

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

НЕРАВНОВЕСНАЯ ЭКОНОМИКА С КОМПЕНСИРУЮЩИМ СПРОСОМ

Мовшович С.М.

(Москва)

Рассматриваются модели равновесия при фиксированных ценах, в которых участники, формируя спрос, учитывают дефицитность продуктов и уровень удовлетворения заказов. Модели используются для оценки влияния налогов, государственных расходов и других макрорегуляторов на уровень занятости и национальный доход.

1. ВВЕДЕНИЕ

При моделировании неравновесной экономики поведение участников описывается такими же оптимизационными задачами, включающими критерий и внутренние технологические и бюджетные ограничения, как и в теории вальрасовского равновесия. Они лишь дополняются *внешними* (perceived) ограничениями на покупку (или продажу) дефицитных (неходовых) продуктов. Известны различные принципы установления этих границ. Они могут быть фиксированными (жесткая схема рациионирования [1, 2]) и не зависеть непосредственно от решений участника либо определяться выраженным им спросом (гибкая схема [3, 2]). Предъявляемый спрос на рациионируемые продукты, как правило, не совпадает с вальрасовским. Будем называть его *заказом*. В известных моделях, например в [1–4], заказ считается равным активному (effective) спросу, впервые предложенному в [5]. Понятие активного спроса плодотворно используется в моделях регулирования цен [6, 7]. Однако он не является объектом выбора участников, направленного на оптимизацию их критериев. Между тем представляется естественным, что производители и потребители, стремясь к максимизации полезности, могут свободно выбирать размеры заказов по собственному усмотрению. Моделирование возникающей при таком подходе ситуации является целью настоящей работы и основано на модификации схемы рациионирования, предложенной Ж.П. Бенасси [3].

Экономика включает производителей и потребителей (участников). Каждый участник независимо от других выбирает поведение, максимизирующее его полезность при наличии внутренних и внешних ограничений. Последние возникают вследствие того, что при негибких ценах спрос на некоторые продукты может не удовлетворяться полностью и разумный участник должен учитывать этот факт при оптимизации. В отличие от [3], где внешние ограничения носят субъективный характер, здесь им придается вполне конкретный смысл: они определяются поставками соответствующего продукта. Заметим, что понятие поставки тождественно сделке (transaction) в [3] и таким образом объем сделки формирует внешнее ограничение одного из двух участников. В предлагаемых моделях каждый из участников выбирает объемы заказов на необходимые ему продукты. Все заказы на один продукт поступают на единый рынок, на другой стороне которого собираются все данные по предложению этого продукта. Если суммарный заказ превосходит предложение, продукт дефицитен и его поставки рациионируются. В противном случае заказы удовлетворяются полностью, рациионируются

поставки продавцов. В дальнейшем будет рассматриваться рационирование, пропорциональное величине заказов.

При любых разумных функциях рационирования реализуется принцип "больше закажешь, больше получишь". Осведомленный о дефиците и частичном выполнении заказов разумный участник, предъявляя спрос, потребует больше, чем ему в действительности нужно. Предъявляемые требования складываются при этом из двух частей: *действительного* и *компенсирующего* спроса, или заказа. Первый выражает действительные потребности участника, максимизирующие его целевую функцию в сложившихся условиях; второй предъявляется с целью компенсации недопоставок вследствие дефицита. Наличие и свободный выбор участниками величины их компенсирующего спроса являются характерной чертой описываемой экономики, поэтому будем называть ее *экономикой с компенсирующим спросом* (или компенсационными заказами).

Если бы полезность и бюджетно-технологические возможности не зависели от величины заказа, участник стремился бы заказать столько, чтобы внешние ограничения стали несущественными. Так как это невозможно при неравновесных ценах, то в таких моделях (модели с манипулированием [3]) рационируемого равновесия не существует.

В настоящей работе предлагаются два типа моделей, в которых рост заказов влечет за собой рост издержек. Слишком большие заказы делаются невыгодными или невозможными.

В моделях первого типа понятие заказа не только отождествляется с выраженным спросом, но ему придается и обычный житейский смысл. Более того, предполагается, что при оформлении заказов некоторая (быть может, малая) их часть оплачивается в предварительном порядке в момент заказа. Если заказ удовлетворяется неполностью, плата за недопоставленную продукцию возмещается заказчику (при регулярных связях процесс возмещения принимает более завуалированную форму перерасчетов). В этом процессе предварительная оплата порождает вмененные издержки, влияющие на выбор оптимальной величины заказа.

Другой причиной издержек, порожденных дефицитом и растущих с величиной заказа, является присущая такой экономике неопределенность объемов поставок. Правила рационирования дефицитных продуктов и в рыночной и в централизованно управляемой экономике не являются писанными, и принцип пропорционального распределения часто нарушается. Участники обычно могут более или менее точно указать нижнюю и верхнюю границу отношения поставок к заказам. В условиях комплектности производственных затрат неопределенность поставок порождает избыточные запасы, обслуживание которых требует дополнительных издержек. В моделях второго типа будет предполагаться, что финансовые возможности производителя ограничивают максимально допустимую стоимость таких запасов. Хотя мы будем использовать термин "заказ" для моделей обоих типов, во второй модели предъявляемый спрос не обязательно оформляется как заказ поставщику.

Для экономики с компенсирующими заказами будет определено понятие равновесия, аналогичное [1—3], и приведены достаточные условия его существования. Модель с предварительной оплатой используется в работе для анализа воздействия таких макрорегуляторов, как налоги и государственные расходы на занятость и национальный доход. В этой части статьи мы следуем традиции, восходящей к работам [8—10]. Будет показано, что учет дефицитности промежуточных продуктов, которой пренебрегают авторы [8—10], существенно меняет результаты анализа.

В классическом режиме [3] при дефиците продукта и избыточности труда государственные расходы и уровень налогов не влияют на национальный доход и занятость, рост реальной заработной платы снижает выпуск. Для этого же режима ниже показано, что дефицит подавляет производство и потребление, т.е. с его ростом они снижаются. Поэтому мероприятия, увеличивающие спрос (рост государственных расходов, заработной платы), снижают национальный доход и занятость, а увеличение налогов вызывает их рост. Хотя эти выводы получены для случая модели с предварительной оплатой, нетрудно убедиться, что те же оценки сохраняются и для модели, в которой ограничены запасы, порождаемые некомплектностью поставок.

Последняя модель возникла из попытки численного анализа падения уровня производства при переходе к рыночной экономике, когда цены еще неравновесны, а централизованного распределения ресурсов уже не существует. В такой период важной причиной снижения выпуска является разрушение сложившихся хозяйственных связей. Выпуск продукции практически всеми производителями лимитируется не производственными возможностями или имеющимся спросом, а недостаточными поставками промежуточных продуктов. Сформулированная для леонтьевской экономики модель неравновесия с неопределенными поставками позволяет верифицировать значения параметров, характеризующих компенсирующие заказы на основе функции спроса или плана производства и данных отчетных межотраслевых балансов, и использовать ее для прогнозистических расчетов. Из-за направленности на прикладные цели все модели изложены в применении к леонтьевской экономике. Нетрудно видеть, что переход к более общим моделям неравновесия, в которых потребителей много, а каждый производитель может выпускать различные наборы продуктов, требует несущественных изменений.

2. ЗАКАЗЫ, РАЦИОНИРОВАНИЕ И ПОСТАВКИ

Ограничимся для простоты изложения рассмотрением экономики леонтьевского типа. Она включает $n + 1$ участника: "конечного потребителя" и n отраслей, каждая из которых производит один продукт. Различные отрасли выпускают разные продукты. Для выпуска каждой единицы продукта j отрасль i затрачивает a_{ij} единиц продукта i , $i, j \in N = \{1, \dots, n\}$. Модель функционирования включает модели, описывающие поведение участников, и модель их взаимодействия. Описание удобнее начать с последней. Каждый участник, исходя из своих возможностей и целей, заказывает производителю необходимую ему продукцию. Обозначим через z_{ij} величину заказа участника j на продукт i . Суммарный заказ всех участников на продукт i равен $z_i = \sum_{j=0}^n z_{ij}$, где z_{i0} — заказ конечного потребителя. Пусть x_i — объем выпуска продукта i . Назовем продукт дефицитным, если $z_i > x_i$. Обозначим через

$$\delta_i = \min \left\{ 1, \frac{x_i}{z_i} \right\} \quad (1)$$

средний для совокупности потребителей продукта i уровень удовлетворения заказа. Величину $\omega_i = \delta_i^{-1} - 1$ будем называть показателем дефицитности. Заказ отрасли зависит прежде всего от планируемого ею выпуска, определяющего ее затраты промежуточных продуктов $(a_{ij}x_j)_i$. При отсутствии дефицита на рынке i , когда заказы z_{ij} полностью удовлетворяются, естественно предположить, что заказы равны действительному спросу $r_{ij} = a_{ij}x_j$. Если же продукт дефицитен, то объем поставки будет меньше заказа, и для компенсации дефицита отрасль запросит больше, чем ей требуется. То же относится и к конечному потребителю, рассчитывающему на уровень потребления $r_{i0} = x_{i0}$. Не уменьшая общности, будем считать, что заказ включает два слагаемых, т.е.

$$z_{ij} = r_{ij} + M_{ij}, \quad i \in N, \quad j \in \bar{N} = \{0, 1, \dots, n\}, \quad (2)$$

где первое отражает действительные потребности участника, а второе направлено на компенсацию дефицита. Величины M_{ij} будем называть компенсационными заказами. Последние должны удовлетворять естественному требованию

$$M_{ij} \geq 0; \quad M_{ij} = 0, \quad \text{если} \quad \omega_i = 0. \quad (3)$$

Рынок дефицитного продукта управляется производителем, который распределяет продукт между заказчиками. Объем поставок каждому участнику не превосходит его заказа и зависит от возможностей производителя и заявок всех участников. Значения

функция рационарирования i -го продукта $d_i: R_+^{n+2} \rightarrow R_+^{n+1}$, которой руководствуется производитель i , показывают количества продукта i , поставляемые всем заказчикам. Функции d_i удовлетворяют экономически понятным требованиям

$$\begin{aligned} 0 &\leq d_{ij}(x_i, z_{i0}, \dots, z_{in}) \leq z_{ij} \forall i, j, \\ d_{ij}(x_i, z_{i0}, \dots, z_{in}) &= z_{ij}, \text{ если } \omega_i = 0, \\ \sum_{j=0}^n d_{ij}(x_i, z_{i0}, \dots, z_{in}) &= \begin{cases} x_i, & \text{если } \omega_i > 0, \\ z_i, & \text{если } \omega_i = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (4)$$

Функции рационарирования определяют фактические поставки (обозначим их v_{ij}), задающие внешние ограничения на выбор участников.

Всюду в дальнейшем будем считать, что рационарирование заключается в распределении дефицитных продуктов между участниками, пропорциональном их заказам, т.е. $d_{ij} = \delta_i z_{ij}$, откуда

$$v_{ij} = \delta_i z_{ij} = z_{ij} \min \left\{ 1, x_i / \sum_{j=0}^n z_{ij} \right\}. \quad (5)$$

Из (5) следует, что поставки, или внешние ограничения, зависят от выбора участников. Они могут по-разному представлять себе связь поставок с их действиями. Основное внимание будет уделено случаю, когда участники полагают, что их действия не оказывают влияния на уровень дефицитности продукта, т.е. величина v_{ij} пропорциональна их заказам

$$v_{ij} = \delta_i (r_{ij} + M_{ij}), \quad j \in \bar{N}, \quad i \in N, \quad (6)$$

а уровень δ_i фиксирован при выборе оптимального поведения.

Если участники учитывают влияние своих заказов на дефицитность, то

$$v_{ij} = (r_{ij} + M_{ij}) \min \left\{ 1, \frac{x_i}{z_i(j) + r_{ij} + M_{ij}} \right\}, \quad j \in \bar{N}, \quad i \in N, \quad (7)$$

где величины $z_i(j) = \sum_{k \neq j} z_{ik}$ и x_i рассматриваются как фиксированные.

3. ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ОПЛАТА ЗАКАЗОВ. ЗАДАЧИ УЧАСТНИКОВ

Заказ является единственной информацией о спросе, поступающей на рынок. Поэтому разумно предполагать, что поставки v_{ij} возрастают по аргументу z_{ij} и убывают по z_{ik} , что имеет место в (5). Соперничая друг с другом за поставки дефицитного товара, участники неограниченно наращивали бы свои заказы, если бы последние не влекли за собой издержек. Рассмотрим следующую организацию процесса заказ—поставка—расчет. Прежде всего этот процесс, так же как и фиксированные цены и рационарируемое равновесие, относится к понятиям краткосрочного анализа, например, к изучению функционирования экономики в течение одного года. Пусть одно и то же количество продукта z заказывается каждые T дней (или k раз в течение года). Заказ делается в начале, а поставка осуществляется в конце подпериода, через T дней, причем поставляется величина v , $v < z$. Величина поставки v зависит от z ; уменьшение z вызвало бы сокращение v , т.е. выбор z учитывает наличие дефицита и обеспечивает его доступную компенсацию. Предположим далее, что некоторая доля заказа оплачивается в момент заказа (предварительная оплата), а оставшаяся — после его поставки. Тогда в начале первого периода T заказчик платит βpz , где p — цена заказываемого продукта; β — доля, оплачиваемая предварительно, $0 < \beta < 1$. В начале каждого следующего периода заказчик платит βpz за заказ и доплачивает за поставку $pv - \beta pz \geq 0$, т.е. всего pv . В последнем цикле заказ не делается, и плата составляет $pv - \beta pz$. Сравним режим платежей заказчика с вариантом, когда компенсационных заказов нет и $z = v$. Различие состоит в том, что в начале года он платит дополнительно $\beta p(z - v)$ и получает эту сумму обрат-

но в конце года. Поскольку у участников всегда есть альтернативный вариант использования денег, например положить их в банк и вернуть с процентами, вмененные издержки, порожденные компенсационным заказом, составят $\rho\beta p(z - v)$.

Теперь мы готовы сформулировать задачи участников. Производитель стремится максимизировать прибыль как разность между доходами от производства и его издержками, включающими вмененные, равные потерям от беспроцентного кредитования поставщика, чем по сути является предварительная плата за нереализованные поставки. Отрасль j выбирает объем выпуска и величину заказа из решения задачи

$$p_j x_j - \sum_{i=1}^n p_i v_{ij} - w_j l_j - \rho \sum_{i=1}^n \beta_{ij} p_i M_{ij} \rightarrow \max \quad (8)$$

при внутренних

$$0 \leq x_j \leq \min \{x_j^m, F_j(l_j)\} \quad (9)$$

и внешних ограничениях

$$a_{ij} x_j \leq v_{ij} \quad \forall i, \quad \text{таких, что } \delta_i < 1, \quad (10)$$

$$x_j \leq z_j. \quad (11)$$

Здесь $p = (p_i)$ — вектор цен; x_j и M_{ij} — искомые объемы выпуска и компенсационных заказов; w_j — заработная плата за единицу труда; l_j — объем труда, использованного отраслью; ρ — норма банковского процента; β_{ij} — доля заказа на продукт i , оплачиваемая отраслью j в предварительном порядке, $0 < \beta_{ij} \leq 1$; F_j — производственная функция (определяет не чистый, как обычно, а валовый выпуск) отрасли j ; x_j^m — верхняя граница выпуска, определяемая наличными производственными фондами. Отметим, что второй член в (8), оценивающий материальные затраты, отражает тот факт, что все поставки (они не превосходят заказа), даже избыточные, оплачиваются. Последнее ограничение (11) исключает возможность перепроизводства неходового товара и гарантирует полную реализацию. Отметим, что внешние ограничения (10) и (11) удовлетворяют двум стандартным требованиям к моделям рационирования: никто не понуждается производить или потреблять больше, чем он желает, и рационируется только одна сторона каждого рынка. Назовем (8)–(11) задачей P_j .

Конечный потребитель, объединяющий домашние хозяйства, правительство и инвесторов, определяет свой действительный спрос $x_0 \in R_+^n$ и компенсационные заказы $M_0 = (M_{i0}) \in R_+^n$, решая задачу

$$u(x_0, m) \rightarrow \max \quad (12)$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^n p_i (v_{i0} + \beta_{i0} M_{i0}) + m_0 = B_0, \quad m = m_0(1 + \rho) + \sum_{i=1}^n p_i \beta_{i0} M_{i0}, \quad (13)$$

$$x_{i0} \geq 0, \quad x_{i0} \leq v_{i0} \quad \text{для } \forall i \text{ таких, что } \delta_i < 1.$$

Назовем (12), (13) задачей C . В целевая функция (12) зависит от вектора потребления x_0 и денежной суммы m , передаваемой от бюджета B_0 текущего периода в бюджет следующего. Эта сумма складывается из двух частей: сберегаемой m_0 , которая может быть положена в банк под процент ρ и суммы $\sum p_i \beta_{i0} M_{i0}$, затраченной сверх необходимых платежей $\sum p_i v_{i0}$ на предварительную оплату доли (β_{i0}) заказов. Эта сумма выплачивается в начале и возвращается в конце цикла.

Назовем *экономикой-1* совокупность участников, выбирающих свое поведение из решения задач P_j и C в случае, когда v_{ij} определяется условиями (6). Аналогично в *экономике-2* v_{ij} определяется условиями (7).

Равновесием в экономике-1 называется тройка n -векторов выпуска x^* , потребления x_0^* и показателей дефицитности ω^* — такая, что x_j^* — решения задач P_j , x_0^* — решение C при $\delta^* = (1 + \omega^*)^{-1}$, а δ^* определяется (1).

Равновесием в экономике-2 называется пара векторов x^* и x_0^* и матрица $M^*(n \times (n+1))$ — такие, что $(x_j^*, M^*(j))$ — решения P_j при фиксированных $(x_k^*, M^*(k))$ для $k \in \bar{N} \setminus j, j \in N, (x_0^*, M^*(0))$ — решение C при фиксированных $(x_k^*, M^*(k)), k \in N$.

Понятие равновесия-2 нуждается в некотором уточнении. В (7) входят переменные двух видов: одни выбираются отраслью j , другие ее поставщиками. При решении задачи P_j последние фиксированы. Возникает вопрос, что такое поставка отрасли самой себе и фиксирована ли величина x_j в числителе правой части выражения для v_{jj} . Будем рассматривать v_{jj} как поставки одними предприятиями отрасли другим ее предприятиям, что имеет место в действительности. При этом каждое предприятие влияет на суммарный спрос, формирующий v_{jj} , предложение же остается вне его воздействия. Поэтому будем считать, что величина x_j в формулах для v_{jj} фиксирована так же, как и x_k в выражениях для v_{kj} . Отсюда следует, что все v_{ij} являются дробно-линейными функциями x_j и M_{ij} .

4. РЕШЕНИЯ УЧАСТНИКОВ. СУЩЕСТВОВАНИЕ РАВНОВЕСИЯ

Рассмотрим решения участников в экономике-1. Из (8), (10) и (6), а также (12), (13) следует, что оптимальные компенсационные заказы при заданных δ_i и произвольных x, x_0 удовлетворяют соотношениям

$$M_{ij} = a_{ij} x_j \omega_i, \quad j \in N; \quad M_{i0} = x_{i0} \omega_i, \quad i \in N. \quad (14)$$

Положим $b_j(\omega) = \max\{0, p_j - \sum_{i=1}^n p_i a_{ij}(1 + \rho \beta_{ij} \omega_i)\}$ и обозначим через $\tilde{x}_j(\omega) = \arg\max (b_j \times x(\omega) x - w_j \phi_j(x))$, где ϕ_j — функция, обратная $F_j, \omega = (\omega_i) \in R_+^n$. Пусть F_j определена в R_+ , дважды дифференцируема, $F_j(0) = 0, F'_j(0) = \infty, F'_j(\infty) = 0, F''_j < 0$. Тогда $\tilde{x}_j(\omega) = f_j \times (w_j^{-1} b_j(\omega))$, где f_j — функция, обратная ϕ'_j .

$$\begin{aligned} \text{где } x_j(\omega) &= \min \{x_j^1(\omega), z_j\}, \\ x_j^1(\omega) &= \min \{x_j^m \tilde{x}_j(\omega)\} \end{aligned} \quad (15)$$

является единственным решением задачи P_j .

Из (14) следует, что задачу C можно представить в виде

$$u(x_0, (1 + \rho)m_0 + \sum_{i=0}^n p_i \beta_{i0} x_{i0} \omega) \rightarrow \max \quad (16)$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^n p_i (1 + \beta_{i0} \omega_i) x_{i0} + m_0 = B_0, \quad x_0 \in R_+^n, \quad m_0 \geq 0.$$

Обозначим через $x_0(\omega), m_0(\omega)$ решение (16).

Пусть u строго квазивогнутая функция, ненасыщаемая хотя бы по одному аргументу. Решения отраслей и конечного потребителя порождают непрерывное отображение $\delta \Rightarrow \omega = (\delta_i^{-1} - 1) \Rightarrow x(\omega), x_0(\omega) \Rightarrow (\delta'_i = x_i(\omega)/z_i(\omega))$, переводящее компакт $\Delta = \{\delta \in R^n: 0 \leq \delta_i \leq 1 \forall i\}$ в себя. Здесь суммарный заказ $z_i(\omega) = (1 + \omega_i)(x_{i0}(\omega) + \sum a_{ij} x_j(\omega))$. неподвижная точка этого отображения δ^* , существующая в силу теоремы Брауэра, определяет равновесие $(\omega^*, x_0(\omega^*), x(\omega^*))$. Однако это утверждение в столь общей форме мало полезно, поскольку всегда существует тривиальное равновесие $\delta^* = 0, x^* = x_0^* = 0, M^* = 0$. Нетривиальное равновесие существует не всегда.

Утверждение 1. Показатели дефицитности ω^* равновесны тогда и только тогда, когда

$$x_i(\omega^*) = x_{i0}(\omega^*) + \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j(\omega^*) \quad i \in N. \quad (17)$$

Доказательства этого и последующих утверждений приведены в приложении.

Рассмотрим отображение $T: R_+^n \rightarrow R_+^n$, заданное соотношениями $T_i(\omega) = (1 + \omega_i) \times \times (x_{i0}(\omega) + \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j(\omega)) \times (x_i(\omega))^{-1} - 1$. Очевидно, неподвижная точка этого отображения является равновесной. Положим $\Omega(\omega) = \{\omega' \in R_+^n: \omega'_i \leq \omega_i \forall i\}$ для всех $\omega \in R_+^n$, $\Gamma(\omega) = \{\omega' \in \Omega(\omega): \exists i \omega'_i = \omega_i\}$, т.е. Γ — северо-западная граница множества $\Omega(\omega)$.

Утверждение 2. Пусть существует $\omega^0 \in R_+^n$ такая, что 1) $b_j(\omega^0) > 0 \forall j \in N$; 2) $T(0) < \omega^0$; 3) функции $T_j(\lambda\omega)j \in N$ не возрастают по λ при $\omega \in \Gamma(\alpha\omega^0)$ для $1 \leq \lambda \leq \alpha^{-1}$ и некоторого достаточно малого числа $\alpha > 0$. Тогда отображение T обладает неподвижной точкой ω^* , причем $0 \leq \omega^* \leq \omega^0$.

Для экономики-2 аналогично (14) получим из (7), что

$$M_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ если } z_i(j) + r_{ij} \leq x_i, \\ r_{ij}(z_i(j) + r_{ij} - x_i)/(x_i - r_{ij}) \text{ в остальных случаях,} \end{cases} \quad (18)$$

где $r_{ij} = a_{ij}x_j$ при $j \in N$, $r_{i0} = x_{i0}$, $i \in N$; остальные переменные, включая x_j , в выражениях для M_{ij} фиксированы. Так как все M_{ij} оказываются выпуклыми функциями r_{ij} , то субъекты экономики-2 решают задачи выпуклого программирования. Решения порождают отображение T^1 , переводящее точки $(x, M, x_0, M(0)) \in R_+^{n^2+3n}$ в выпуклые компактные подмножества этого ортанта. Здесь $M = (M(j), j \in N)$. Отображение T^1 полунепрерывно сверху, поскольку множества планов задач P_j и C как отображения $(x, M, x_0, M(0))$ полунепрерывны снизу. В силу (9) и (13) T^1 переводит точки некоторого компакта в себя, и неподвижная точка, являющаяся равновесием-2, существует в силу теоремы Какутани. Как и в случае экономики-1, это равновесие может быть тривиальным.

Примеры. 1. Пусть $(x_0^*, m_0^*) \in \text{Argmax} \{u(x, m): px + m = B\}$, $x^* = (E - A)^{-1}x_0^*$ и $x^* \leq x(0)$, где $x_j(0) = \min \{x_j^m, \tilde{x}_j(0)\}$. Очевидно, x^*, x_0^* совместно с $\omega^* = 0$ ($M^* = 0$) являются равновесием-1 (равновесием-2) соответственно.

2. Рассмотрим экономику-1 с $n = 1$ и заданными $\beta_0 = \beta_1 = \beta$, B_0 , p , w , ρ и удельными прямыми затратами a , $0 < a < 1$. Пусть также $F(l) = kl^{0.5}$, $x^m = \infty$. В силу (15) получим $x^1(\omega) = 0.5k^2pw^{-1}(1 - a(1 + \rho\beta\omega))$. Допустим, что $du/dx_0 > 0$, $du/dm_0 = 0$. Тогда $x_0(\omega) = B_0(p(1 + \beta\omega))^{-1}$. Обозначим через $\Phi(\omega) = x_0(\omega) - (1 - a)x^1(\omega)$ функцию избыточного спроса (при $\omega > 0$). Из утверждения 1 следует, что в равновесии выполняются соотношения $\omega \geq 0$, $\Phi(\omega) \leq 0$, $\omega\Phi(\omega) = 0$. Положим $\mu = 1 + \beta\omega$. Очевидно, $\Phi(\omega) = 0$ при

$$\mu = \frac{1 - a + ap \pm \sqrt{(1 - a + ap)^2 - 4apG}}{2ap}, \quad \text{где } G = \frac{2B_0w}{(1 - a)k^2p^2},$$

и только при этих μ . Равновесия не существует, если $G > G_0 = (1 - a + ap)(4ap)^{-1}$. При этом $\Phi(\omega) > 0 \forall \omega \geq 0$, т.е. невозможно добиться равновесия без изменения параметров (например, цен или заработной платы) или использования другой схемы рационирования. Если $G \leq G_0$, то $\Phi(\omega) < 0$ при $\omega \in (\omega_1, \omega_2)$, где $\omega_i = \beta^{-1}(\mu_i - 1)$, μ_i — корни уравнения $\Phi(\omega) = 0$, $i = 1, 2$, и равновесие существует. Пусть $\mu_1 \leq \mu_2$. Если $\mu_1 \leq 1$, то $G < 1 - a$ и равновесие достигается при $\omega = 0$, $\Phi(0) \leq 0$. При $1 - a \geq ap$ выполняется $\mu_2 \geq 1$. Если $\mu_2 > \mu_1 > 1$, то имеются два состояния равновесия при различных показателях дефицитности. Рассмотрим процесс установления равновесия $\dot{\omega} = \Phi(\omega)$, при котором дефицитность растет, если спрос избыточен, и наоборот. Равновесие ω_1 устойчиво относительно этого процесса, в чем можно убедиться с помощью функции Ляпунова $(\omega - \omega_1)^2$, производная которой в силу системы отрицательна для $\omega \neq \omega_1$, $0 \leq \omega < \omega_2$. Заменяя в функции Ляпунова ω_1 на ω_2 , нетрудно убедиться, что равновесие ω_2 неустойчиво. Все возможные случаи расположения корней и области устойчивости легко представить графически, замечая, что $x(\omega)$ — отрезок прямой при $\omega \in [0, (1 - a)/ap\beta]$, $x_0(\omega)$ — кусок гиперболы. Всегда выполняется $\Phi((1 - a)/ap\beta) > 0$, т.е. $\omega_2 < (1 - a)/ap\beta$.

5. МАКРОЭКОНОМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЗАНЯТОСТИ

Впервые модели неравновесной экономики использовались для макроэкономического обоснования кейнсианской и классической теории занятости в новаторских работах [8, 9]. Этим же проблемам посвящены [4, 10]. Модель экономики, изучаемая в этих работах, включает потребителя, производителя и правительство. Потребитель предъявляет спрос на продукт и предлагает труд, производитель использует труд и выпускает один продукт. Правительство собирает налоги и устанавливает уровень государственных расходов, определяющих его спрос. Экономика может находиться в одном из трех состояний в зависимости от уровня цен и заработной платы: предложение продукта и труда избыточны (получаемые при этом выводы соответствуют макротeorии Кейнса), предложение труда избыточно, продукт дефицитен (выводы соответствуют классическому анализу незанятости), дефицитны и труд, и продукт (подавленная инфляция). Четвертое состояние, когда труд дефицитен, а продукт избыточен, может реализоваться лишь при специальном подборе параметров модели. В ситуациях, когда продукт дефицитен, производитель либо не рационализирован (при избыточности труда) и свободно выбирает уровень производства, либо ограничен только недостаточным предложением труда. В отличие от этого в описанных в настоящей работе моделях явно рассматриваются не только трудовые, но и материальные затраты производителя, который в условиях дефицитности продукта конкурирует за него с потребителем. Поэтому анализ двух ситуаций, в которых продукт дефицитен, отличается от классического. Отличаются и полученные выводы.

Опишем модель, по возможности сохраняющую структуру и обозначения, предложенные в [4]. Производитель находит объемы выпуска $x(\omega)$ и заказа из решения задачи

$$p(1 - a(1 + \rho\beta\omega))x - wl \rightarrow \max, \quad (19)$$

$$l = \varphi(x), \quad x \leq z \quad \text{при} \quad \omega = 0,$$

где $\varphi = F^{-1}$ — функция, обратная производственной; z — суммарный заказ производителя и потребителей. Выражение (19) представляет собой задачу P_1 , в которой принято, что $x^m = \infty$, а для M_1 использовано его оптимальное значение (14). Созданная в процессе производства прибыль $Q = p(1 - a)x(\omega) - w\varphi(x(\omega))$ распределяется между потребителем и правительством. Доля γ , поступающая потребителю, наряду с заработной платой и прочими источниками формирует доходную часть его бюджета. Потребитель решает задачу

$$\left. \begin{aligned} u(x_0, (1 + \rho)m_0 + \rho\beta\omega x_0) &\rightarrow \max \\ \text{при условиях} & \\ p x_0(1 + \beta\omega) + m_0 = B_0 \equiv \bar{m} + wl + \gamma Q - \tau, & l \leq l_0 \left(\frac{w}{p}\right). \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Очевидно, (20) совпадает с C в форме (16). Предложение труда определяется вне оптимизации и считается известной гладкой монотонной функцией l_0 реальной заработной платы. В дальнейшем будем, как правило, считать предложение неэластичным и равным константе l^0 . Величина τ — абсолютное значение налога в реальном выражении, который совокупность потребителей платит правительству. Деятельность последнего сводится к потреблению некоторой величины g , причем в случае сбалансированного бюджета $pg = \tau + (1 - \gamma)Q$. Потребление правительства приоритетно и не подвержено влиянию дефицита. В соответствии с утверждением 1 в равновесии соблюдается баланс

$$(1 - a)x(\omega) = x_0(\omega) + g. \quad (21)$$

В предположениях примера 2 относительно производственной функции F решение

(19) единственно и

$$x(\omega) = \begin{cases} x^1(\omega) = \min \{F(l^0), f(p/w(1 - a(1 + \rho\beta\omega)))\} & \text{при } \omega > 0, \\ \min \{x^1(\omega), z\} & \text{при } \omega = 0. \end{cases} \quad (22)$$

Предположим также, что решение (20) единственно и дифференцируемо по параметрам. Существенную роль в дальнейшем играют знаки производных этого решения. Относительно этих знаков примем следующие предположения: 1) $\partial x_0/\partial \omega \leq 0$, причем неравенство строгое, если $\omega > 0$; 2) $\partial x_0/\partial p < 0$; 3) $\partial x_0/\partial w > 0$; 4) $\partial x_0/\partial \tau < 0$. Первое и второе предположения выполняются при правильной постановке задачи, поскольку рост уровня цен и дефицитности реально снижает потребление. Третье и четвертое предположение также естественны, причем четвертое непосредственно следует из $\partial x_0/\partial B_0 > 0$. Третье же означает, что с ростом заработной платы доход потребителей растет несмотря на снижение выпуска.

Рассмотрим сначала случай, когда сбалансированность бюджета не является обязательным требованием. При этом вальрасовское равновесие определяется балансами по продукту и по труду $\omega = 0, x_0(0) + g = (1 - a)f(1 - a)p/w = (1 - a)F(l_0(w/p))$, где $x_0(0)$ — функция параметров p, w, τ, γ и других. Пусть в соответствии с примером x_0 убывает по p при фиксированных x и w/p (предположение 5). Тогда эти уравнения однозначно определяют равновесные p^0, w^0 . Рассмотрим теперь ситуацию, когда предложение продукта и труда избыточно (ситуация Кейнса). В этом случае компенсационные заказы отсутствуют и анализ ничем не отличается от традиционного. Такой режим функционирования экономики реализуется при выполнении неравенства $x_0(0) + g \leq (1 - a)\min\{F(l_0(w/p)), f((1 - a)p/w)\}$.

Нетрудно убедиться, что это неравенство определяет область K на рисунке.

На луче $\Lambda = \{y \in R^2_+ : y = \lambda(p^0, w^0) \forall \lambda > 0\}$ выполняется $F(l_0(w/p)) = f((1 - a)p/w) = \text{const}$, в выше его $f < F$. В силу предположения 5 о знаках производных спрос x_0 падает вдоль луча. Поэтому граница K справа от равновесия достигается на $f((1 - a)p/w)$ и лежит выше луча Λ . Слева от равновесия она достигается на $F(l_0(w/p))$ и лежит ниже луча Λ . Если $\gamma = 1$ и $l_0(w/p) = l^0$, то граница изображается вертикальным отрезком $[(p^0, 0), (p^0, w^0)]$. В общем случае она зависит от параметров и изображается отрезком кривой $(p^1, 0), (p^0, w^0)$. На границе Γ_K области K спрос на продукт сбалансирован с предложением, т.е. слева от нее продукт дефицитен и заказ производителя включает компенсационную часть. Левая часть первого квадранта подразделяется на две области: нижнюю, где дефицитны продукт и труд, и верхнюю, где только продукт дефицитен. В традиционном анализе [4] граница между ними, очевидно, проходит по лучу Λ .

Влияние дефицита на поставки промежуточных продуктов сокращает выпуск и спрос на труд и понижает границу между верхней и нижней областями. Сохраним за верхней областью ее обозначение S . Обозначим через Φ функцию избыточного спроса. В этой области он вычисляется как

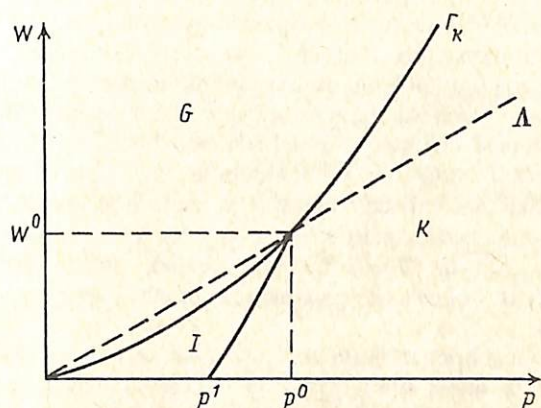
$$\Phi(\omega) = x_0(\omega) + g - (1 - a)f\left(\frac{p}{w}(1 - a(\rho\beta\omega + 1))\right). \quad (23)$$

С помощью (23) установим характер зависимости показателей выпуска, потребления населения и занятости от макроэкономических регуляторов: правительственных расходов g , налогов $1 - \gamma$ и τ , а также уровня цен p и заработной платы w . Интерес представляют эти зависимости в точках устойчивого равновесия ω^* , для которых $\Phi(\omega^*) = 0, \Phi'(\omega^*) < 0$. Из условия равновесия $\Phi(\omega) = 0$ с помощью теоремы о производной неявной функции отыщем знаки производных показателей как функций регуляторов. Легко проверить, что из предположений о знаках производных спроса x_0 следуют неравенства

$$\partial\Phi/\partial g > 0, \partial\Phi/\partial \tau < 0, \partial\Phi/\partial \gamma > 0, \partial\Phi/\partial w > 0, \partial\Phi/\partial p < 0.$$

Поэтому равновесное ω^* растет с ростом g , w и убывает с ростом p , τ и $1-\gamma$ (при отсутствии требования сбалансированности госбюджета).

Найденные зависимости не противоречат здравому смыслу: показатель дефицитности растет с ростом избыточного спроса, порожденного ростом заработной платы и правительственных расходов, и убывает с ростом цен, увеличивающих предложение и сокращающих спрос. Последнее относится и к налогам. Сравним теперь влияние макроэкономических рычагов в области C в классическом анализе и в экономике с компенсационными заказами, когда производитель и потребители конкурируют друг



с другом за поставки дефицитного ресурса. Рост правительственных расходов в классической экономике не оказывает влияния на производство, замещая потребление населения. В кейнсианском анализе (в режиме K) он стимулирует производство. В модели с компенсационными заказами рост правительственных расходов сокращает производство, национальный доход и занятость и вызывает еще большее сокращение потребления населения. Сказанное справедливо для вариаций g , не изменяющих режима C (или K) функционирования экономики. Если сокращение g приведет экономику из C в состояние, лежащее на границе K , то любое дальнейшее изменение g будет только сокращать национальный доход. Рост налогов и на потребителя и на производителя действует в противоположном направлении. Уменьшая избыточный спрос, налоги улучшают условия снабжения производителей и влекут рост национального дохода и занятости. Заметим, что при этом растет и потребление населения за счет роста его доходов. Граница Γ_K смещается влево, ω^* уменьшается. Если при этом ω^* обращается в 0, то достигнут "оптимальный" уровень налогов: любое их изменение при прочих равных условиях снижает национальный доход. Таким образом, соотношения цен и заработной платы, для которых выполняется баланс по продукту (т.е. $(p, w) \in \Gamma_K$), одновременно обеспечивают оптимальность государственных расходов и налогов с точки зрения занятости и национального дохода. Рост уровня заработной платы влечет такие же последствия, как и в классическом анализе, когда продукт дефицитен, а его производитель свободен от внешних ограничений, а именно снижения национального дохода, спроса на труд и занятости. Надо только отметить, что рост дефицитности усиливает влияние роста уровня заработной платы в сравнении с классической ситуацией. Рост цен вызывает рост производства как вследствие роста его эффективности, так и из-за снижения дефицитности.

Следуя изложенной схеме анализа, можно рассмотреть и случай, когда госбюджет должен быть сбалансирован в любом равновесном состоянии экономики. Если баланс бюджета достигается за счет выбора подходящего налога на прибыль, то $\gamma = 1 + (\tau - pg)/Q$.

6. НЕКОМПЛЕКТНОСТЬ ПОСТАВОК И ЗАПАСЫ

В действительности нецелесообразность чрезмерного роста заказов объясняется не только вмененными затратами из-за предварительной их оплаты. Рост заказов порождает также увеличение запасов и издержек, связанных с их оплатой и обслуживанием. В нормально работающей экономике запасы создаются преднамеренно и служат для поддержания ритмичного производства в перерывах между поставками и при случайных сбоях графика поставок. Такого рода запасы увеличиваются в условиях дефицита [11]. Однако нехватки и рacionamento сами порождают запасы, возникающие вследствие некомплектности поставок. Правила рационирования при дефиците обычно неписаны, и пропорциональность поставок заказам, как и любая другая детерминированная функция рационирования, является лишь идеализацией реальности. Более точным было бы считать уровень удовлетворения заказов случайной величиной или некоторым неопределенным числом, лежащим в заданных пределах. Если поставки неопределенны, никакими заказами производитель не может добиться их комплектности. Некомплектность же снижает выпуск, и часть поставленных продуктов оседает у производителя в виде непредусмотренных и, вообще говоря, нежеланных запасов. Назовем их *непланируемыми*. Объем непланируемых запасов так же неопределен, как уровень удовлетворения заказа. Будем считать в дальнейшем, что их максимальная величина ограничена.

Сформулируем задачу производителя в экономике-1 в условиях неопределенности. Пусть по-прежнему x_i выпуск продукта i , z_i — суммарный заказ на поставки i . Тогда $\delta_i = x_i/z_i$ назовем *базовым* уровнем удовлетворения заявок, $\omega_i = \delta_i^{-1} - 1$, как и раньше, показатель дефицитности. Назовем также δ_i^f *фактическим уровнем удовлетворения заказов* и $\omega_i^f = (\delta_i^f)^{-1} - 1$ — *субъективным коэффициентом дефицитности*. Можно по-разному задавать область неопределенности фактических уровней удовлетворения. Поскольку должны выполняться условия $0 < \delta_i^f \leq 1$ и $\delta_i = 1 \Rightarrow \delta_i^f = 1$, будем считать, что неопределенность субъективных дефицитностей тем больше, чем больше сама дефицитность, т.е. удовлетворяется условие $\omega_i^f \in [(1 - h_i)\omega_i, (1 + h_i)\omega_i]$, где $0 \leq h_i < 1$, $h = (h_i)$ — некоторый фиксированный вектор. Тогда $\delta_i^f \in [\delta_i^{\min}, \delta_i^{\max}]$, где $(\delta_i^{\min})^{-1} = \delta_i^{-1} + h_i\omega_i$, $(\delta_i^{\max})^{-1} = \delta_i^{-1} - h_i\omega_i$. При неопределенности поставок величина выпуска также неопределенна, и производитель стремится максимизировать минимальный (гарантированный) выпуск, если его продукт дефицитен, или удовлетворить все заявки в противном случае. Полагая, как и раньше, что заказ производителя $z_{ij} = a_{ij}(x_j + M_{ij})$ получим из неравенств типа (10), (11), что минимальный гарантированный выпуск равен

$$x_j = \min \{x_j^1, z_j\}, \text{ если } \omega_j = 0,$$

где

$$x_j^1 = \min \left\{ x_j^m, \min_{i: a_{ij} > 0} \frac{M_{ij}}{\omega_i(1 + h_i)} \right\}, \quad (24)$$

Чтобы выбрать величину компенсационного заказа M_{ij} , заметим, что наибольшее количество продукта i оседает в виде запаса у j в случае, когда поставка i осуществляется в максимальной пропорции $\delta_i^{\max}$, а фактический выпуск совпадает с гарантированным (24). Тогда прирост запаса i -продукта $s_{ij} = a_{ij}\delta_i^{\max}(M_{ij} - (1 - h_i)\omega_i x_j)$. Подсчитаем прирост суммарной стоимости запасов, $s_j = \sum_{i=1}^n p_i s_{ij}$, пренебрегая для простоты тем фактом, что хотя бы один продукт (лимитирующий) всегда используется пол-

ностью. Если максимально допустимый прирост запасов ограничен, то

$$s_j = \sum_{i=1}^n m_{ij} \delta_i^{\max} (M_{ij} - (1 - h_i) \omega_i x_j) \leq B_j, \quad (25)$$

где $m_{ij} = p_i a_{ij}$ — удельные затраты на продукт i ; B_j — граница допустимого прироста. Производитель выбирает величину компенсационных заказов M_{ij} , решая задачу

$$\min_{i: a_{ij} > 0} \frac{M_{ij}}{\omega_i (1 + h_i)} \rightarrow \max \quad (26)$$

при условии (25).

Очевидно, максимум в (26) достигается, когда выражения $M_{ij}/(1 + h_i)\omega_i$ не зависят от i . Положим $M_{ij} = (1 + h_i)\omega_i k_j$. Тогда $x_j^1 = \min \{x_j^m, k_j\}$ в силу (24), т.е. $x_j \leq k_j$. Поскольку (21) определяет гарантированный выпуск, минимизируя максимальный прирост запасов, заметим, что избыток заказов $k_j > x_j$ нецелесообразен, т.е. $k_j = x_j$. Из (26)

следует, что $k_j \leq B_j (2h \sum_{i=1}^n m_{ij} \omega_i (1 + (1 - h_i)\omega_i)^{-1})^{-1}$. Таким образом, оптимальный выбор производителя задается соотношениями

$$x_j(\omega) = \min \{x_j^1(\omega), z_j\},$$

где

$$x_j^1(\omega) = \min \left\{ x_j^m, \frac{B_j}{2 \sum_{i=1}^n m_{ij} \frac{\omega_i h_i}{1 + (1 - h_i) \omega_i}} \right\} \quad (27)$$

$$M_{ij}(\omega) = (1 + h_i) \omega_i x_j(\omega).$$

Дефицит порождает также непланируемые запасы у потребителей. Например, существующая система "заказов" часто навязывает ненужные покупателям товары. Однако очень трудно оценить, какая часть излишних продуктов замещает в потреблении нехватку других, а какая откладывается впрок, образуя запас. Поэтому для конечного потребителя целесообразно сохранить подход, описанный в разд. 3, либо предположить, что он вообще не оперирует величиной заказа как объектом выбора и предъявляет в качестве заказа активный спрос [2]. В общем случае обозначим через $y(\omega) \in R_+^n$ вектор заказов конечного потребителя. Пусть, как и раньше, $x_0(\omega)$ — вектор конечного потребления.

Утверждение 3. Тройка $\omega^* \in R_+^n$, $x(\omega^*) = (x_j(\omega^*)) \in R_+^n$ и $x_0(\omega^*)$ образует равновесие тогда и только тогда, когда ω^* — решение системы

$$x_i = x_{i0} + \frac{1 + (1 + h_i) \omega_i}{1 + \omega_i} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j, \quad (28)$$

$$x_{i0} = \frac{y_i(\omega)}{1 + \omega_i}, \quad x_i = x_i(\omega), \quad \omega_i \geq 0, \quad i \in N.$$

Для доказательства достаточно заметить, что выражения для x_i и x_{i0} непосредственно следуют из определения базового δ , компенсирующего спроса и суммарного заказа.

Предположим, что фактический спрос x_0 как функция показателей дефицитности ω непрерывен и обладает свойством валовой заменимости

$$x_{i0}(\omega') \geq x_{i0}(\omega) \quad \text{при} \quad \omega' = \omega + \alpha e^j, \quad (29)$$

$$\alpha > 0, \quad \forall j \neq i, \quad \forall i$$

В (29) e^j — орт j в R^n .

Утверждение 4. Пусть выполняется (29) и существует вектор $\bar{\omega} > 0$, такой, что

$$x_i^1(0) < x_{i0}(0) + \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^1(\bar{\omega}) \forall i, \quad (30)$$

$$x_j^1(\bar{\omega}) > x_{j0}(\bar{\omega}) + \frac{1 + (1 + h_i)\bar{\omega}_i}{1 + \bar{\omega}_i} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^m \forall i. \quad (31)$$

Тогда равновесие (27), (28) существует, причем $0 \leq \omega^* \leq \bar{\omega}$.

Требования, гарантирующие существование равновесия, могут быть сформулированы по-другому. Пусть $H(\omega) = (h_{ij}(\omega))$ — диагональная матрица с диагональными элементами $h_{ii}(\omega) = (1 + (1 + h_i)\omega_i)/(1 + \omega_i)$, остальные $h_{ij} = 0$. Очевидно, $1 \leq h_{ii} < 1 + h_i$. Предположим, что матрица $AH(\omega)$ продуктивна $\forall \omega \geq 0$.

Утверждение 5. Пусть функция $(E - H(\omega)A)^{-1}x_0(\omega)$ обладает свойством валовой заменимости, существует $\bar{\omega} > 0$ такое, что

$$x^1(0) \leq (E - H(0)A)^{-1}x_0(0),$$

$$x^1(\omega) \geq (E - H(\bar{\omega})A)^{-1}x_0(\bar{\omega}).$$

Тогда равновесие существует.

Это утверждение непосредственно следует из [12].

Модель экономики с некомплектными поставками и образованием непланируемых запасов, так же как и модель с предварительной оплатой заказов, может использоваться для анализа воздействия макроэкономических регуляторов на функционирование народного хозяйства. Нетрудно видеть, что при справедливости принятых в разд. 5 предположений о знаках производных остаются в силе и полученные там выводы. Модель (27), (28) удобнее моделей разд. 4 для практических расчетов, поскольку включает $2n$ неизвестных параметра сферы производства $h = (h_i)$ и $B = (B_j)$, $i, j \in N$, которые могут верифицироваться по наблюдаемым данным. Из (28) следует, что ве-

личина $h_i \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$ может рассматриваться как прирост запасов продукта i у всех участников — величина, фиксируемая в межотраслевом балансе. Если известна функция предъявляемого спроса $y(\omega)$ (для планового хозяйства можно считать $y(\omega) = y$, где y определяется планом) и фактическое потребление, то уравнения (28) позволяют определить ω и B . Соответствующий метод, так же как и алгоритмы решения (28), будет предметом дальнейшей работы.

7. ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство утверждения 1. Вектор ω^* равновесен тогда и только тогда, когда $x_i(\omega^*) = (1 + \omega_i^*)^{-1} z_i(\omega^*)$ $i \in N$. Из того, что $z_i(\omega) = (1 + \omega_i)(x_{i0}(\omega) + \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j(\omega))$, непосредственно следует (17). Утверждение доказано.

Доказательство утверждения 2. Из первого условия следует, что отображение T определено и непрерывно всюду в $\Omega(\omega^0)$. Из второго условия найдется достаточно малое число α , такое, что $T(\omega) < \omega^0$ для $\omega \in \Gamma(\alpha\omega^0)$. Тогда из третьего условия получим, что $T(\omega) \leq \omega^0$ для $\omega \in \Omega(\omega^0)$. Таким образом, T отображает множество $\Omega(\omega^0)$ в себя. Утверждение вытекает из теоремы Брауэра.

Для доказательства утверждения 4 нам понадобятся две леммы. Положим

$$z_i(x) = y_i(\omega) + (1 + (1 + h_i)\omega_i) \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \forall i \in N. \quad (32)$$

Здесь $z_{ij} = (1 + \omega_i(1 + h_i))a_{ij}x_j$ — заказ участника j на продукт i при $x_j = x_j(\omega)$. Выражение (32) продолжает эту зависимость на произвольные $x \in R_+^n$.

Лемма 1. Пусть $\omega' \geq 0$ ноль отображения $G(\omega)$: $G_i(\omega) = x_{i0}(\omega) + \frac{1 + (1 + h_i)\omega_i}{1 + \omega_i} \sum_{j=1}^n$

$a_{ij}x_j^1(\omega) - x_i^1(\omega)$, $i \in N$. Тогда ω' удовлетворяет системе (27), (28).

Доказательство. Из определения G непосредственно следует, что $x^1(\omega)$ удовлетворяет первым n соотношениям (28). Покажем, что $x(\omega) = x^1(\omega)$. Так как $x_i^1(\omega) =$

$= x_{i0}(\omega) + \frac{1 + (1 + h_i)\omega_i}{1 + \omega_i} \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j^1(\omega) \leq (1 + \omega_i)x_{i0}(\omega) + (1 + (1 + h_i)\omega_i) \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j^1(\omega) = z_i \times$
 $\times (x^1(\omega))$ при $\omega_i \geq 0$, то $x^1(\omega) \leq z_i(x^1(\omega))$, причем при $\omega_i = 0$ имеет место равенство, т.е. $x^1(\omega)$ удовлетворяет (27). Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть выполняются условия (29)–(31). Тогда существует ω^* такое, что $0 \leq \omega^* \leq \bar{\omega}$, $G(\omega^*) = 0$.

Доказательство. В окрестности $0 \in R^n$ выберем произвольную точку ω^0 такую, что $0 < \omega^0 < \bar{\omega}$. Рассмотрим открытую область $\Omega = \{\omega' = \omega - \omega^0, \omega \in R^n: 0 < \omega_i < \bar{\omega}_i \forall i\}$ и ее границу Γ . В исходных координатах точки Γ представимы в виде либо $\omega(i, \bar{\omega}, r) = \bar{\omega} - \sum_{k \neq i} r_k e^k$, либо $\omega(i, 0, r) = \sum_{k \neq i} r_k e^k$, где $0 \leq r_k \leq \bar{\omega}_k$. Для произ-

вольной точки $\omega = \omega(i, \bar{\omega}, r)$ первого типа справедливо $x_i^1(\omega) \geq x_i^1(\bar{\omega})$, поскольку x^1 невозрастающая функция ($x^1(\omega') \leq x^1(\omega)$, если $\omega' \geq \omega$). Из (29) получим $x_{i0}(\omega) \leq x_{i0}(\bar{\omega})$, и поскольку функции $(1 + (1 + h_i)\omega_i)/(1 + \omega_i)$ возрастают по ω_i , то для

любой точки первого типа найдется номер i , для которого $x_i^1(\omega) > x_{i0}(\omega) + \frac{1 + (1 + h_i)\omega_i}{1 + \omega_i} \times$
 $\times \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j^m \geq x_{i0}(\omega) + \frac{1 + (1 + h_i)\omega_i}{1 + \omega_i} \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j^1(\omega)$. Если $\omega_i = \omega(i, \bar{\omega}, r)$, то $\omega_i = \bar{\omega}_i$ и $(\omega_i - \omega_i^0)G_i(\omega) < 0$. Для точек границы $\omega = \omega(i, 0, r)$ второго типа $x_i^1(\omega) \leq x_i^1(0)$ и $x_j^1(\omega) \geq x_j^1(\bar{\omega})$ следует из монотонности, $x_{i0}(\omega) \geq x_{i0}(0)$ вследствие (29), т.е. $G_i(\omega) > 0$ для точек границы $\omega = \omega(i, 0, r)$. Так как $\omega_i = 0$ для такой точки, то снова $(\omega_i - \omega_i^0) \times G_i(\omega) < 0$. Таким образом, для каждой точки ω границы Γ найдется координата i , для которой $(\omega_i - \omega_i^0)G_i(\omega) < 0$. В силу непрерывности G , применяя теорему 3.5 [13], покажем, что существует ω^* : $G(\omega^*) = 0$. Очевидно, $0 \leq \omega^* \leq \bar{\omega}$. Лемма доказана.

Утверждение 4 непосредственно следует из лемм 1 и 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Dreze J. Existence of an Exchange Equilibrium under Price Regities // Internat. Econ. Rev. 1975. V. 16. № 2.
2. Полтерович В.М. Рациональное ресурсов и вторичное равновесие // Экономика и мат. методы. 1982. XVIII. Вып. 4.
3. Benassy J.P. Neo-Keynesian Disequilibrium Theory in a Monetary Economy // Rev. of Econ. Stud. 1975. V. XLII. № 132.
4. Benassy J.P. Macroeconomics: An Introduction to the Non-Walrasian Approach. L., N.Y., 1986.
5. Clower R.W. The Keynesian Counterrevolution: A Theoretical Appraisal / The Theory of Interest Rates. L., 1965.
6. Honkapohja S., Ito T. Stability with Regime Switching // J. of Econ. Theory. 1983. V. 29. № 1.
7. Мовшович С.М. Регулирование цен при рациональном // Экономика и мат. методы. 1988. Т. XXIV. Вып. 5.
8. Barro R.J., Grossman H.I. A General Disequilibrium Model of Income and Employment // Amer. Econ. Rev. 1971. V. 61. № 1.
9. Barro R.J., Grossman H.I. Supressed Inflation and the Supply Multiplier // Rev. of Econ. Stud. 1974. V. XLI. (1). № 125.
10. Malinvaud E. The Theory of Unemployment Reconsidered. Oxford, 1977.
11. Воронович М.М. Простая модель самоусиления дефицита вследствие создания запасов // Экономика и мат. методы. 1987. Т. XXIII. Вып. 5.
12. Sandberg I.W. A Criterion for the Global Stability of a Price Adjustment Process // J. of Econ. Theory. 1978. V. 19. № 1.
13. Опоицев В.И. Равновесие и устойчивость в моделях коллективного поведения. М.: Наука, 1977.