 5) вытекает

$$Q'_{n-1} \leq r_0 \leq Q'_n - 1. \quad (19)$$

7) Допустим, что $r_0 > Q'_{n-1}$.

С учетом леммы 2 возможны два случая:

$$a) (S-1) \{Q'_n \alpha\} < \{Q'_{n-1} \alpha\} < \{r_0 \alpha\} \leq S \{Q'_n \alpha\}.$$

При этом $0 < \{r_0 \alpha\} - \{Q'_{n-1} \alpha\} < \{Q'_n \alpha\}$ и

$$0 < r_0 - Q'_{n-1} < Q'_n,$$

$$\{(r_0 - Q'_{n-1}) \alpha\} < \{Q'_n \alpha\},$$

что противоречит определению 1';

$$б) \{Q'_{n-1} \alpha\} \leq S \{Q'_n \alpha\} < \{r_0 \alpha\}.$$

Согласно лемме 1, $\{\alpha(S Q'_n - r_0)\} = 1 + S \{Q'_n \alpha\} - \{r_0 \alpha\} > S \{Q'_n \alpha\} > \{Q'_n \alpha\}$, что тоже противоречит определению 1'.

Итак,

$$r_0 = Q'_{n-1}. \quad (20)$$

8) Введем обозначение

$$q'_{n+1} = S. \quad (21)$$

9) Из (12), (18), (20) и (21)

$$Q'_{n+1} = q'_{n+1} Q'_n - Q'_{n-1}, \quad (22)$$

где

$$q'_{n+1} = - \left[- \frac{\{\alpha Q'_{n-1}\}}{\{\alpha Q'_n\}} \right].$$

Формула (7) доказана.

10) Из (22) имеем

$$\alpha Q'_{n+1} = q'_{n+1} \alpha Q'_n - \alpha Q'_{n-1}. \quad (23)$$

11) Из леммы 3 и (23) следует

$$[\alpha Q'_{n+1}] = \begin{cases} [q'_{n+1} \alpha Q'_n] - [\alpha Q'_{n-1}], & \text{если } \{q'_{n+1} \alpha Q'_n\} \geq \{\alpha Q'_{n-1}\}, \\ [q'_{n+1} \alpha Q'_n] - [\alpha Q'_{n-1}] - 1, & \text{если } \{q'_{n+1} \alpha Q'_n\} < \{\alpha Q'_{n-1}\}, \end{cases} \quad (24)$$

12) Из (21) и определения S вытекает

$$[q'_{n+1} \alpha Q'_n] = \begin{cases} q'_{n+1} [\alpha Q'_n], & \text{если } q'_{n+1} \{ \alpha Q'_n \} < 1, \\ q'_{n+1} [\alpha Q'_n] + 1, & \text{если } q'_{n+1} \{ \alpha Q'_n \} \geq 1. \end{cases} \quad (25)$$

13) Из (21) и определения S имеем

$$\{ q'_{n+1} \alpha Q'_n \} \geq \{ \alpha Q'_{n-1} \}, \quad q'_{n+1} \{ \alpha Q'_n \} < 1, \quad (26)$$

$$\{ q'_{n+1} \alpha Q'_n \} < \{ \alpha Q'_{n-1} \}, \quad q'_{n+1} \{ \alpha Q'_n \} \geq 1. \quad (27)$$

14) Рассмотрим $[\alpha Q'_{n+1}]$.

а) Пусть $q'_{n+1} \{ \alpha Q'_n \} < 1$.

Из (24) — (26) получаем

$$\begin{aligned} [\alpha Q'_{n+1}] &= [q'_{n+1} \alpha Q'_n] - [\alpha Q'_{n-1}] = q'_{n+1} [\alpha Q'_n] - [\alpha Q'_{n-1}], \\ [\alpha Q'_{n+1}] &= q'_{n+1} [\alpha Q'_n] - [\alpha Q'_{n-1}], \end{aligned} \quad (28)$$

если $q'_{n+1} \{ \alpha Q'_n \} < 1$.

б) Пусть $q'_{n+1} \{ \alpha Q'_n \} \geq 1$.

Из (24), (25), (27) имеем

$$\begin{aligned} [\alpha Q'_{n+1}] &= [q'_{n+1} \alpha Q'_n] - [\alpha Q'_{n-1}] - 1 = q'_{n+1} [\alpha Q'_n] + 1 - [\alpha Q'_{n-1}] - 1 = \\ &= q'_{n+1} [\alpha Q'_n] - [\alpha Q'_{n-1}]. \\ [\alpha Q'_{n+1}] &= q'_{n+1} [\alpha Q'_n] - [\alpha Q'_{n-1}], \end{aligned} \quad (29)$$

если $q'_{n+1} \{ \alpha Q'_n \} \geq 1$,

а из (28) и (29)

$$[\alpha Q'_{n+1}] = q'_{n+1} [\alpha Q'_n] - [\alpha Q'_{n-1}]. \quad (30)$$

15) Из определения 1' следует, что

$$P'_n = [\alpha Q'_n]. \quad (31)$$

16) Из (30) и (31)

$$P'_{n+1} = q'_{n+1} P'_n - P'_{n-1}. \quad (32)$$

Формула (8) доказана.

Из (12), (21), (22) и (32) получаем, что лемма 4 полностью доказана.

Теорема 1' следует из леммы 4, а также из определения приведенных регулярных непрерывных дробей и из однозначности разложения в приведенные регулярные непрерывные дроби $[2, 3, 5]$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фinkelъштейн Ю.Ю. Односторонние наилучшие приближения и непрерывные дроби // Тр. 4-й зимней школы по математическому программированию и смежным вопросам. 25 января — 6 февраля 1971 г., г. Дрогобыч. Вып. 2. М.: Научный Совет по комплексной проблеме "Оптимальное планирование и управление народным хозяйством", ЦЭМИ АН СССР, МИСИ, Дрогобыч. ун-т, 1971.
2. Хинчин А.Я. Цепные дроби. М.: Физматгиз, 1961.
3. Perron O. Die Lehre von den Kettenbrüchen. B. 1. Elementare Kettenbrüche. Stuttgart, 1954.
4. Perron O. Die Lehre von den Kettenbrüchen. B. 2. Analytisch-funktiontheoretische Kettenbrüche. Stuttgart, 1957.
5. Perron O. Die Lehre von den Kettenbrüchen. Stuttgart, 1929.
6. Zurl E. Theorie der reduziert-regelmäßigen Kettenbrüche // Mathematische Annalen. 1934. V. 110. № 5.

7. Möbius A.F. Beiträge von den Kettenbrüchen, nebst einem Anhang dioptrischen Inhalts // J. für die reine und angewandte Mathematik. 1830. B. 6. H. 3.
8. Eggen L.G., Niven I. A Remark on One-sided Approximation // Proc. Amer. Mathematical Soc. 1961. V. 12. № 4.
9. Аруин Л.И. О гранях выпуклой линейной оболочки множества целых точек, принадлежащих множеству допустимых решений задачи целочисленного линейного программирования // Тр. 4-й зимней школы по математическому программированию и смежным вопросам. 25 января — 6 февраля 1971 г., г. Дрогобыч, Вып. 1. М.: Научный Совет по комплексной проблеме "Оптимальное планирование и управление народным хозяйством", ЦЭМИ АН СССР, МИСИ, Дрогобыч. ун-т, 1971.
10. Rubin D.S. On the unlimited number of faces in integer nulls of linear programs with single constraint // Oper. Res. 1970. V. 18. № 5.
11. Хинчин А.Я. Элементы теории чисел // Энциклопедия элементарной математики. Кн. 1. М.; Л.: Гостехтеориздат, 1951.
12. Klein F. Ausgewählte Kapitel der Zahlentheorie. B. 1. Göttingen, 1896.
13. Делоне Б.Н. Петербургская школа теории чисел. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1947.
14. Perron O. Grundlagen für eine Theorie des Jacobischen Kettenbruchalgorithmus // Math. Annalen. 1907. № 64.
15. Koksma J.F. Diophantische Approximationen // Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. B. 4. Berlin, Leipzig, 1936.
16. Bernstein L. The Jacobi-Perron Algorithm. Its Theory and Application. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 1971.
17. Brentjes A.J. Multi-dimensional Continued Fraction Algorithms. Amsterdam, 1981.
18. Jacobi C.G.J. Allgemeine Theorie der Kettenbrüchigen Algorithmen, in welchen jede Zahl aus drei vorhergehenden gebildet wird // J. Reine Angew. Math. 1868. B. 69.

Поступила в редакцию
26 III 1991